

Aplicación del enfoque IDA-PBC en la estabilización del sistema Pendubot

Application of the IDA-PBC in the stabilization of the system Pendubot

Acosta, Vivian^{1*} y Ríos-Bolívar, Miguel²

¹Departamento de Cálculo. Facultad de Ingeniería. ULA

²Departamento de Sistemas de Control. Facultad de Ingeniería. ULA

Mérida 5101, Venezuela

*acostav@ula.ve

Recibido: 15-06-2009

Revisado: 15-01-2010

Resumen

En este trabajo se considera la aplicación del enfoque Interconexión e inyección de amortiguamiento (IDA-PBC) al problema de estabilización del Pendubot, como sistema mecánico sub-actuado. Para alcanzar este objetivo el sistema mecánico es transformado primero a su forma Hamiltoniana de puerto controlado, sintetizando posteriormente una ley de control aplicando el enfoque IDA-PBC. A fin de mejorar el desempeño de la ley de control, se propone combinar el controlador IDA-PBC con una ley de control lineal. El desempeño del controlador diseñado se muestra en simulaciones digitales.

Palabras clave: IDA-PBC, sistemas sub-actuados, Pendubot.

Abstract

In this paper we consider the application of the Interconnection and Damping Injection (IDA-PBC) approach to the problem of the stabilization of the Pendubot, as an underactuated mechanical system. To reach this objective the mechanical system is transformed to its Port controlled Hamiltonian form, synthesizing later a control law applying the IDA-PBC. In order to improve the acting of the control law, we propose to combine the controller IDA-PBC with a lineal control law. The performance of the controller is shown in digital simulations.

Key words: IDA-PBC, underactuated system, Pendubot.

1 Introducción

El control basado en pasividad es una metodología de diseño para el control de sistemas no lineales bien conocido en sistemas mecánicos. En algunos problemas de regulación, este enfoque provee un procedimiento natural para realizar el moldeo de energía potencial, preservando la estructura Euler-Lagrange del sistema en lazo cerrado.

Aunque se dispone de varias alternativas para la estabilización de sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos, en el problema de estabilizar algunos dispositivos sub-actuados es necesario modificar la función de energía total. El moldeo de energía total con el clásico procedimiento de control basado en pasividad destruye la estructura Euler-Lagrange del sistema en lazo cerrado y la función de almace-

namiento no es una función de energía que pueda tener alguna interpretación física (Ortega y Spong, 2000).

Esta situación se debe al hecho que el diseño implica una inversión del sistema a lo largo de las trayectorias de referencia.

Para superar este problema se propuso el enfoque de control basado en pasividad interconexión y asignación de amortiguamiento (IDA-PBC) (Ortega y col., 2002), el cual logra la estabilización de sistemas sub-actuados haciendo uso de principios físicamente motivados de moldeo de energía e inyección de amortiguamiento. La metodología dota al sistema en lazo cerrado con una estructura Hamiltoniana, donde las funciones de energía cinética y potencial tienen algunas características deseadas, garantizando que la función de energía total alcance un mínimo en el punto de operación.

Este nuevo enfoque está formulado para sistemas descritos por modelos Hamiltonianos de puerto controlado (PCH), los cuales son una clase de modelos que contienen estrictamente modelos Euler-Lagrange (EL), donde la función de energía en lazo cerrado es obtenida como resultado de la selección de sub-sistemas de interconexión y amortiguamiento deseados; vía solución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

En (Ortega y col., 1998), se presenta una aplicación del PBC a sistemas descritos por ecuaciones EL, incluyendo sistemas eléctricos y electromecánicos. En (Acosta y otros 2005) se hace una aplicación del enfoque IDA-PBC a sistemas con un grado de subactuación; (Bloch y col., 2000), utiliza el método de los controladores lagrangianos para la estabilización de sistemas no lineales; (Ortega y García-Canseco, 2004), hace una recopilación del enfoque IDA-PBC, presentando las alternativas de diseño del controlador. El éxito de este enfoque está en la posibilidad de resolver un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que determinan la función de energía a ser asignada al sistema en lazo cerrado. En (Bloch y col., 2000), se dan condiciones en el sistema y en la matriz de inercia deseada, tales que las ecuaciones puedan ser resueltas. En (Gómez-Estern y col., 2001), se muestra que cuando en el sistema en estudio la diferencia entre el número de acciones de control y los grados de libertad es uno, es decir, si el sistema tiene un grado de sub-actuación las ecuaciones en derivadas parciales de la energía cinética se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias. El principal problema de este enfoque radica en la posibilidad real de poder resolver las ecuaciones en derivadas parciales, que surgen de la aplicación del mismo.

2 Control de interconexión y asignación de amortiguamiento (IDA)

En esta sección se introduce el enfoque IDA-PBC para regular la posición de sistemas mecánicos sub-actuados cuya energía total viene dada por:

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \quad (1)$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ son las posiciones y momentos generalizados, $M = M^T > 0$ es la matriz de inercia, y $V(q)$ es la energía potencial. Si suponemos que el sistema no tiene amortiguamiento natural, entonces las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \bullet \\ q \\ \bullet \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (2)$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$

satisface $\text{rango } G = m < n$, es decir el caso de sistemas sub-actuados.

En el enfoque IDA-PBC se siguen dos pasos básicos (Ortega y Spong, 2000):

- Moldeo de energía: donde se modifica la función de energía total del sistema para asignar el punto de equilibrio deseado $(q^*, 0)$; e
- Inyección de amortiguamiento: para alcanzar estabilidad asintótica y adicionalmente, para preservar la interpretación de energía del mecanismo de estabilización, se requiere que el sistema en lazo cerrado mantenga la forma Hamiltoniana (Van der Schaft, 2000).

En virtud de (1) se propone como función de energía en lazo cerrado.

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p + V_d(q) \quad (3)$$

donde $M_d = M_d^T > 0$ y V_d representan la matriz de inercia y la función de energía potencial deseadas, a ser definidas. Se requerirá que V_d tenga un mínimo local aislado en q^* , es decir,

$$q^* = \arg \min V_d(q) \quad (4)$$

En el enfoque de control basado en pasividad (PBC) la señal de control es naturalmente descompuesta en la forma

$$u = u_{es} + u_{di} \quad (5)$$

donde el primer término u_{es} se diseña para lograr moldeo de energía y el segundo $u_{di}(q, p)$ corresponde a la inyección de amortiguamiento. En (Ortega y col., 2002) y (Van der Schaft 2000), se justifica la elección de la dinámica Hamiltoniana deseada de la forma:

$$\begin{bmatrix} \bullet \\ q \\ \bullet \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_d(q, p) - R_d(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde los términos

$$J_d = J_d^T = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$R_d = R_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_v G^T \end{bmatrix}$$

representan las estructuras deseadas de interconexión y amortiguamiento. Para la dinámica deseada en lazo cerrado se tiene la siguiente proposición, la cual revela las propiedades de estabilización del enfoque IDA-PBC:

- **Proposición 1:** el sistema (6) con (3) y (4), tiene un punto de equilibrio estable en $(q^*, 0)$. Este punto de equilibrio es asintóticamente estable, si es localmente detectable desde la salida.

$$G^T(q)\nabla_p H_d(q, p) \quad (8)$$

esto es, para que cualquier solución $(q(t), p(t))$ del sistema en lazo cerrado perteneciente a algún entorno abierto del equilibrio, se cumple

$$G^T(q(t))\nabla_p H_d(q(t), p(t)) \equiv 0, \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (q(t), p(t)) = (q^*, 0) \quad (9)$$

Una estimación del dominio de atracción esta dada por: Ω_c , donde $\Omega_c = \{(q, p) \in R^{2n} \mid H_d(q, p) < c\}$ y

$$\bar{c} = \sup\{c > H_d(q^*, 0) \mid \Omega_c \text{ esta acotado}\} \quad (10)$$

El término de moldeo de energía u_{es} del controlador, es obtenido del conjunto de ecuaciones resultante de la relación:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u_{es} =$$

$$(11)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Mientras que las primeras n ecuaciones son claramente satisfechas, el segundo conjunto puede ser expresado como:

$$Gu_{es} = \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \quad (12)$$

Esto lleva al siguiente conjunto de ecuaciones de acoplamiento que deben ser satisfechas para cualquier elección de u_{es} ,

$$G^\perp u_{es} = \left\{ \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \right\} = 0 \quad (13)$$

donde G^\perp es el aniquilador por la izquierda de rango

completo de G , es decir, $G^\perp G = 0$. La ecuación (9), con H_d dado por (3), es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, cuyas incógnitas son M_d y V_d .

Se tomara J_2 como parámetro libre, y p es una coordenada independiente. Si se obtiene una solución para esta ecuación diferencial parcial, la ley de control resultante u_{es} estará dada por:

$$u_{es} = \left(G^T G \right)^{-1} G^T \left\{ \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \right\} = 0 \quad (14)$$

Las ecuaciones en derivadas parciales (9) pueden separarse de forma natural en los términos que dependen de p y los que son independientes de p , es decir, los que corresponden a las energías cinética y potencial, respectivamente.

Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones (9) pueden escribirse como:

$$G^\perp \left\{ \nabla_q (p^T M^{-1} p) - M_d M^{-1} \nabla_q (p^T M_d^{-1} p) + 2J_2 M_d^{-1} p \right\} = 0 \quad (15)$$

$$G^\perp \left\{ \nabla_q V - M_d M^{-1} \nabla_q V_d \right\} = 0 \quad (16)$$

La idea principal es seleccionar el parámetro libre J_2 de manera tal que la ecuación (11) admita para todo p , una solución con M_d simétrica y definida positiva. Si se reemplaza esta matriz en (12), que es una ecuación en derivadas parciales expresadas solo en términos de la variable independiente q , se tendrá una solución para V_d que satisface (4).

3 El pendubot

El pendubot es un mecanismo robótico de dos enlaces ampliamente utilizado en la investigación en control no lineal y en la educación sobre varios tópicos como robótica, dinámica no lineal y diseño de sistemas de control (Fantoni y Lozano, 2002). Este dispositivo es un brazo mecánico planar con dos articulaciones rotacionales de ejes paralelos; con un actuador en el hombro (enlace 1) y sin actuador en el codo (enlace 2); la conexión de este segundo enlace se mueve libremente alrededor del hombro o primer enlace. El Pendubot posee características únicas e interesantes para la investigación que no se encuentran en otros mecanismos sub-actuados. La dificultad para controlar el Pendubot consiste básicamente en mover el enlace actuado para inducir el movimiento del enlace sin actuación, con el objetivo de elevarlo a la posición vertical y mantenerlo en esta.

El problema de la elevación del pendubot desde la configuración estable en lazo abierto hacia la posición deseada y la estabilización de este punto es un problema de control interesante, el cual ha sido abordado utilizando técnicas de control tales como Linealización parcial por realimentación y pasividad, Regulador Cuadrático Lineal (LQR), basado en la Linealización del sistema alrededor del punto de equilibrio de interés y técnicas de ubicación de los polos (Spong, 1994).

El diseño del controlador propuesto está basado en el enfoque IDA-PBC, desarrollado en la sección anterior, en donde se utiliza el moldeo de energía para lograr los objetivos de estabilización.

4 Dinámica del sistema

Considere el robot planar de dos enlaces sub-actuado, Pendubot sin fricción, representado en la Fig.1, con los parámetros físicos.

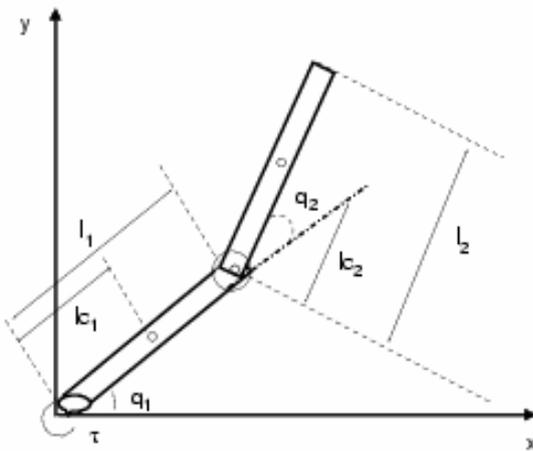


Fig. 1. El pendubot

- m_1 masa del primer enlace.
- m_2 masa del segundo enlace.
- l_1 longitud del enlace 1.
- l_2 longitud del enlace 2.
- l_{c1} distancia del centro de masa del enlace 1.
- l_{c2} distancia del centro de masa del enlace 2.
- I_1 momento de inercia del enlace 1 sobre su centroide.
- I_2 momento de inercia del enlace 2 sobre su centroide.
- g aceleración debido a la gravedad.
- q_1 ángulo que el enlace 1 hace con la horizontal.
- q_2 ángulo que el enlace 2 hace con el enlace 1.
- τ torque aplicado al enlace 1.

Las ecuaciones de movimiento son derivadas usando las ecuaciones de Lagrange y generan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_1) \ddot{q}_1 \\ & + (m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_2 \\ & + I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) q_2^2 + m_2 l_1 g \cos(q_1) \\ & + gm_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2) = \tau \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & m_2 l_{c2}^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 + I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ & + gm_2 l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) q_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

A fin de simplificar las ecuaciones anteriores, se introducen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 &= m_2 l_{c2} \end{aligned} \quad (19)$$

que al ser sustituidos en las ecuaciones de movimiento del Pendubot, generan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} & (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \ddot{q}_2 \\ & - \theta_3 \sin(q_2) q_2^2 - 2\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \theta_4 g \cos(q_1) \\ & + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) = \tau \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \theta_2 \ddot{q}_2 + (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + \theta_3 \sin(q_2) q_1^2 \\ & + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas en forma matricial

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (22)$$

donde $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t) \in \mathcal{R}$ denotan la posición de los enlaces, la velocidad y la aceleración respectivamente, τ es el torque aplicado al primer enlace. El modelo resultante es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de segundo orden que constan de carga inicial, fuerzas de reacción de acople entre articulaciones y efectos de carga de la gravedad.

$M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $g(q) \in \mathbb{R}^2$ representan la matriz de inercia, la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis y el vector gravitacional respectivamente. Las matrices de (18) para el Pendubot, pueden expresarse como:

$$M(q) = \begin{bmatrix} (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)) & (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \\ (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C(q) = \begin{bmatrix} -\theta_3 \dot{\text{sen}}(q_2) q_2 & -\theta_3 \dot{\text{sen}}(q_2) q_2 - \theta_3 \dot{\text{sen}}(q_2) q_1 \\ \theta_3 \dot{\text{sen}}(q_2) q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (25)$$

y las matrices

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau \end{bmatrix} \quad (26)$$

5 Representación hamiltoniana del Pendubot

A fin de aplicar el enfoque IDA-PBC desarrollado en la sección anterior, se hace necesario representar el sistema Pendubot bajo estructura Hamiltoniana. En este caso la función Hamiltoniana $H(q,p)$ será asumida como la suma de la energía cinética y la energía potencial, esto es

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \quad (27)$$

y el sistema será generalmente representado por:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = M^{-1}(q) p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + \tau \end{aligned} \quad (28)$$

El conjunto de ecuaciones (23) representan el sistema Hamiltoniano. Así el sistema bajo estructura Hamiltoniana queda definido como:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau \quad (29)$$

con función Hamiltoniana definida por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\theta_2 p_1 - (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) p_2}{2(\theta_1 \theta_2 + \theta_3^2 \cos^2(q_2))} p_1 + \\ &\frac{(-\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) p_1}{2(\theta_1 \theta_2 + \theta_3^2 \cos^2(q_2))} p_2 \\ &+ \frac{(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)) p_2}{2(\theta_1 \theta_2 + \theta_3^2 \cos^2(q_2))} p_2 \\ &+ \theta_4 g \text{sen}(q_1) + \theta_5 g \text{sen}(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (30)$$

La clase de sistemas representados bajo estructura Hamiltoniana de la forma (24), puede ser generalizada a sistemas descritos en coordenadas locales como sistemas Hamiltoniano Puerto Controlado (PCH); luego el sistema Pendubot representado como un sistema Hamiltoniano Puerto controlado se define de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

5.1 Diseño del controlador

Se aplica el enfoque IDA-PBC para regular la posición del Pendubot con función de energía total dada por la ecuación (27), donde $q \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ son la posición y el momento generalizado, respectivamente, y las ecuaciones de movimiento del sistema bajo representación Hamiltoniana se muestran en la ecuación (31).

5.2 Dinámica objetivo

Por la estructura de la función Hamiltoniana se propone una función Hamiltoniana deseada H_d de la forma:

$$H_d = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + V_d(q) \quad (32)$$

con $M_d = M_d^T$ y V_d , la matriz de inercia y la función de energía potencial en lazo cerrado, respectivamente.

5.3 Modelo de energía

Dado que la matriz de inercia del Pendubot es función solo de la coordenada sub-actuada q_2 , se propone una ma-

triz de inercia deseada M_d de la forma:

$$M_d(q) = \begin{bmatrix} a_1(q_2) & a_2(q_2) \\ a_2(q_2) & a_3(q_2) \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde los coeficientes a_1, a_2 y a_3 son funciones de la coordenada sub-actuada q_2 .

Dado que el sistema posee un grado de sub-actuación, es decir, es de dos grados de libertad con un solo actuador y, adicionalmente, la matriz de inercia solo depende de la coordenada sub-actuada, se puede aplicar la expresión:

$$\nabla_{q_k} \left[e_k^T M_d \right] = \frac{\left[M_d (\nabla_{q_k} M^{-1}) M_d \right]_k}{\left[M_d M^{-1} \right]_{kk}} \quad (34)$$

Para k_2 se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma que por la dimensión de cada una de las ecuaciones que lo conforman, resulta ser sumamente difícil de resolver, adicionalmente, los paquetes computacionales reportan al sistema como incompatible. Con el fin de lograr el objetivo de estabilización del pendubot, y simplificar las ecuaciones para el moldeo de energía cinética y potencial, se hace una reducción del sistema.

5.4 Simplificación del sistema

Si se considera la dinámica del Pendubot localmente, es decir en las proximidades del punto de equilibrio seleccionado para la estabilización, la matriz de inercia puede ser tomada como:

$$M(q) = \begin{bmatrix} (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3) & (\theta_2 + \theta_3) \\ (\theta_2 + \theta_3) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Con la intención de facilitar la manipulación de las ecuaciones de moldeo de energía, se plantea la matriz de inercia $M(q)$ de la forma:

$$M(q) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

con $\alpha_1 = \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3$, $\alpha_2 = \theta_2 + \theta_3$ y $\alpha_3 = \theta_2$. Esta matriz debe cumplir $\alpha_1 \alpha_3 > \alpha_2^2$.

5.5 Diseño del controlador

El primer paso a seguir para el diseño del controlador es el Moldeo de energía la matriz de inercia seleccionada

para el desarrollo del controlador es una matriz independiente de la coordenada sub-actuada, aun mas es una matriz constante, por lo cual se propone una matriz de inercia deseada de la forma:

$$M_d(q) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad a_1 > 0, \quad a_1 a_3 > a_2^2 \quad (37)$$

Estas desigualdades son impuestas para asegurar que la matriz $M_d(q)$ sea definida positiva. Las ecuaciones diferenciales parciales que permiten determinar la energía potencial deseada $V_d(q)$ son:

$$\frac{1}{a_1 a_2 - a_3^2} \left[-(a_2 a_3 - a_2^2 a_3) \frac{\partial V_d}{\partial q_1} - (a_1 a_3 - a_3^2 a_2) \frac{\partial V_d}{\partial q_2} \right] = -\theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \quad (38)$$

Aplicando el método de las características, se obtiene una solución general de forma:

$$V_d(q) = \frac{c_3}{c_1 + c_2} \text{sen}(q_1 + q_2) + \Phi(z) \quad (39)$$

con $c_1 = a_2 \alpha_3 - a_3 \alpha_2$, $c_2 = a_1 \alpha_3 - a_3 \alpha_2$ y

$c_1 = \theta_5 g (a_1 a_3 - a_2^2)$, y $\Phi(z)$ una función definida de

manera tal de garantizar que $\nabla_q V_d^* = 0$ se satisfaga. De esta manera se tiene que una posible solución para $\Phi(z)$ es:

$$\Phi(z) = \frac{k_2}{2} (z - z^*) \quad \text{para } k_2 > 0 \quad (40)$$

k_2 es una ganancia de diseño y z dada por la relación

$$z = \frac{c_2 q_1 - c_1 q_2}{c_2} \quad (41)$$

Se puede verificar con calculos sencillos que la función de energía potencial deseada V_d definida por (34) posee un mínimo en $q^* = (q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$; de igual manera se

verifica que se cumple $\nabla_q^2 V_d^* > 0$ si $k_2 > \frac{c_3}{c_1 + c_2}$ lo

que se traduce en que la siguiente desigualdad debe ser satisfecha

$$2a_3\alpha_2 > (a_1 + a_2)\alpha_3 \quad (42)$$

Es de hacer notar que, una vez que a_1, a_2 y a_3 han sido seleccionados, el término $a_1 + a_2$ permanece constante y la condición $a_1 a_3 > a_2^2$ se mantiene si se aumenta el valor de a_3 , así que con $a_1 + a_2$ fijos, se puede seleccionar a_3 de modo que las desigualdades:

$$\begin{aligned} a_1 a_3 &> a_2^2 \\ 2a_3\alpha_2 &> (a_1 + a_2)\alpha_3 \end{aligned} \quad (43)$$

se satisfagan simultáneamente para los valores de a_1, a_2 y a_3 seleccionados.

En consecuencia el Hessiano de V_d es definido positivo y q^* es un punto mínimo para la energía potencial deseada.

El término de moldeo de energía del control de entrada esta dado por:

$$\begin{aligned} u_{es} &= (G^T G)^{-1} G^T (\nabla_q V - M_d M^{-1} \nabla_q V_d) \\ &= \left(c_4 + c_5 + \frac{1}{a_1 a_3 - a_2^2} \right) c_3 \cos(q_1 + q_2) \\ &+ \left(c_4 - \frac{c_5 c_1}{c_2} \right) k_2 (z - z^*) + c_6 \cos(q_1) \end{aligned} \quad (44)$$

con:

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-a_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_2}{a_1 a_3 + a_2^2} \\ c_5 &= \frac{-a_2 \alpha_1 + a_1 \alpha_2}{a_1 a_3 + a_2^2} \\ c_6 &= \theta_4 g \end{aligned} \quad (45)$$

6 Inyección de amortiguamiento y análisis de estabilidad

La ley de control $u = u_{es} + u_{di}$ resulta del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u_{di} \quad (46)$$

para la cual se tiene que:

$$\dot{H}_d = \nabla_p H_d^T G u_{di} \quad (47)$$

con H_d dado por la expresión:

$$\begin{aligned} H_d &= \frac{1}{2(a_1 a_3 - a_2^2)} [a_3 p_1^2 - 2a_2 p_1 p_2 + a_1 p_2^2] \\ &+ \frac{c_3}{c_1 + c_2} \text{sen}(q_1 + q_2) + \frac{k_2}{2} (z - z^*)^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Claramente sin inyección de amortiguamiento el origen es un equilibrio estable, para hacer el equilibrio asintóticamente estable se propone adicionar amortiguamiento, realimentando la nueva salida pasiva $\nabla_p H_d^T G$, la cual puede ser calculada como:

$$G^T \nabla_p H_d = \frac{a_3 p_1 - a_2 p_2}{a_1 a_3 - a_2^2} \quad (49)$$

por lo tanto, se tiene u_{di} expresado de la forma:

$$u_{di} = -K_v \left(\frac{a_3 p_1 - a_2 p_2}{a_1 a_3 - a_2^2} \right) \quad (50)$$

obteniendo así una ley de control en coordenadas (q, \dot{q}) definida por:

$$\begin{aligned} u &= \left(c_4 + c_5 + \frac{1}{a_1 a_3 - a_2^2} \right) c_3 \cos(q_1 + q_2) \\ &+ \left(c_4 - \frac{c_5 c_1}{c_2} \right) k_2 (z - z^*) + c_6 \cos(q_1) \\ &- K_v \left[\frac{a_3}{a_1 a_3 - a_2^2} (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2) \right. \\ &\left. - \frac{a_2}{a_1 a_3 - a_2^2} (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_3 \dot{q}_2) \right] \end{aligned} \quad (51)$$

7 Simulaciones

En esta sección se muestra el comportamiento del sistema controlado Pendubot cuando se emplea el enfoque descrito en la sección anterior.

Los parámetros del modelo para las simulaciones son los propuestos en (Fantoni y Lozano, 2002), $\theta_1 = 0.034$; $\theta_2 = 0.0125$; $\theta_3 = 0.01$; $\theta_4 = 0.215$ y $\theta_5 = 0.073$; con gravedad $g = 9.81 \frac{m}{seg^2}$ y ganancias de diseño $k_2 = 0.8$ y $K_v = 5$; la matriz de inercia deseada M_d se asume como:

$$M_d = \begin{bmatrix} 35 & 0.9 \\ 0.9 & 9 \end{bmatrix} \quad (52)$$

la cual cumple con las restricciones impuestas por el diseño.

El Pendubot comienza en una posición próxima a la posición de equilibrio, manteniendo oscilaciones del orden de los 0.01 alrededor del punto de estabilización deseada, tal y como lo podemos apreciar en la Fig. 2, la velocidad de ambos eslabones también mantiene oscilaciones.

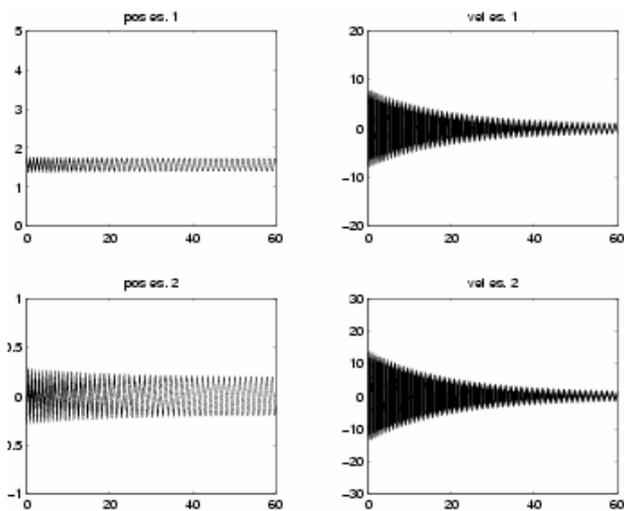


Fig. 2. Estados del sistema

Para eliminar las oscilaciones observadas, se reformulo el planteamiento del controlador, combinando el controlador diseñado con la metodología IDA-PBC con un control LQR, para el que se utilizaron las ganancias $k_{11} = -45.2323$; $k_{22} = -8.2015$; $k_{33} = -44.8021$; $k_{44} = -5.9264$ obteniendo una nueva expresión de control dada por:

$$u = -k_{11} (q_1 - q_1^2) + k_{22} \dot{q}_1 + k_{33} q_2 + k_{44} \dot{q}_2 \quad (53)$$

cuyo desempeño se muestra en la Fig. 3.

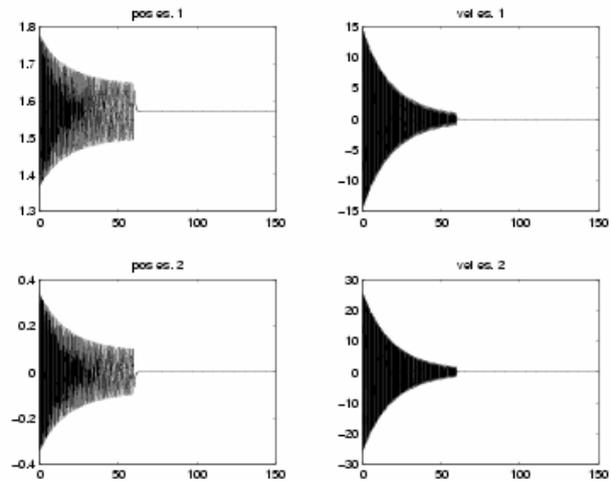


Fig. 3. Estados del sistema con el control combinado

De esta manera se logra mejorar significativamente el rendimiento del controlador diseñado.

8 Conclusiones

Al aplicar la metodología IDA-PBC al sistema subactuado Pendubot se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución, por la envergadura de las mismas debido a la complejidad del modelo, no es posible obtener; por lo cual se propone una reducción del sistema diseñando una ley de control local, la cual presenta pequeñas oscilaciones alrededor del punto deseado. Estas oscilaciones son eliminadas con la intervención de un controlador lineal. En este caso la combinación de ambos enfoques presenta un buen desempeño.

Referencias

Acosta J, Ortega R, Astolfi A y Mahindrakar A, 2005, Interconnection and Damping assignment Passivity-Based Control of mechanical systems with underactuation degree one. IEEE Transaction on Automatic Control. Vol. 50, pp. 1936-1955.

Bloch A, Leonard N, y Marsden J, 2000, Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 45, pp. 2253-2270.

Bloch A, Chang E, Leonard N, y Marsden J, 2001, Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: Potencial Shaping. IEEE Transaction on Automatic Control. Vol. 46, pp. 3913-3917.

Fantoni L, y Lozano R, 2000, Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems, Springer Great Britain.

Gomez-Estern F, Ortega R, Rubio F, y Aracil J, 2001, Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via total energy shaping, in Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Orlando, Fl. Dec, pp. 1137-1143.

Ortega R, Garcia-Canseco E, 2004, Interconnection and

- Damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control*. Vol. 10, pp. 432-450.
- Ortega R, Loria A, Nicklasson P y Sira-Ramirez 1998, H, *Passivity-based Control of Euler Lagrange Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- Ortega R y Spong M, 2000, Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 47, pp. 1218-1233.
- Ortega R, Van der Schaft AJ, Maschke AJ, y Escobar G, 2002, Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems: energy-balancing and passivation, *Automatica*, Vol. 38, pp. 585-596.
- Ortega R, Van der Schaft AJ, Maschke AJ, y Escobar, 2000, Interconnection and damping assignment passivity-based control of port controlled systems, *Automatica*. Vol. 38, pp 585-596.
- Spong M, 1994, Partial Feedback Linearization of underactuated mechanical systems. *Proc. IROS' 94*, Munich Germany, pp 314-321.
- Van der Schaft AJ, 2000, *L2 Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Springer-Verlag, Berlin.

