

Modelado de una tubería para simular obstrucciones

Pipeline modeling to simulate blockages

Guillén Peña, Marcos Leonel^{1*}; Dulhoste Vivien, Jean François¹; Gildas Besançon².

¹ Grupo Termofluidodinámica. Dpto. de Ciencias Térmicas. Escuela de Ing. Mecánica. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

² Département Automatique, GIPSA-lab. Instituto Politécnico de Grenoble. Saint-Martin d'Heres, Francia.

*guillenmarcos2014@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta el modelado matemático de una tubería para simular obstrucciones. Inicialmente, se muestra el modelado matemático de fallas en una tubería, específicamente las obstrucciones. Este modelado se muestra de tres formas: obstrucción puntual, tramo obstruido, fenómeno de contracción y expansión. Luego, se presentan dos modelos matemáticos de la tubería, los cuales se obtienen con la discretización de las ecuaciones del Golpe de Ariete (Water Hammer Equations). El primer modelo, se obtiene discretizando las ecuaciones con el Método de Colocación. Aquí, se divide en dos partes la tubería, y estas se unen por la ecuación que modela matemáticamente la obstrucción que se está presentando. Luego, se muestra el segundo modelo de tubería, el cual se obtiene con el Método de Diferencias Finitas, utilizando la misma idea del primer modelo (dividir la tubería en dos partes). Por último, se muestran los resultados de la simulación de diferentes porcentajes de obstrucción, en cada uno de los modelos.

Palabras clave: Modelado de fallas, Modelado de obstrucciones, Método colocación, Método diferencias finitas, Simulación de obstrucciones.

Abstract

This paper presents the pipeline mathematical modeling to simulate blockages. Initially, the pipeline faults mathematical modeling specifically blockages are shown. This modeling is shown in three ways: partial blockage, blocked section, contraction and expansion phenomenon. Then, two pipeline mathematical models are presented, which are obtained with the Water Hammer Equations discretization. The first model is obtained by discretizing equations with the Collocation Method. Here, the pipe is divided into two parts, and these are joined by equation that mathematically models the blockage that is presenting in pipe. After that, the second pipeline model is shown, which is obtained with the Finite Difference Method, using same idea of the first model (pipeline divided in two parts). Finally, simulation results for different percentages blockage in each of models are shown.

Keywords: Fault modeling, Blockage modeling, Collocation method, Finite difference method, Blockage simulation.

1. Introducción

Las obstrucciones son un problema común en las redes de tuberías (sistemas de transporte de fluidos), ya sea en las industrias de energía, química, petróleo, agua, etc. Una obstrucción puede formarse por medios químicos, físicos, ubicación de depósitos o algún tipo de negligencia como el cierre parcial de una válvula. Estas reducen la eficiencia operativa de un sistema de tuberías, pero también pueden causar graves daños en la seguridad de estos (Guillen, 2016). Cuando una tubería está sometida a una obstrucción, el funcionamiento de la misma se ve perturbado, pudiéndose generar aumento de la energía requerida para el funcionamiento de la misma. Como consecuencia se produce una disminución de la calidad del servicio prestado por la tubería, e incluso se podría producir una ruptura brusca, por aumento excesivo de la presión. Las razones descritas anteriormente, crean una motivación para el estudio de las obstrucciones y adicionalmente extiende el interés en desarrollar sistemas de detección y localización de obstrucciones. Existen diversas investigaciones en esta área, entre las cuales podemos hacer referencias a algunas: (Wang y col., 2005; Lee y col., 2008; Ma y col., 2007; Guillén y col., 2014), otras más recientes serían: (Gurav y col., 2020; Wu y col., 2022; Datta y col., 2016). En el presente trabajo se va modelar un tipo particular de fallas en las tuberías, en específico obstrucciones, y con este modelado, desarrollar dos modelos de tubería que permitan simular el comportamiento de una tubería cuando se presenta una obstrucción.

2. Modelado de la Tubería a través de las Ecuaciones de Golpe de Ariete

Las ecuaciones del golpe de ariete son el modelo clásico que describe los fenómenos no estacionarios en una tubería para un flujo de fluido incompresible (Souza y col., 2000; Chaudry, 2014). Estas corresponden a un par de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales (Steven y col., 1988), que representan la ecuación de continuidad y la ecuación de momento en una tubería, que pueden resumirse como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + g \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} + J(Q(z, t)) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

z denota la coordenada espacial unidimensional [m],

t es el tiempo [s],

$H(z, t)$ carga de presión [m],

$Q(z, t)$ flujo en la tubería [m³/s],

A área de sección transversal de la tubería [m²],

g aceleración de gravedad [m/s²],

c velocidad de la onda de presión [m/s], y

J las pérdidas por fricción que afectan a la dinámica del fluido dentro de la tubería.

Clásicamente, J se expresa bajo forma estacionaria dada por:

$$J = J_s = \frac{fQ|Q|}{2DA^2} \quad (2)$$

Donde f corresponde al coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach.

2.1 Modelado de la Fricción

En la mayoría de los enfoques de detección y localización de fallas en tuberías, basados en modelos, este coeficiente f se considera una constante, aunque a veces se actualiza cuando se detecta una fuga o una obstrucción (fallas en tuberías). Pero en realidad, se sabe que este coeficiente depende del número de Reynolds (Re) y del coeficiente de rugosidad de la tubería (e). La relación implícita de Colebrook (Potter y col., 2002) describe este coeficiente para una tubería de sección circular de diámetro (D) como:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln \left(\frac{1}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (3)$$

Donde el número de Reynolds puede ser calculado como:

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D\mu} \quad (4)$$

ρ es la densidad del fluido y μ es la viscosidad del mismo.

La ecuación (3) no es fácil de implementar, ya que requiere de una serie de iteraciones para el cálculo de f . En (Dulhoste, 2011) se señala que se puede utilizar una aproximación explícita conocida como la ecuación de Swamee-Jain, la cual se escribe de la siguiente manera:

$$f = 1.325 \left\{ \ln \left[0.27 \left(\frac{e}{D} \right) + 5.74 \left(\frac{1}{Re} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \quad (5)$$

Esta ecuación es válida para $10^{-8} < e/D < 0.01$ y $5000 < Re < 10^8$.

Para un modelado más completo de la fricción, se pueden adicionar algunas pérdidas por fricción no estacionarias J_u (conocidas como $J = J_s + J_u$ en la ecuación (1)), según el modelo siguiente:

$$J_u = \frac{k}{2A} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + c\Phi_A \left| \frac{\partial Q}{\partial z} \right| \right) \quad (6)$$

Donde $\Phi_A = \text{sgn}(Q)$ y k denota el coeficiente de Brunone,

el cual puede calcularse con:

$$k = \sqrt{0.0476}/2 \quad \text{para flujo laminar}$$

$$k = \left(\frac{7.41}{\sqrt{Re \log(14.3/Re^{0.05})}} \right) / 2 \quad \text{para flujo turbulento.} \quad (7)$$

Tomando en consideración los dos términos de pérdidas por fricción, las ecuaciones de la tubería pasan a ser:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{(2+k)} \left(-2gA \frac{\partial H}{\partial z} - c\Phi_A k \left| \frac{\partial Q}{\partial z} \right| - \frac{fQ|Q|}{DA} \right) \quad (8)$$

donde los coeficientes f y k pueden calcularse en cualquier instante de tiempo. Si se omiten las pérdidas por fricción no estacionarias, $k = 0$.

En (Dulhoste, 2011) se demuestra que para la Detección y Aislamiento de Fugas (LDI) la mejor formulación es el uso de un coeficiente de fricción variable sin pérdidas no estacionarias. El modelo con un coeficiente de fricción constante está limitado a aplicaciones de flujo casi constante, y por lo tanto no se recomienda para sistemas reales, mientras que la formulación no estacionaria hace la estructura LDI más compleja, sin mejorar significativamente las estimaciones de fugas. Por este motivo, en este trabajo utilizaremos la formulación recomendada, y no se tomara en cuenta las pérdidas no estacionarias. De manera concreta, se utilizarán las ecuaciones (9):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -gA \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{fQ|Q|}{2DA} \quad (9)$$

3. Modelos de Fallas en una Tubería

Concretamente en una tubería se pueden presentar dos tipos de fallas, las cuales son: fugas y obstrucciones. En este trabajo se presenta solamente el modelado de obstrucciones; estudios referentes al modelado de fugas pueden ser vistos en (Guillén y col., 2015).

3.1 Modelado de Obstrucciones

En este trabajo se presentan tres posibles formas en que puede ser modelada una obstrucción en una tubería (Guillen, 2016). Las tres formas de modelado son las siguientes:

3.1.1 Modelado de una Obstrucción Puntual

Una obstrucción puntual puede modelarse tal como se modela una placa orificio (Chaudry, 2014); en un punto específico z_o hay algo que reduce el área de flujo, como

ocurre con una placa orificio. Cuando se produce una obstrucción puntual en una posición z_o se produce un cambio en la presión H_i (segunda ecuación de (9)).

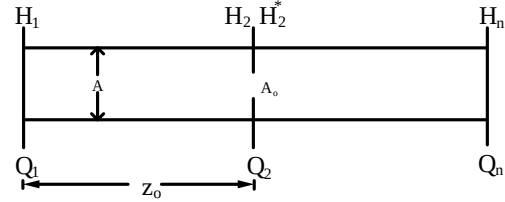


Fig. 1. Obstrucción puntual. (Partial blockage).

La Fig. 1 muestra un esquema de una tubería dividida en dos secciones. En esta figura, la obstrucción se presenta en la zona central, la presión H_2 sufre un cambio en su valor y ahora va a cambiar a H_2^* . Si se aplica la ecuación de Bernoulli en conjunto con la ecuación de Continuidad, entre el punto 2 (justo antes de la obstrucción) y el punto 2^* (justo después de la obstrucción), se obtiene una expresión que relaciona los caudales, las presiones y por supuesto los cambios de áreas que son los que representan la obstrucción.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre H_2 y H_2^* quedaría:

$$H_2 + \frac{(V_2)^2}{2g} + z_2 + h_w - h_L = H_2^* + \frac{(V_2^*)^2}{2g} + z_2^* \quad (10)$$

Donde H es la altura o carga de presión del fluido, V es la velocidad del fluido, ρ es la densidad del fluido, z es la cota a la que se encuentran los puntos 2 y 2^* , h_w representa los aportes de energía en el tramo por bombas o turbinas, y h_L representa las pérdidas en el tramo. Como las cotas z_2 y z_2^* son iguales, y los aportes de energía por bombas y/o turbinas no existen (en este caso son cero), entonces se obtiene:

$$H_2 + \frac{(V_2)^2}{2g} - h_L = H_2^* + \frac{(V_2^*)^2}{2g} \quad (11)$$

Igualmente, por continuidad (conservación de la masa) se tiene que:

$$\rho_2 V_2 A = \rho V_2^* A_o \quad (12)$$

Donde A es el área de la sección transversal de la tubería y A_o es el área de sección transversal de la obstrucción. Por lo cual, $V_2^* = \frac{V_2 A}{A_o}$, utilizando la expresión (11) junto con (12) obtenemos:

$$H_2^* = H_2 + \frac{(V_2)^2}{2g} \left(1 - \left(\frac{A}{A_o} \right)^2 \right) - h_L \quad (13)$$

Ahora expresándolo en función del flujo volumétrico $Q_2 =$

$V_2 A$:

$$H_2^* = H_2 + \frac{Q_2^2}{2gA^2} \left(1 - \left(\frac{A}{A_o} \right)^2 \right) - h_L \quad (14)$$

El término h_L que representa las pérdidas de presión, es difícil de obtener analíticamente, ya que, es función del caudal y de las condiciones geométricas del flujo, vale decir, de la geometría de la obstrucción, por lo cual, para efectos prácticos en el caso de una placa de orificio, suele sustituirse por un coeficiente de descarga C_d , el cual representa en el cálculo del caudal que:

$$Q_R = C_d Q \quad (15)$$

Lo que quiere decir que debido a las pérdidas, el caudal real Q_R será inferior al caudal teórico Q . Entonces, corrigiendo el valor teórico Q al multiplicarlo por el coeficiente C_d , se puede suprimir el término de sustracción h_L . De esta forma la expresión (14) se reescribe como:

$$H_2^* = H_2 + \frac{Q_2^2}{2gC_d A^2} \left(1 - \left(\frac{A}{A_o} \right)^2 \right) \quad (16)$$

Tanto el coeficiente de descarga C_d como el término de pérdidas h_L , requieren información adicional para determinar su valor. Esta información adicional podría ser por ejemplo, la forma y la longitud de los cambios de geometría, por lo tanto, para este trabajo y sus correspondientes simulaciones se tomará un $C_d = 1$, lo cual es equivalente a un $h_L = 0$, por tanto, no se consideran las pérdidas de presión. Dicho de otra forma, se está haciendo una aproximación, con el objeto de simplificar la presentación de las ecuaciones. Esta simplificación implica, que el valor de la obstrucción obtenida no será exacto, sino que se obtendrá una obstrucción de la tubería más grande, o lo que es lo mismo un área de obstrucción (área de paso del flujo) más pequeña que la real.

En un caso real, se podrían utilizar métodos para determinar un valor aproximado de la pérdida y obtener un valor de obstrucción más cercano al real, pero esto no cambiaría en nada la metodología presentada en este trabajo.

3.1.2 Modelado de un Tramo Obstruido

Esta es la segunda forma en que se modela una obstrucción. En el modelado de un tramo obstruido se contempla la reducción del área de sección transversal de la tubería en una longitud que se denomina l_o . La tubería se divide en tres secciones para definir una sección "central", que es donde se presenta la obstrucción y, en donde ésta, puede abarcar una longitud l_o grande o pequeña.

En la Fig. 2, se puede ver un esquema de la tubería. La obstrucción está representada por el achurado tal como se

muestra a continuación:

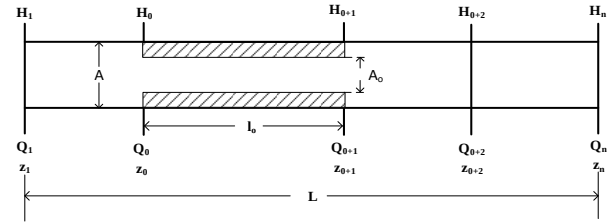


Fig. 2. Tramo obstruido.
(Blockaged pipe section).

Para modelar matemáticamente la obstrucción, se sustituye el área de sección transversal A de la tubería, por un área reducida en un cierto porcentaje del área A , es decir, el área de obstrucción es A_o y corresponde a un porcentaje del área A ; por lo tanto, de acuerdo a como está dividida la tubería las siguientes ecuaciones deben ser acopladas al resto de ecuaciones del modelo de la tubería:

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= -\frac{c^2}{gA_o} \frac{Q_{0+1} - Q_0}{l_o} \\ \dot{Q}_{0+1} &= -A_o g \frac{H_{0+1} - H_0}{l_o} - \frac{f_{0+1}}{2DA_o} Q_{0+1} |Q_{0+1}| \\ \dot{H}_{0+1} &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_{0+2} - Q_{0+1}}{z_{0+2} - z_{0+1}} \\ \dot{Q}_{0+2} &= -Ag \frac{H_{0+2} - H_{0+1}}{z_{0+2} - z_{0+1}} - \frac{f_{0+2}}{2DA} Q_{0+2} |Q_{0+2}| \end{aligned} \quad (17)$$

En el sistema (17) se observa como en la expresión $\dot{H}_0$ y $\dot{Q}_{0+1}$ se ha sustituido el valor del área A por el valor de la obstrucción A_o .

3.1.3 Modelado de la Obstrucción considerando el Fenómeno de Contracción y Expansión

Este es el tercer modelo, el cual de alguna manera está basado en el modelo de un tramo obstruido. Aquí se toma en cuenta los dos fenómenos que ocurren en los dos bordes (o extremos del tramo obstruido), donde al principio, existe una contracción en la sección transversal de la tubería (desde A hasta A_o) y luego, al final del tramo obstruido ocurre una expansión (desde A_o hasta A), tal como se muestra en la Fig. 3.

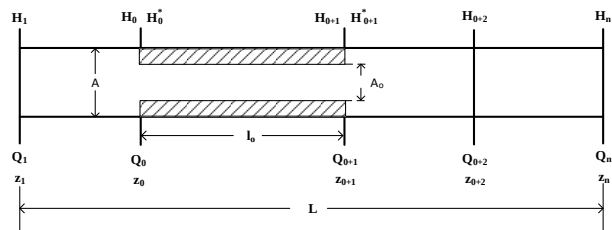


Fig. 3. Fenómeno de contracción y expansión.
(Contraction and expansion phenomenon).

Las ecuaciones (18) describen la dinámica de las presiones y

de los flujos antes de la obstrucción (H_0 y Q_{0+1}) y después de la misma (H_{0+1} y Q_{0+2}).

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_{0+1} - Q_0}{l_o} \\ \dot{Q}_{0+1} &= -Ag \frac{H_{0+1} - H_0^*}{l_o} - \frac{f_{0+1}}{2DA} Q_{0+1} |Q_{0+1}| \\ \dot{H}_{0+1} &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_{0+2} - Q_{0+1}}{z_{0+2} - z_{0+1}} \\ \dot{Q}_{0+2} &= -Ag \frac{H_{0+2} - H_{0+1}^*}{z_{0+2} - z_{0+1}} - \frac{f_{0+2}}{2DA} Q_{0+2} |Q_{0+2}| \end{aligned} \quad (18)$$

Donde H_0^* y H_{0+1}^* son las presiones antes y después de la obstrucción respectivamente; éstas se calculan utilizando la ecuación de Bernoulli y continuidad tal como se hizo en la sección 3.1.1 (Modelado de una Obstrucción Puntual) quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_0^* &= H_0 + \frac{Q_0^2}{2gA^2} \left[1 - \left(\frac{A}{A_o} \right)^2 \right] \\ H_{0+1}^* &= H_{0+1} + \frac{Q_{0+1}^2}{2gA_o^2} \left[1 - \left(\frac{A_o}{A} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Luego, las ecuaciones (19) se sustituyen en (18), para de esta manera obtener un modelo de tubería que representa el fenómeno de contracción y expansión que se está presentando debido a la obstrucción.

4. Discretización espacial para Q y H

Las ecuaciones (9) son conocidas como la forma simplificada de las ecuaciones gobernantes para flujo transitorio en conductos cerrados, y representan un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales e hiperbólicas, que no tienen solución exacta. Estas ecuaciones se resuelven habitualmente utilizando algún método numérico. Existen varios métodos para obtener una solución a este tipo de sistemas. Uno de los más utilizados es el método de diferencias finitas (debido a su simplicidad para el modelado unidimensional); este método ha sido utilizado en la de detección y localización de fugas en tuberías (Torres y col., 2008; Torres y col., 2011; Besancon y col., 2007). Asimismo, existe otro método, poco utilizado en sistemas hidráulicos, que también tiene la ventaja de ser simple y adecuado para simulaciones unidimensionales; este es el Método de Colocación (Villadsen y col., 1995; Fletcher, 2006).

En el presente trabajo se muestra la discretización de las ecuaciones del golpe de ariete mediante el Método de Colocación, con el fin de obtener un modelo de tubería, que permita realizar simulación de obstrucciones.

4.1 Discretización por el Método de Colocación

El método de colocación, es un método de solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno. Este método resuelve discretamente ecuaciones diferenciales parciales, buscando una solución aproximada lo suficientemente confiable.

Este método pertenece a un grupo de métodos conocidos como Métodos de los Residuos Ponderados (siglas en ingles MWR), y cuyo principio consiste en aplicar a puntos particulares del dominio residuos ponderados, donde se aproxima el valor de la ecuación diferencial, a los valores obtenidos por una función, que generalmente tiene forma polinómica (Fletcher, 2006).

En el método de colocación las funciones de ponderación son de la forma:

$$W_k(z) = \delta(z - z_k) \quad (20)$$

Donde δ es la función impulso o delta de Dirac y $z_1, \dots, z_n$ son las coordenadas de los puntos de colocación que se distribuyen en el dominio. Esto implica que las funciones de forma (o de prueba) se evalúan solo en cada punto de colocación, pues para el resto del dominio las funciones de ponderación en forma de delta de Dirac hacen que el residuo sea cero.

Un punto importante de señalar con relación a este método, es la elección de los puntos de colocación. En (Villadsen y col., 1995) se mostró que cuando los puntos de colocación son colocados en las raíces de los polinomios ortogonales como por ejemplo los de Jacobi o Legendre, el método produce resultados con mayor precisión. Cuando esto sucede el método se llama "Método de Colocación Ortogonal". Igualmente, se señala que el método de colocación ortogonal puede ser visto como un método análogo-discreto del método de Galerkin. Sus pruebas muestran que tiene una precisión casi igual al método de Galerkin. Sin embargo, el método de colocación es más sencillo de implementar.

4.2 Aplicación del Método de Colocación a las Ecuaciones de Golpe de Ariete

El Método de Colocación aplicado a las ecuaciones de golpe de ariete consiste en realizar una aproximación de la sección a modelar mediante una función de polinomios $N_j(z_i)$, evaluados en los puntos de colocación (z_i). Para ello se debe escoger un número n de puntos de colocación y por cada punto se puede hacer la siguiente aproximación:

$$H_a(z_i, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t) N_j(z_i) \quad (21)$$

$$Q_a(z_i, t) = \sum_{j=1}^n Q_j(t) N_j(z_i) \quad (22)$$

Donde:

$\bar{Q} = \{Q_j(t)\}$ y $\bar{H} = \{H_j(t)\}$ son los coeficientes a calcular.

$N_j(z)$ denotan las funciones de forma elegidas, las cuales son evaluadas en z_i .

H_a y Q_a son los valores aproximados de las variables, los cuales simplificando la notación podemos escribir de la siguiente manera:

$$H_a(z_i, t) = H_{ai}, Q_a(z_i, t) = Q_{ai}, H_j(t) = H_j \text{ y } Q_j(t) = Q_j$$

Ahora, escribiendo las ecuaciones de Golpe de Ariete (9) en función de los valores aproximados de las variables, para cada uno de los puntos de colocación seleccionados, se generará un residuo, ya que al ser valores aproximados la igualdad a cero no se cumple exactamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{ai}}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q_{ai}}{\partial z} &= R_1(z_i, \bar{H}, \bar{Q}) \\ \frac{\partial Q_{ai}}{\partial t} + Ag \frac{\partial H_{ai}}{\partial z} + \frac{f}{2DA} Q_{ai}^2 &= R_2(z_i, \bar{H}, \bar{Q}) \end{aligned} \quad (23)$$

para $i = 1, \dots, n$

Donde $R_1(z_i, \bar{H}, \bar{Q})$ y $R_2(z_i, \bar{H}, \bar{Q})$ representan el valor de los residuos.

Para que las ecuaciones aproximadas representen correctamente las ecuaciones exactas, los residuos deben ser lo más cercano posible a cero. En el sistema (23) obtenemos dos ecuaciones con dos incógnitas $\bar{H}$ y $\bar{Q}$, para cada punto de colocación:

$$\begin{aligned} R_1(x_i, \bar{H}, \bar{Q}) &= 0 \\ R_2(x_i, \bar{H}, \bar{Q}) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (23) obtenemos una forma aproximada de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{ai}}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q_{ai}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial Q_{ai}}{\partial t} + Ag \frac{\partial H_{ai}}{\partial z} + \frac{f}{2DA} Q_{ai}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Los términos $N_j(z_i)$ dependen solo de z_i y los coeficientes H_j y Q_j dependen solamente de t . Es posible entonces

simplificar la ecuación mediante la derivación de los términos correspondientes, siendo los términos $N_j(z_i)$ constantes una vez que se introducen los puntos de colocación para una función de forma dada, por lo tanto, es posible escribir una matriz N_{ji} de valores constantes y de igual manera para las derivadas con respecto a z en la matriz N'_{ji} , tal como:

$$\begin{aligned} [N_{ji}]_{1 \leq i, j \leq n} &= \begin{bmatrix} N_1(x_1) & N_1(x_2) & \dots & N_1(x_n) \\ N_2(x_1) & N_2(x_2) & \dots & N_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n(x_1) & N_n(x_2) & \dots & N_n(x_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Las derivadas con respecto de z de la función de forma, evaluadas en z_i , son los elementos de la siguiente matriz:

$$\begin{aligned} [N'_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} &= \left[\frac{\partial N_{ij}}{\partial z}(z_i) \right] \\ &= \begin{bmatrix} N'_1(z_1) & N'_1(z_2) & \dots & N'_1(z_n) \\ N'_2(z_1) & N'_2(z_2) & \dots & N'_2(z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N'_n(z_1) & N'_n(z_2) & \dots & N'_n(z_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Por otro lado, las derivadas espaciales y temporales de las sumatorias (21) y (22) son expresadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial z} &= H_j(t) N'_{ji}; \quad \frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial z} = Q_j(t) N'_{ji} \\ \frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial t} &= \dot{H}_j(t) N_{ji}; \quad \frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial t} = \dot{Q}_j(t) N_{ji} \end{aligned} \quad (28)$$

Entonces, con la sustitución de (28) en las ecuaciones de derivadas parciales, el nuevo sistema se puede escribir como:

$$\sum_{j=1}^n \dot{H}_j(t) N_{ji}(z_i) = -\frac{c^2}{gA} \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji}(z_i) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \dot{Q}_j(t) N_{ji}(z_i) &= -Ag \sum_{j=1}^n H_j N'_{ji}(z_i) \\ &\quad - \frac{f}{2DA} \left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji}(z_i) \right)^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Se ha transformado un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales, con dos incógnitas, en un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias con $2n$ incógnitas, siendo n el número de puntos de colocación. Ahora este nuevo sistema puede resolverse con un método tradicional de ecuaciones diferenciales.

Para implementar el método de colocación hay dos cosas a tomar en cuenta: Las funciones de forma y las condiciones

de frontera.

La selección de las funciones de forma, está sujeta a una única condición, la cual es, que el conjunto de funciones sean linealmente independientes. Sin embargo, en la práctica resulta interesante utilizar funciones que puedan facilitar los cálculos, lo que permite la obtención de una solución más precisa y robusta.

Para alcanzar los objetivos planteados anteriormente, podemos seleccionar las funciones de interpolación de Lagrange como funciones de forma. El interés en las funciones de aproximación de Lagrange, es obtener los coeficientes $H_j(t)$ y $Q_j(t)$ correspondientes a los valores físicos de las presiones y del flujo en los puntos de colocación.

Dado un conjunto de puntos de colocación $x_i, \dots, x_n$ las funciones de forma se construyen con la siguiente recurrencia:

$$N_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{z - z_i}{z_j - z_i} \quad (31)$$

Desarrollando la recurrencia (31):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_{n-1})(z - z_n)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_{n-1})(z_1 - z_n)} \\ N_2 &= \frac{(z - z_1)(z - z_3) \dots (z - z_{n-1})(z - z_n)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \dots (z_2 - z_{n-1})(z_2 - z_n)} \\ &\vdots \\ N_n &= \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-2})(z - z_{n-1})}{(z_n - z_1)(z_n - z_2) \dots (z_n - z_{n-2})(z_n - z_{n-1})} \end{aligned} \quad (32)$$

0

Este tipo de funciones de forma presenta la ventaja de producir valores de 1 (uno) para la variable con el índice correspondiente al punto de colocación y 0 (cero) para los otros valores, es decir:

$$N_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (33)$$

Por tanto, la matriz $[N_{ji}] = I$ cuando $j = i$. Así, las ecuaciones (29) y (30) se simplifican y se convierten en:

$$\dot{H}_i = -\frac{c^2}{gA} \sum_{j=1}^n Q_j N'_{ji}(z_i) \quad (34)$$

$$\dot{Q}_i = -Ag \sum_{j=1}^n H_j N'_{ji}(z_i) - \frac{f}{2DA} \left(\sum_{j=1}^n Q_j N_{ji} \right)^2 \quad (35)$$

La Fig. 4 muestra un esquema para la discretización de las ecuaciones de golpe de ariete. En este esquema se puede observar que para cada punto de colocación corresponden un valor de presión y un valor de caudal. Por otro lado, el número de ecuaciones para las presiones $H_j(t)$ y los caudales $Q_j(t)$ dependen de las condiciones de frontera empleadas.

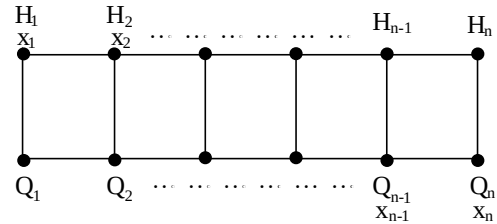


Fig. 4. Discretización por el Método de Colocación. (Collocation Method Discretization).

Existe la posibilidad de utilizar un número diferente de puntos de colocación, tanto para las presiones como para los caudales. Igualmente, se pueden seleccionar diferentes posiciones para cada uno de los puntos de colocación (ya sean H o Q). En este trabajo, se utilizan igual número de puntos de colocación para las presiones y los caudales. También, la posición en la que se van a colocar estos puntos de colocación va a ser la misma para ambas variables (H y Q).

Para ello definimos lo siguiente:

z_i^H	punto para la presión
z_i^Q	punto para el caudal
N_{ji}^H	Función de forma para el punto z_i^H
N_{ji}^Q	Función de forma para el punto z_i^Q

Aquí presentamos sólo el caso de igual número de puntos de colocación para presiones y caudales. Además, la posición en la que se colocan los puntos de colocación va a ser la misma para ambas variables. En este caso $z_i^H = z_i^Q = Z_i$ y $N_{ji}^H = N_{ji}^Q = N_{ji}$.

5. Modelos de tuberías Diseñados

A continuación, se mostrará en detalle la aplicación de los métodos de discretización y cada uno de los modelos obtenidos.

5.1 Modelo de Tubería por el Método de Colocación utilizando los puntos de Presión y Flujo

En este primer modelo la tubería se divide en dos partes, una primera parte antes de la obstrucción y una segunda parte después de la misma. Cada una de estas partes consta de dos secciones de tubería, en donde se utilizan 3 puntos de

tubería. Entonces de las ecuaciones (34) y (35) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_1 &= -\frac{c^2}{gAz}(-3u_1 + 4Q_2 - Q_3) \\
 \dot{Q}_2 &= -\frac{Ag}{z}(-H_1 + H_3) - \frac{f}{2DA}Q_2^2 \\
 \dot{H}_2 &= -\frac{c^2}{gAz}(-u_1 + Q_3) \\
 \dot{Q}_3 &= -\frac{Ag}{z}(H_1 - 4H_2 + 3H_3) - \frac{f}{2DA}Q_3^2 \\
 \dot{H}_3 &= -\frac{c^2}{gA(L-z)}(-3Q_3 + 4Q_4 - Q_5) \\
 \dot{Q}_4 &= -\frac{Ag}{(L-z)}(-H_3^* + u_2) - \frac{f}{2DA}Q_4^2 \\
 \dot{H}_4 &= -\frac{c^2}{gA(L-z)}(-Q_3 + Q_5) \\
 \dot{Q}_5 &= -\frac{Ag}{(L-z)}(H_3^* - 4H_4 + 3u_2) \\
 &\quad - \frac{f}{2DA}Q_5^2
 \end{aligned} \quad (44)$$

El caudal Q_3^* , es el caudal Q_3 pero afectado por los efectos de la obstrucción. La presión H_3^* , es la presión o la ecuación que une las dos partes de la tubería. En esta ecuación se contempla la obstrucción parcial que se está presentando, la cual se modela como una obstrucción puntual y cuyo modelo es el siguiente:

$$H_3^* = H_3 - \frac{Q_3^2}{2gA_o^2} \left(1 - \left(\frac{A_o}{A} \right)^2 \right) \quad (45)$$

Donde: A es el área de sección transversal de la tubería y A_o es el área de la obstrucción.

La entrada $u_1 = Q_1$ es función de los parámetros de la bomba y de la restricción hidráulica de entrada R_{ent} :

$$Q_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4(R_{ent} + C_0)(-C_2 + H_1 - H_{ent})}}{2(R_{ent} + C_0)} \quad (46)$$

La entrada $u_2 = H_5$ se basa en la restricción de la salida R_{sal} (ver Fig. 5):

$$u_2 = R_{sal}Q_5^2 + H_{atm} \quad (47)$$

5.2 Modelo de Tubería por Diferencias Finitas desarrollado en dos Partes

Aquí se presenta el segundo modelo de tubería, donde las ecuaciones del golpe de ariete se discretizan con el método de diferencias finitas, pero usando la misma idea que se utilizó con el método de colocación (dividir la tubería en dos partes).

Concretamente, el modelo tiene dos tramos de tubería antes

y después de la obstrucción (como se muestra en la Fig. 5). Cada uno de estos dos tramos de tubería, está unido por una ecuación, la cual, contempla la obstrucción puntual que se presenta en la tubería, pero el cálculo de presiones (H_i) y caudales (Q_i), se realiza mediante el método de diferencias finitas:

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_1 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_2 - u_1}{z_2 - z_1} \\
 \dot{Q}_2 &= -Ag \frac{H_2 - H_1}{z_2 - z_1} - \frac{f_2}{2DA} Q_2^2 \\
 \dot{H}_2 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_3 - Q_2}{z_3 - z_2} \\
 \dot{Q}_3 &= -Ag \frac{H_3 - H_2}{z_3 - z_2} - \frac{f_3}{2DA} Q_3^2 \\
 \dot{H}_3 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_4 - Q_3}{z_4 - z_3} \\
 \dot{Q}_4 &= -Ag \frac{H_4 - H_3^*}{z_4 - z_3} - \frac{f_3}{2DA} Q_4^2 \\
 \dot{H}_4 &= -\frac{c^2}{gA} \frac{Q_4 - Q_3}{z_4 - z_3} \\
 \dot{Q}_5 &= -Ag \frac{u_2 - H_3^*}{z_4 - z_3} - \frac{f_3}{2DA} Q_5^2
 \end{aligned} \quad (48)$$

Donde H_3^* es la ecuación que une las dos partes de la tubería y está representada por la ecuación (45).

Asimismo, $u_1 = Q_1$ (ecuación (46)) es una función de parámetros de la bomba y la restricción hidráulica de entrada R_{ent} . Del mismo modo, u_2 (ecuación (47)) es una función de restricción hidráulica de salida R_{sal} .

6 Ejemplos de Aplicación

Para ilustrar la aplicación de la metodología, se van a presentar algunos ejemplos de simulación de obstrucciones en una tubería. Estos ejemplos, muestran los dos métodos de discretización.

Para las simulaciones se toman valores numéricos tomados de un prototipo presentado en (Begovich y col., 2012). Los parámetros correspondientes se presentan de forma resumida en la Tabla 1. Las condiciones normales de operación que se consideran son: flujo de entrada $Q_1 = 0.0043 \text{ m}^3/\text{s}$ y presión de salida $H_{ent} = 3.5 \text{ m}$.

Tabla 1. Parámetros de la Tubería.
(Pipeline Parameters).

$g(\text{m/s}^2)$	$c(\text{m/s})$	$A(\text{m}^2)$	$f(\text{s}^{-2})$	$L(\text{m})$
9.81	379.5415	0.0032	0.0223	85

6.1 Ejemplo 1: Método de Colocación

A continuación se presentan los resultados obtenidos en el modelo de tubería discretizado con el método de colocación (44). Con el fin de observar el comportamiento del modelo, al presentarse una obstrucción puntual, se procedió a simular tres distintos porcentajes de obstrucción, en específico, se simuló porcentajes de 75%, 50% y 25% del área de sección transversal A , vale decir: $A_o = 0.25A$ (75%), $A_o = 0.5A$ (50%) y $A_o = 0.75A$ (25%). Los resultados se muestran en la Fig. 6.

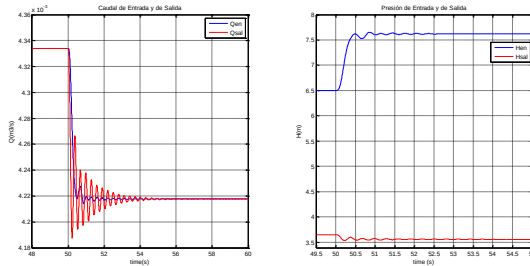


Fig. 6a. Obstrucción de un 75% ($A_o = 0.25A$)

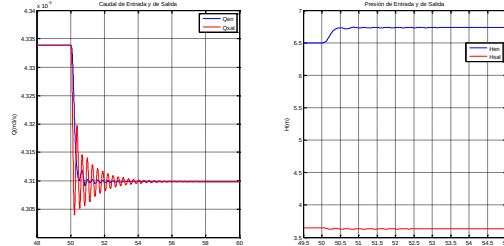


Fig. 6b. Obstrucción de un 50% ($A_o = 0.5A$)

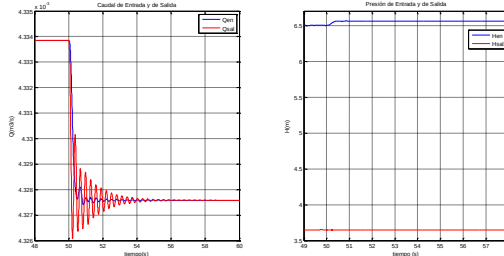


Fig. 6c. Obstrucción de un 25% ($A_o = 0.75A$)

Fig. 6. Simulación de obstrucciones Método de Colocación (Blockages Simulation by Collocation Method).

Cuando en una tubería real se produce una obstrucción, se generan ciertos cambios, tanto en el flujo como en la presión. Específicamente, la obstrucción va a producir una disminución del flujo a lo largo de toda la tubería, un incremento en la presión de entrada, y una disminución de la presión de salida aguas abajo de la obstrucción.

Si se observa la Fig. 6, puede notarse como este primer modelo (44), reproduce estos fenómenos descritos en el párrafo anterior, es decir, se observa que el Q_{sal} así como el Q_{en} , disminuyen por el efecto de la obstrucción, mientras que

la H_{sal} disminuye y la H_{en} aumenta aguas arriba de la obstrucción. En las Fig. 6a a la 6c, puede observarse como esos cambios en los caudales y las presiones, se acentúan a medida que se incrementa el porcentaje de obstrucción de la sección transversal (A). La Fig. 6a, muestra el comportamiento cuando se presenta una obstrucción de un 75% ($A_o = 0.25A$), en esta figura, puede verse que es donde se presenta una mayor reducción de los caudales, y también donde se presenta una mayor disminución de la presión H_{sal} así como un mayor incremento de la presión H_{en} . La Fig. 6c, muestra una obstrucción de un 25% ($A_o = 0.75A$), en esta figura puede observarse que, es en donde la obstrucción afecta menos los cambios de los caudales y las presiones (tanto en los incrementos de los respectivos valores, como en la disminución de los mismos). La Fig. 6b muestra una obstrucción de un 50% ($A_o = 0.5A$), este sería el punto intermedio del comportamiento de los distintos valores de caudales y presiones, y el modelo (44) los reproduce de buena manera.

6.2 Ejemplo 2: Método de Diferencias Finitas en dos Partes

Para el caso del modelo por diferencias finitas en dos partes (48), se realizó una simulación con las mismas características que para el método de colocación, es decir, se simuló obstrucciones que van desde un 75% hasta un 25% (punto intermedio un 50% de obstrucción) y se obtuvieron los resultados mostrados en la Fig. 7.

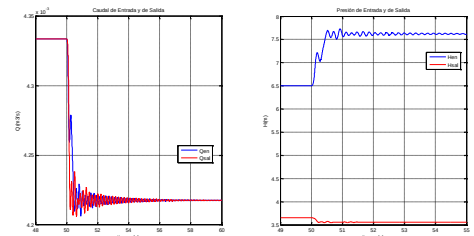


Fig. 7a. Obstrucción de un 75% ($A_o = 0.25A$)

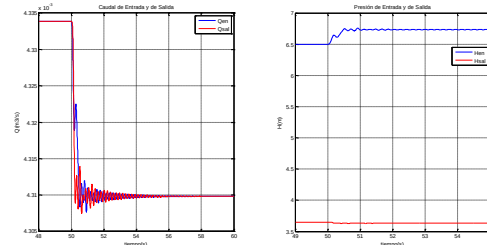


Fig. 7b. Obstrucción de un 50% ($A_o = 0.5A$)

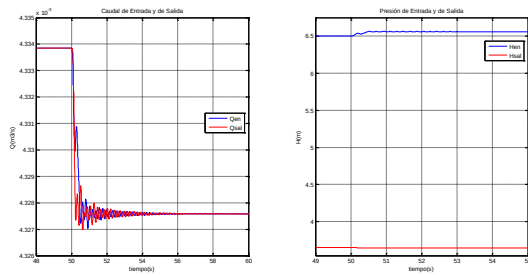


Fig. 7c. Obstrucción de un 25% ($A_o = 0.75A$)

Simulación de obstrucciones por el Método de Diferencias Finitas. (Blockages Simulation by Finite Difference Method).

En esta figura, se ve que el modelo (48) cumple con los requerimientos o comportamientos de una tubería real cuando se presenta una obstrucción: disminución de Q_{sal} y Q_{ent} , disminución de H_{sal} y aumento de H_{ent} . Igualmente, en las Fig. 7a a la 7c, puede observarse como los cambios en los caudales y las presiones, se ven acentuados cuando el porcentaje de obstrucción de la sección transversal (A) es mayor.

Una diferencia que se observa en esta Fig. 7 (modelo por diferencias finitas) con respecto de la Fig. 6 (modelo por colocación), es que la presión de entrada H_{ent} es más oscilatoria. Igualmente sucede (mas oscilación) con los caudales de entrada y salida.

Conclusiones

En este artículo se presentaron dos modelos matemáticos de una tubería para realizar simulación de obstrucciones. Los dos modelos, fueron obtenidos por la discretización de las ecuaciones de golpe de ariete, a través, de dos métodos. El primer modelo se obtuvo con el Método de Colocación. El comportamiento de este primer modelo, fue acorde al comportamiento de una tubería real, cuando se presenta una obstrucción, ya que el mismo, mostro como los caudales (Q_{ent} y Q_{sal}) disminuyen cuando se presenta la obstrucción, así mismo, mostro un aumento de la presión (H_{ent}) aguas arriba de la obstrucción, y una disminución de la presión (H_{sal}) aguas abajo de la misma. Igualmente, pudo observarse (Fig. 6a, 6b y 6c) como esos cambios en caudales y presiones, se acentúan a medida que se incrementa el porcentaje de obstrucción de la sección transversal de la tubería. El segundo modelo, se obtuvo con el método de diferencias finitas, aquí también pudo observarse (Fig. 7) como este segundo modelo, reproduce los cambios que se presentan en una tubería real, disminución en: Q_{sal} , Q_{ent} , H_{sal} y un aumento en H_{ent} . Finalmente, se observó una diferencia en el comportamiento de los dos modelos. El segundo modelo (modelo por diferencias finitas), presenta un comportamiento más oscilatorio en H_{ent} y Q_{sal} , Q_{ent} , comparado con la presión de entrada y los caudales del primer modelo (modelo por colocación).

Referencias

- Begovich O., A. Pizano., and G. Besançon (2012). Online implementation of a leak isolation algorithm in a plastic pipeline prototype, *Latin American Applied Research*, vol. 42, no. 2, pp. 131–140.
- Besancon, G., Georges, D., Begovich, O., Verde, C., & Aldana, C. (2007). Direct observer design for leak detection and estimation in pipelines. *2007 European Control Conference (ECC)*.
- Chaudry, M. H. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. (Third Edition), London: Springer New York Heidelberg Dordrecht.
- Datta, S., & Sarkar, S. (2016). A review on different pipeline fault detection methods. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, Vol (41), pp. 97.
- Dulhoste, J.-F., Besancon, G., Torres, L., Begovich, O., & Navarro, A. (2011). About friction modeling for observer-based leak estimation in pipelines. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*.
- Fletcher, C. A. J. (2006). *Computational Garlekin Methods*. Springer Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo.
- Guillén, M., Dulhoste J., Santos R (2015). Modelado de Flujo en Tuberías para Detectar y Localizar Fugas Utilizando un Enfoque de Observadores de Estado. *Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia*. Vol. 38, pp. 12-19.
- Gurav, S., Kumar, P., Ramshankar, G., Mohapatra, P. K., & Srinivasan, B. (2020). Machine Learning Approach for Blockage Detection and Localization using Pressure Transients. *2020 IEEE International Conference on Computing, Power and Communication Technologies*.
- Lee, P. J., Vítkovský, J. P., Lambert, M. F., Simpson, A. R., & Liggett, J. A. (2008). Discrete Blockage Detection in Pipelines Using the Frequency Response Diagram: Numerical Study. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol 134(5), pp 658–663
- Potter, M. C., D. C. (2002). *Mecánica de Fluidos*. Thomson. México.
- Ma, J., Lowe, M. J. S., & Simonetti, F. (2007). Feasibility study of sludge and blockage detection inside pipes using guided torsional waves. *Measurement Science and Technology*, Vol 18(8), pp 2629–2641.
- Souza, A. L., Cruz, S. L., & Pereira, J. F. R (2000). Leak detection in pipelines through spectral analysis of pressure signals. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Vol (17), pp. 557–564.
- Steven C. Chapra., Raymond P. Canale (1988). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Editorial: MacGH.

- Torres, L., Besancon, G., & Georges, D. (2008). A collocation model for water-hammer dynamics with application to leak detection. *47th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Torres, L., Besancon, G., Georges, D., Navarro, A., & Begovich, O. (2011). Examples of pipeline monitoring with nonlinear observers and real-data validation. *8th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD 2011)*, (p. v). Tunisia: Ecole Nationale d'Ingenieurs de Sfax.
- Villadsen, J. V., & Stewart, W. E. (1995). *Solution of boundary-value problems by orthogonal collocation. Chemical Engineering Science, Vol (24)*, pp. 3981–3996.
- Wang, X.-J., Lambert, M. F., & Simpson, A. R. (2005). Detection and Location of a Partial Blockage in a Pipeline Using Damping of Fluid Transients. *Journal of Water Resources Planning and Management, Vol 131(3)*, pp. 244–249.
- Wu, K.; Feng, Y.; Xu, Y (2022). Research on Method for Detecting Pipeline Blockages Based on Fluid Oscillation. *Theory. Energies 2022, Vol (15)*, pp. 5373. <https://doi.org/10.3390/en15155373>

Recibido: 21 de agosto de 2023

Aceptado: 27 de noviembre de 2023

Guillén Peña, Marcos Leonel: Profesor Asociado de la Escuela de Ingeniería Mecánica, Doctor en Ciencias Aplicadas y Magíster Scientiae en Automatización e Instrumentación, por la Universidad de Los Andes. Núcleo Pedro Rincón Gutiérrez, La Hechicera. Facultad de Ingeniería, ULA. Departamento de Ciencias Térmicas. Cubículo 2E34. Perteneciente al Grupo de Termofluidodinámica. Correo electrónico: marcosg@ula.ve, guillenmarcos2014@gmail.com.
 <https://orcid.org/0009-0006-6549-1578>

Dulhoste Vivien, Jean François: Profesor Jubilado de la Escuela de Ingeniería Mecánica, Núcleo Pedro Rincón Gutiérrez, La Hechicera. Facultad de Ingeniería, ULA. Departamento de Ciencias Térmicas. Cubículo 2E34. Perteneciente al Grupo de Termofluidodinámica. Correo electrónico: djean@ula.ve
 <https://orcid.org/0000-0002-8897-0807>

Gildas Besançon: Profesor del Instituto Politécnico de Grenoble Perteneciente al equipo de Los Sistemas no Lineales y Complejidad Departamento de Automática Correo electrónico: gildas.besancon@gipsa-lab.grenoble-inp.fr.
 <https://orcid.org/0000-0001-5701-6255>