Artículo de Investigación *Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 31, No. 1, pp. 61-64, diciembre-marzo, 2010. ISSN 1316-7081*

El problema de difusión unidimensional como aplicación del teorema de Duhamel

The one-dimensional diffusion problem as an application of the Duhamel's theorem

Tempo, Ruth[1]; Rujano, José[2] y Torres-Monzón, Carlos[2]
[1] Departamento de Medición y Evaluación. Facultad de Humanidades. ULA
[2]Departamento de Ciencias Térmicas. Facultad de Ingeniería. ULA
Mérida, 5101, Venezuela
ctorres@ula.ve

Recibido: 11-03-2009 Revisado: 13-01-2010

Resumen

En este trabajo se aplica el teorema de Duhamel para resolver el problema de difusión unidimensional con condiciones de borde dependientes del tiempo, con una sola no homogeneidad y condición inicial igual a cero. Existen muchos problemas de la ingeniería donde las condiciones de borde de los problemas de difusión son funciones que dependen del tiempo. El teorema de Duhamel provee una herramienta para el desarrollo de las soluciones del problema unidimensional de difusión con condiciones de borde dependientes del tiempo al relacionarla con la correspondiente solución de un problema auxiliar de difusión simple, y la superposición de la condición de borde dependiente del tiempo.

Palabras clave: Ecuación de difusión, teorema de Duhamel, condiciones de borde.

Abstract

In this paper we apply the Duhamel's theorem for the solution of the one-dimensional diffusion problem with time dependent boundary conditions with only one non-homogeneity and initial condition equal to zero. There are many engineering problems where the boundary conditions are function time dependent. Duhamel's theorem provides a powerful tool to develop solutions for one-dimensional diffusion problems with time depend boundary conditions, when related to the correspond solution of a simple auxiliary problem and the superposition of the time dependent boundary condition.

Key words: Diffusion equation, Duhamel's theorem, boundary conditions.

1 Introducción

Por lo general, el problema en difusión se ocupa de la solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden, que obedece una ley de conservación y una ley constitutiva, con condiciones iniciales y de borde dependientes del tiempo. El problema de difusión unidimensional simple, es un caso particular, con condición inicial igual a cero, y con condiciones de borde independientes del tiempo. Este problema simple puede ser resuelto por varios métodos, entre ellos: separación de variable, desarrollo de Fourier, función de Green entre otros (Logan, 1996). Por otra parte, el teorema de Duhamel permite extender las soluciones del problema de difusión simple cuando las condiciones de borde dependen del tiempo.

Este trabajo se enfocará, en el desarrollo del principio de Duhamel, con la finalidad de obtener la distribución solución del problema de difusión unidimensional con distribución inicial igual a cero, y condiciones de borde dependientes del tiempo, con una sola no homogeneidad. Este método es aplicable a problemas lineales, porque esta basado en el principio de superposición.

2 El principio de Duhamel

El propósito de este principio es mostrar cómo manipulando algebraicamente la transformada de Laplace, se pueden incorporar fenómenos subyacentes en relación con la solución de ecuaciones diferenciales (Farlow, 1993). Este principio tiene interpretación en ecuaciones diferenciales ordinarias, pero aquí se ilustrará en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, específicamente en un problema de difusión con condiciones iniciales y de borde (Bartels *et al*, 1942, y Sneddon, 1951).

Sea R una región en el espacio tridimensional y considérese un problema de difusión no homogéneo en la región R, con condiciones de borde dependiente del tiempo de la forma:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\theta(\boldsymbol{r},t)+g(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial\theta(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} && \text{en la región } R,\ t>0\\
&\frac{\partial\theta(\boldsymbol{r},t)}{\partial n_i}+h_i\,\theta(\boldsymbol{r},t)=\gamma_i(\boldsymbol{r},t) && \text{en la frontera } S_i,\ t>0\\
&\theta(\boldsymbol{r},t)=F(\boldsymbol{r}) && \text{para } t=0 \text{ en la región } R,
\end{aligned} \tag{1}$$

donde $g(\boldsymbol{r},t)$ y $\gamma_i(\boldsymbol{r},t)$ son términos que dependen del tiempo, h_i es un coeficiente constante, $\boldsymbol{r}$ en R y $\partial\theta/\partial n_i$ es la parcial de $\theta(\boldsymbol{r},t)$ con respecto a la normal exterior de la superficie S_i, y $F(\boldsymbol{r})$ es la condición inicial en R. Entonces, el teorema de Duhamel relaciona la solución $\theta(\boldsymbol{r},t)$ del problema (1), a la solución del problema auxiliar $w(\boldsymbol{r},t,\sigma)$ usando la siguiente expresión integral:

$$\theta(\boldsymbol{r},t)=F(\boldsymbol{r})+\int_0^t\frac{\partial w(x,t-\sigma,\sigma)}{\partial t}d\sigma, \tag{2}$$

donde w es la solución del problema auxiliar:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 w(\boldsymbol{r},t,\sigma)+g(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial w(\boldsymbol{r},t,\sigma)}{\partial t} && \text{en la región } R,\ t>0\\
&\frac{\partial w(\boldsymbol{r},t,\sigma)}{\partial n_i}+h_i\,w(\boldsymbol{r},t,\sigma)=\gamma_i(\boldsymbol{r},\sigma) && \text{en la frontera } S_i,\ t>0\\
&w(\boldsymbol{r},t,\sigma)=F(\boldsymbol{r}) && \text{para } t=0 \text{ en la región } R.
\end{aligned} \tag{3}$$

3 Teorema de Duhamel para el caso unidimensional con una sola no homogeneidad y difusión inicial cero

Se supone ahora el problema de difusión unidimensional Özisik M, 1992, Heat Conduction, John Wiley & Sons., con las siguientes condiciones de borde e iniciales:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t} && 0<x<1 && t>0\\
&-\frac{\partial\theta}{\partial x}=\gamma(t) && x=0 && t>0\\
&\frac{\partial\theta}{\partial x}=0 && x=1 && t>0\\
&\theta=0 && t=0 && 0\le x\le 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Por el teorema de Duhamel anteriormente enunciado, se puede determinar la solución del problema considerado si se determina primero la solución de la versión simple, esto es:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial t} && 0<x<1 && t>0\\
&-\frac{\partial w}{\partial x}=1 && x=0 && t>0\\
&\frac{\partial w}{\partial x}=0 && x=1 && t>0\\
&\theta=0 && t=0 && 0\le x\le 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

El problema (5) puede ser resuelto aplicando separación de variables o transformada de Laplace. Al aplicar transformada de Laplace al problema (5), resulta la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2W}{dx^2}-sW(x)=0\\
&\frac{dW}{dx}(0)=-\frac{1}{s}\\
&\frac{dW}{dx}(1)=0.
\end{aligned} \tag{6}$$

La solución del problema (6) es:

$$W(x,s)=\frac{1}{s^{3/2}}\left(e^{-x\sqrt{s}}-e^{-(2-x)\sqrt{s}}\right)\left(1+e^{-2\sqrt{s}}\right)^{-1} \tag{7}$$

La ecuación (7), es invertible expandiendo el último término en una serie binomial y aplicando transformada inversa*:*

$$\begin{aligned}
w(x,t)=&\sqrt{\frac{4t}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{\frac{-(2n+x)^2}{4t}}-(2n+x)\,erfc\left(\frac{2n+x}{2\sqrt{t}}\right)\right]\\
&+\sqrt{\frac{4t}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{\frac{-(2n+2-x)^2}{4t}}-(2n+2-x)\,erfc\left(\frac{2n+2-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{8}$$

Myres, 1976, determinó una solución al problema (5) usando el método de separación de variables, su resultado fue:

$$w(x,t)=t+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{cos(x\pi n)}{(n\pi)^2}\left(1-e^{-t(n\pi)^2}\right)\right] \tag{9}$$

Las ecuaciones (8) y (9), son soluciones del problema (5), y las dos resultan en la misma distribución. Esta distribución puede apreciase para diferentes tiempos en la Fig. 1.

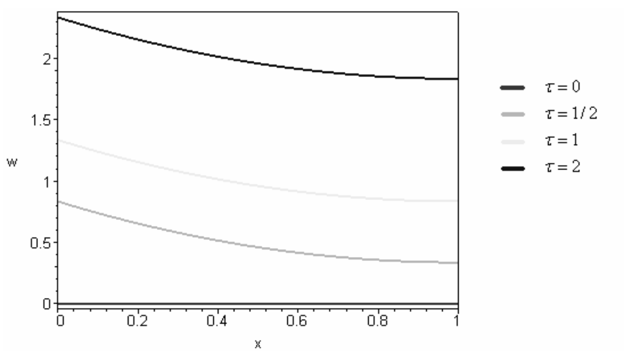

Fig. 1. Solución del problema (5) para diversos tiempos

Ahora, el problema (4) puede ser resuelto mediante la aplicación del teorema de Duhamel, donde la condición inicial es cero, la ecuación (2) se simplifica a:

$$\theta(\mathbf{r},t) = \int_0^t \frac{\partial w(x,t-\sigma,\sigma)}{\partial t} d\sigma = \int_0^t \gamma(\sigma) \frac{\partial w(x,t-\sigma)}{\partial t} d\sigma \quad (10)$$

4 Resultados

Los resultados numéricos del problema de difusión expuesto en (4), se presentan para tres ejemplos de conducción de calor unidimensional. Los flujos $\gamma(t)$, son aplicados en el extremo izquierdo de una lámina de material conductor y homogéneo, con temperatura inicial uniforme, de una unidad de longitud, y aislada en el extremo derecho (Ver la fig.2). Para generalizar los resultados, el problema se resolvió de manera adimensional (Carslaw y Jaeger, 1959).

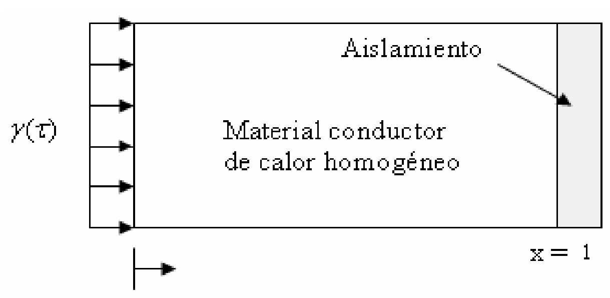

Fig. 2. Problema de conducción de calor unidimensional

Las figuras 3, 4 y 5 muestran la solución del problema de difusión para varios tiempos y tres condiciones de frontera $\gamma(t) = t$, $\gamma(t) = e^t \cos(t)$, y $\gamma(t) = e^t$ respectivamente.

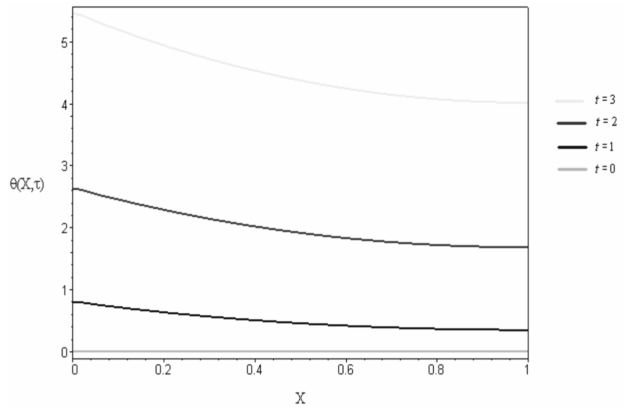

Fig. 3. Solución del problema de conducción con un flujo $\gamma(t) = t$ en el extremo izquierdo

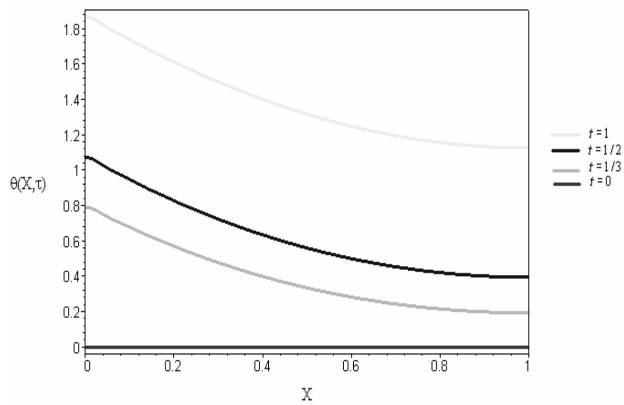

Fig. 4. Solución del problema de conducción con un flujo $\gamma(t) = e^t \cos(t)$ en el extremo izquierdo

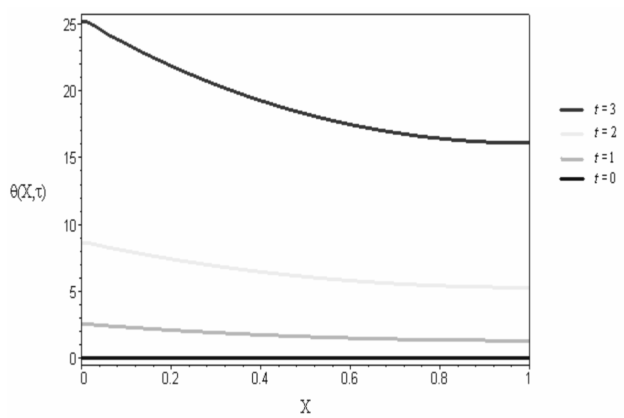

Fig. 5. Solución del problema de conducción con un flujo $\gamma(t) = e^t$ en el extremo izquierdo

Para las diferentes condiciones de frontera aplicadas, las distribuciones de temperatura obtenidas mediante la ecuación 10 (figs. 3,4 y 5), varían notablemente. El flujo de calor aplicado al extremo izquierdo de la lamina, gobierna el procesó de adición de energía. También se observa el incremento de temperatura con el tiempo para toda la lámina, en todas las condiciones de frontera aplicadas. Esto se debe a que el flujo de calor en el extremo derecho se fijo igual a cero, y por tanto, la energía suministrada en el extremo izquierdo, debe ser almacena en la lámina en forma de temperatura. A mayor velocidad del flujo de calor en el extremo izquierdo, más rápidamente se incrementara la temperatura en el interior de la lámina.

5 Conclusiones

El teorema de Duhamel provee una poderosa herramienta en el desarrollo de la solución del problema de difusión con condiciones de borde dependiente del tiempo, relacionando la misma con la correspondiente solución de un problema donde las condiciones de borde son independientes del tiempo. De esta manera, muchos problemas de ingeniería que conducen a ecuaciones de difusión con condiciones de borde dependientes del tiempo pueden ser resueltos.

Referencias

Bartels R, y Churchill R, 1942, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 48, pp. 276-282.

Carslaw H, y Jaeger J, 1959, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, London.

Farlow S, 1993, Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Dover, New York.

Logan J, 1996, Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York.

Myers G, 1976, Analytical Methods in Conduction Heat Transfer, McGraw-Hill, New York.

Özisik M, 1992, Heat Conduction, John Wiley & Sons.

Sneddon IN, 1951, Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.