

Diseño de un manipulador robótico con tres grados de libertad para fines educativos

Three degree of freedom robotic manipulator design for educational purpose

Andueza, Luís y Aguirre, Iñaki

Escuela de Ingeniería de Sistemas. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes
Especialización y Maestría en Ingeniería de Control y Automatización
Mérida 5101, Venezuela
anduezal@ula.ve

Recibido: 09-05-2008

Revisado: 15-01-2009

Resumen

El presente trabajo describe los aspectos principales del modelado, diseño y construcción de un manipulador robótico de tres grados de libertad. El manipulador diseñado tendrá fines educativos y será utilizado en las áreas de automatización industrial, robótica y control de procesos, como herramienta de apoyo didáctico en la carrera de Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Los Andes. Se presenta la propuesta de diseño del manipulador robótico adaptado a las necesidades educativas. Se utilizan encoders como sensores y como actuadores se utilizan servo-motores. El sistema de transmisión de potencia hacia los eslabones se realiza por medio de engranajes. Se calcula la cinemática directa e inversa del manipulador, haciendo uso de los parámetros de Denavit-Hartenberg, y se calcula el modelo dinámico del manipulador. Se realizan pruebas de simulación del comportamiento del manipulador mediante la creación de rutinas en Matlab y se comparan con los resultados obtenidos mediante el uso de la Toolbox de Robótica de Matlab desarrollada por Peter Corke.

Palabras clave: Robótica, manipulador robótico, cinemática de manipuladores, dinámica de manipuladores.

Abstract

This paper describes the main modeling, design and implementation aspects of a three-degree of freedom robotic manipulator. The manipulator will be used for educational purposes in the areas of industrial automation, robotics, and process control in the System Engineering Undergraduate Program at the Universidad de Los Andes. We present a proposal of a design of a robotic manipulator adapted to educational needs, in which Servomotors are used as actuators and the power transmission system to the links is done using gears. The direct and inverse kinematics is calculated with the help of the Denavit-Hartenberg parameters; the dynamic model of the manipulator is also calculated. The behavior of the manipulator is simulated through the creation of routines in Matlab and then compared with results obtained using the Robotics Toolbox for Matlab developed by Peter Corke.

Key words: Robotics, robotic manipulator, manipulators kinematics, manipulators dynamics.

1 Introducción

El presente trabajo describe los aspectos principales del modelado, diseño e implementación de un manipulador robótico de tres grados de libertad. Se escoge este tipo de robots con movimientos articulares debido a que son que se encuentran en mayor medida en las industrias, cercanos a los 40 mil robots instalados para el 2003 (Barrientos et Al.,

2008) y no se cuenta con robots de este estilo en los laboratorios de la Universidad. El artículo está estructurado de la siguiente manera: en el apartado 2 se describe el prototipo y las características que posee el diseño geométrico, la selección de actuadores, selección de sensores y los elementos de transmisión de potencia (Andueza, 2008). El apartado 3 muestra el cálculo del modelo cinemático directo e inverso y se calcula la matriz Jacobiana (Craig, 2006), (Barrientos

et. al. 2007). En el apartado 4 se calcula el modelo dinámico del sistema propuesto. En el apartado 5 se muestran los resultados obtenidos (Andueza, 2008). En el apartado 6 se da a conocer los costos del prototipo. Finalmente en el apartado 7 se comentan las conclusiones y futuros trabajos a realizar.

2 Descripción del prototipo

El robot a diseñar es del tipo manipulador robótico industrial. Inicialmente será diseñado para que cumpla funciones de posicionamiento, a medida que avance la investigación se irá añadiendo la capacidad de carga, descarga, manipulación y traslado de objetos; y finalmente pueda ser adaptado para que realice otras aplicaciones como pintura y soldadura, entre otras.

Como se mencionó anteriormente, el robot será del tipo manipulador, y contará con cuatro eslabones y tres grados de libertad (movimiento que puede realizar cada articulación con respecto a la anterior). Cada uno de los grados de libertad será una articulación del tipo rotacional (o rotativa). Tanto los tres primeros eslabones como las tres articulaciones (o grados de libertad para este caso) servirán para posicionar el extremo del robot en la posición deseada y permitirá realizar ejercicios de posicionamiento espacial.

2.1 Diseño geométrico

Uno de los requerimientos es que el robot manipulador sea fácilmente transportable, y no requiera de una instalación propia y específica para su funcionamiento. Por tal motivo, se comienza con una revisión de los robots manipuladores más pequeños de algunas casas comerciales. De estos robots manipuladores se observó principalmente el tamaño de los eslabones y el alcance total, ver Tabla 1, es de destacar que en la tabla no se muestra el tamaño de la base de los robots manipuladores, razón por la cual no concuerdan el alcance con la sumatoria de los eslabones.

Luego de la revisión de los manipuladores comerciales, se nota que a pesar de ser los más pequeños de cada una de las casas seleccionadas, siguen siendo grandes para el propósito del presente trabajo, razón por la cual se realiza una propuesta con dimensiones más pequeñas, pero tratando de mantener las relaciones entre eslabones de la tabla anterior. De esta manera se cumple con el requisito de transportabilidad, ver Tabla 2. En la Fig. 1 se muestra un esquema con las medidas generales del robot manipulador propuesto.

Para cumplir con el requisito de poco peso, se trabaja con aluminio como material principal del cuerpo del robot manipulador.

Para simplificar el proceso de fabricación y diseño, se utiliza un perfil comercial cuadrado de aluminio de 76,2 mm (3 pulgadas) de lado y 2 mm de espesor. Luego a los eslabones 1 y 2 se les colocan extensiones hechas de chapa

de aluminio de 3 mm de espesor, con el fin de crear los puntos de unión entre los eslabones. A los eslabones 2 y 3 se les recorta un pedazo de pared para permitir un rango más amplio de movimiento. Ver. Fig. 2.

Tabla 1 Robots manipuladores comerciales (mm)

Robot Manipulador	Alcance	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3
FANUC LR Mate 200iB	700	250	290	80
FANUC LR Mate 100iB	620	250	220	80
FANUC LR Mate 200iB/3L	858	330	370	80
KUKA KR3	635	265	270	75
ABB IRB 140	810	360	380	65
ADEPT Adept Viper 850	854	365	405	80

Tabla 2. Robot manipulador propuesto (mm)

Robot Manipulador	Alcance	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3
Propuesta	480	150	200	130

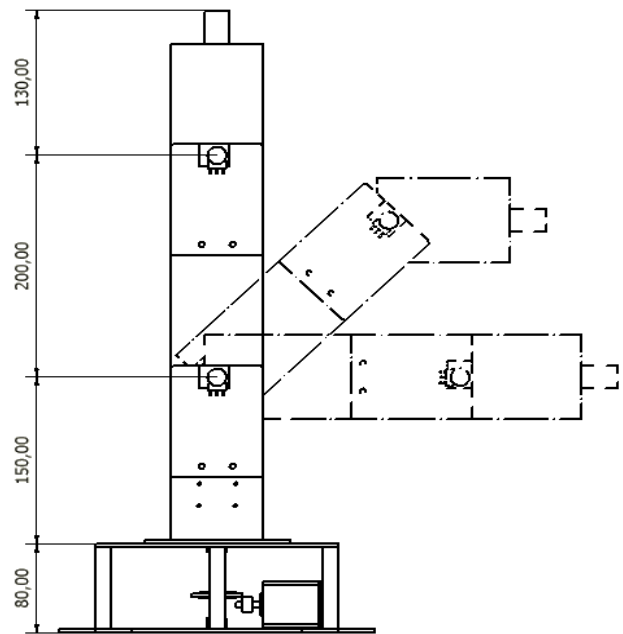


Fig. 1: Esquema del robot manipulador

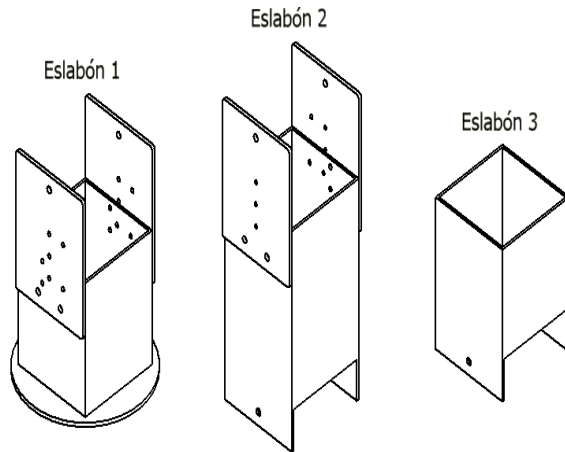


Fig. 2: Eslabones

La unión entre los eslabones 1 y 2 se realiza por medio de un eje de 5 mm de diámetro, 120 mm de longitud y de material aluminio. El eje se inserta en los agujeros de la parte inferior del eslabón 2, y en la parte superior del eslabón 1, luego se suelda el eje al eslabón 2. De igual manera para la unión del eslabón 2 y el eslabón 3, en este caso el eje va soldado al eslabón 3. Ver Fig. 3

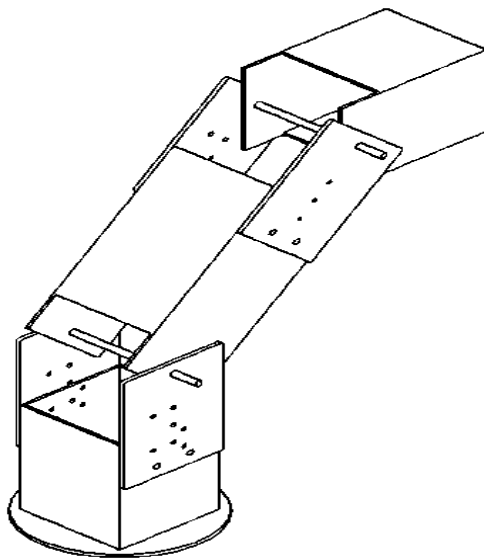


Fig. 3: Unión de los eslabones

Luego se construye la base del manipulador, compuesta por dos tapas de chapa metálica de 3 mm de espesor, cuadradas de 200 mm de lado. La tapa inferior posee orejas en cada lado, por donde la base puede ser fijada a la superficie de trabajo. La tapa superior tiene un agujero de 5 mm de diámetro por donde pasa el eje que une el eslabón número 1 con la base. Ambas tapas de la base están unidas entre sí por ocho tubos de aluminio de 6,35 mm (1/4 pulgada) de

diámetro y 74 mm de altura, soldados a las tapas; dejando la base con una altura total de 80 mm. Ver Fig. 4.

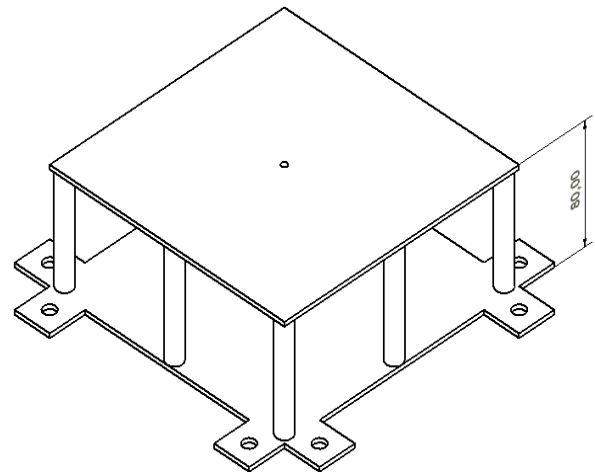


Fig. 4: Base del robot manipulador

Al eslabón número uno se suelda un eje de aluminio de 5 mm de diámetro y 85 mm de longitud, por medio del cual será unido a la base del manipulador. Una vez soldado el eje al eslabón número uno, se introduce por el agujero de la tapa superior del eslabón. El eje será fijado a la base por medio de dos rodamientos fijos a la tapa superior e inferior, que permitirán el movimiento rotacional de los eslabones minimizando el roce. Estos rodamientos serán colocados cada uno en una carcasa, que serán las que se fijen mediante soldadura a la tapa superior e inferior. Ver Fig. 5.

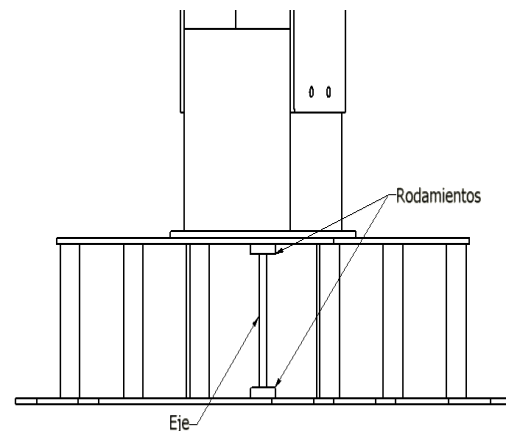


Fig. 5: Unión de la base con eslabón 1

A medida que se diseñan las piezas del manipulador, se van digitalizando tridimensionalmente en un programa CAD, de manera de hacer análisis y comprobaciones del mecanismo mientras se diseña, y así minimizar errores durante la fase de diseño. Una vez digitalizadas cada una de las piezas de los eslabones, se realiza el ensamblaje de las mismas, y se comprueba el rango de movimiento de las mismas. Ver Fig. 6, Fig. 7 y Fig. 8.

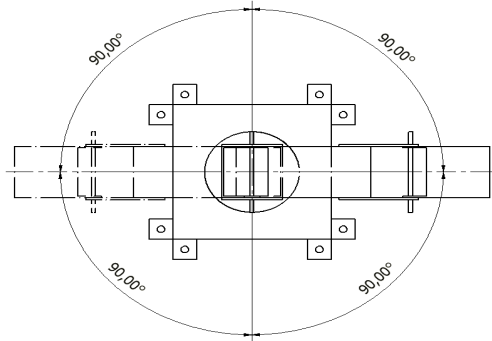


Fig. 6: Movimiento eslabón 1

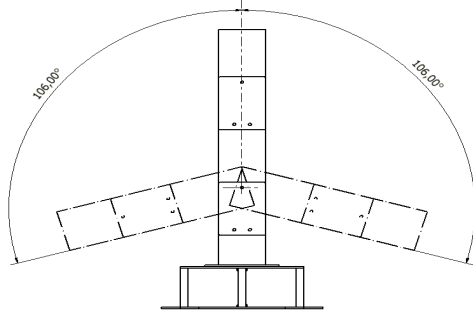


Fig. 7: Movimiento eslabón 2

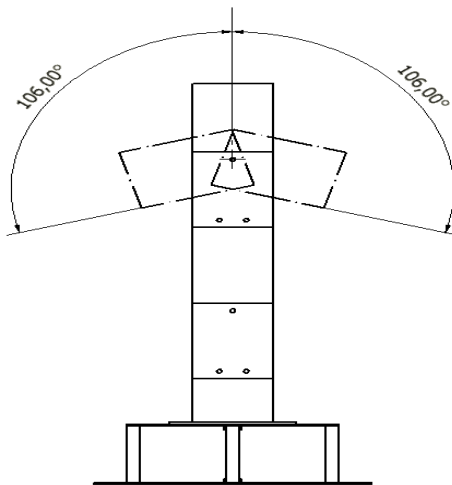


Fig. 8: Movimiento eslabón 3

2.2 Selección de actuadores

Los actuadores son los que transforman las señales provenientes del controlador en movimiento de las articulaciones. Por lo tanto, son los encargados del movimiento del manipulador. Los accionadores utilizados en la robótica de manipuladores son básicamente los utilizados en otro tipo de máquinas. Pero son tres los tipos de accionadores más utilizados para generar el movimiento. Los tipos de actuadores se pueden clasificar según el tipo de energía que utilizan, por lo tanto se consiguen del tipo eléctrico, neumático e hidráulico. La selección del tipo de actuador a utilizar

viene en función de varias variables como lo son: tamaño del manipulador, tipo de trabajo a utilizar, ambiente de trabajo del manipulador, requerimientos de velocidad y peso a manejar, etc. Según Torres (2002), los más utilizados son los de tipo eléctrico. En la Tabla se muestran las ventajas y desventajas de los tipos de actuadores.

Teniendo en cuenta las características de los actuadores, se decide utilizar actuadores del tipo eléctrico, ya que la función principal del manipulador será de tipo educativa, y por consiguiente no requiere del manejo de cargas pesadas, presentan mayor facilidad a la hora implementar y probar estrategias de control, son de fácil instalación, son muy precisos y no requieren de mantenimiento constante. Luego de varias pruebas, el actuador seleccionado es un servomotor de la empresa LEGO®, # 9842, que pesa 80g, trabaja a una velocidad máxima de 170 RPM, tiene un torque estacionario de 50 N.cm y trabaja con corriente continua de 9 V, además tiene incorporado un sensor de movimiento rotacional tipo encoder.

Tabla 3 Principales ventajas y desventajas de los distintos tipos de actuadores

Tipo de actuador	Ventajas	Desventajas
Eléctrico	<ul style="list-style-type: none"> - Rápidos y precisos. - Posibilidad de aplicar varias técnicas de control del movimiento. - Más económicos. - Tamaño reducido. - Tiempos de respuesta rápidos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Altas velocidades implican bajo par. - Necesidad de engranajes o transmisiones. - El juego de los engranajes limita la precisión. - No resultan adecuados en atmósferas inflamables. - Sobrecalentamiento en condiciones de trabajo de parada. - Necesidad de frenos para bloquear el sistema. - Coste alto en motores grandes.
Neumático	<ul style="list-style-type: none"> - Más económicos. - Alta velocidad. - No contamina el área de trabajo con otros fluidos. - No necesita línea de retorno la instalación. - Fuente de energía usual en entornos industriales. 	<ul style="list-style-type: none"> - Compresibilidad del aire limita el control y la precisión. - Mala precisión al actuar con cargas. - Necesidad de instalación adicional.
Hidráulico	<ul style="list-style-type: none"> - Relación potencia – peso muy buena. - Muy buen servocontrol. - Autolubricación y autorrefrigerado. - Trabajo en parada sin problemas. - Respuesta rápida. - Operación suave a bajas velocidades. - Adecuado en atmósferas inflamables. 	<ul style="list-style-type: none"> - Instalación hidráulica costosa. - Necesidad de mantenimiento y fugas de aceite. - Necesidad de línea de retorno en la instalación. - Problemas de miniaturización.

Fuente: (Torres, Pomares, Gil, Puente, & Aracil, 2002, pág. 50)

2.3 Selección de sensores

Los sensores a utilizar son codificadores angulares de posición (encoders), que son sensores compuestos por un disco marcado, a través del cual pasa un haz de luz hacia un receptor; para detectar los movimientos angulares del mismo. En este estudio se utilizaron específicamente encoders ópticos, en los cuales la marcación del disco viene dada por agujeros a través de los cuales pasa un haz de luz, e indican la cantidad de grados de rotación.

La escogencia de este tipo de sensor se basa en la comparación con otros tipos de sensores como los potenciómetros, resolvers y sensores capacitivos. La Tabla 4 muestra algunas características de algunos de los sensores estudiados.

Tabla 4. Comparación entre distintos sensores de posición angular

	Robustez Mecánica	Rango Dinámico	Resolución	Estabilidad Térmica
Encoder	Mala	Media	Buena	Buena
Resolver	Buena	Buena	Buena	Buena
Potenciómetro	Regular	Mala	Mala	Mala

Fuente: Barrientos et. Al. 1997.

Como se puede observar, el sensor resolver es el que tiene las mejores prestaciones, sin embargo, se escoge el sensor encoder, ya que las características encontradas en estos sensores comercialmente permiten cumplir con los objetivos planteados. Factores adicionales intervienen en la selección de estos sensores, como son el hecho de que vienen integrados con los motores seleccionados.

2.4 Transmisión de potencia

El movimiento a realizar por las articulaciones es rotacional, al igual que el de los motores, por lo que el tipo de transmisión es rotacional-rotacional. Para realizar este tipo de transmisión son varios los sistemas que se pueden utilizar, pero los más comunes, con sus ventajas y desventajas se muestran en la Tabla .

Tabla 5. Sistemas de transmisión de potencia

Denominación	Ventajas	Desventajas
Engranajes	Pares altos	Holguras
Correa dentada	Distancias grandes	Deslizamientos
Cadena	Distancias grandes	Ruido
Cable	Distancias grandes	Deformabilidad

Fuente: (Torres, Pomares, Gil, Puente, & Aracil, 2002).

Los motores seleccionados ya cuentan con un tren de

engranajes de reducción, razón por la que se pueden utilizar minimizando el uso de reducciones adicionales. Para el diseño del manipulador del presente trabajo se utilizan engranajes acoplados directamente al motor y al eje de movimiento de las articulaciones. Los engranajes utilizados son plásticos, también de la marca LEGO ®. Se utiliza uno grande para el eje de la articulación, 40 dientes y 41,7 mm de diámetro, y uno pequeño acoplado al motor, 8 dientes y 9,3 mm de diámetro, ambos engranajes tienen un espesor de diente de 3,8 mm. Con estos engranajes se consigue una relación de 5:1, es decir que por cada cinco vueltas que gira el engranaje del motor, el engranaje del eje gira una vuelta, consiguiendo un mayor control y precisión sobre el movimiento de la articulación.

Una vez fabricadas todas las piezas, y seleccionados los componentes adicionales como motores, sensores y transmisores de potencia, se realiza el ensamblaje final del robot manipulador, tanto digitalmente, ver Fig. 9; como físicamente, ver Fig. 10.

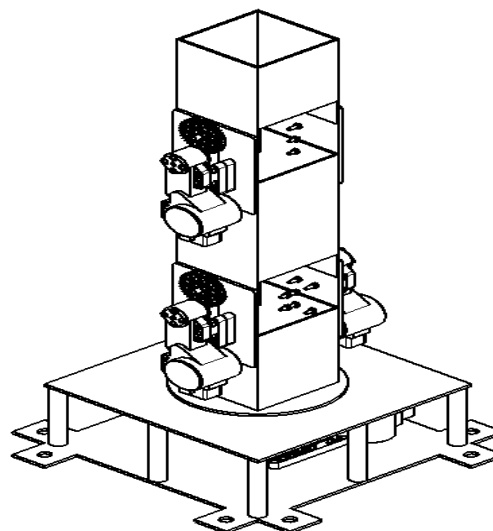


Fig. 9: Robot manipulador ensamblado digitalmente

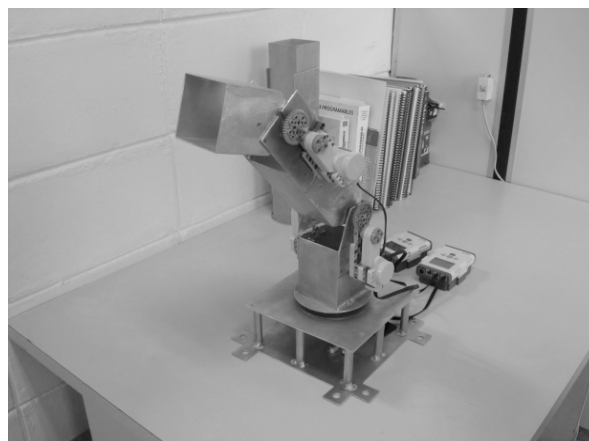


Fig. 10: Prototipo del robot manipulador

3 Modelo cinemático

El modelo cinemático estudia el movimiento del robot respecto a un sistema de referencia fijo. La cinemática directa consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo del robot dados los valores de las articulaciones y parámetros geométricos de los elementos del robot. La cinemática inversa resuelve la configuración que debe adoptar el robot para llevarlo a una posición y orientación conocida. (Craig, 2006).

Denavit-Hartenberg crearon un algoritmo que permite la obtención del modelo cinemático directo. El cual es un método matricial sistemático que permite establecer sistemas de coordenadas ligados a cada eslabón de un mecanismo, para así determinar la cinemática completa del mismo (Barrientos et. Al. 1997). Una vez que se han definido los sistemas de coordenadas, ver Fig. 11, será posible pasar de uno a otro a través de una serie de transformaciones básicas (rotaciones y traslaciones) que dependen exclusivamente de las características geométricas de cada eslabón; pudiendo así relacionar un sistema de coordenadas con otro. Las transformaciones que se llevan a cabo son:

- Rotación alrededor del eje Z_{i-1} un ángulo θ_i
- Traslación a lo largo de Z_{i-1} una distancia d_i ; vector $(0,0,d_i)$
- Traslación a lo largo de x_i una distancia a_i ; vector $(a_i, 0, 0)$
- Rotación alrededor del eje x_i un ángulo α_i

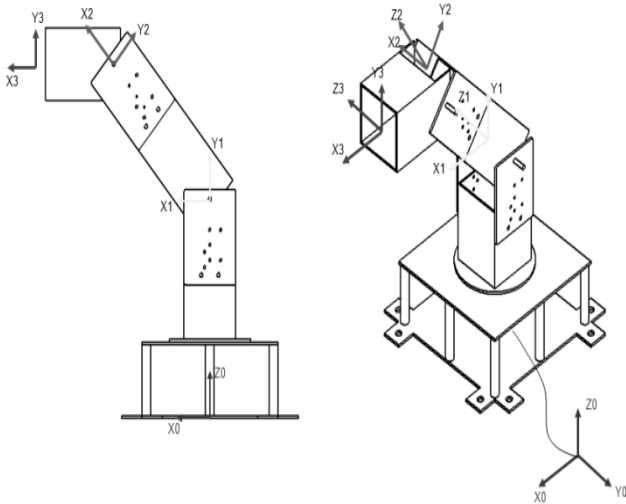


Fig. 11: Sistema coordenado seleccionado

donde:

θ_i Es el ángulo que forman los ejes x_{i-1} y x_i medido en un plano perpendicular al eje z_{i-1} , utilizando la regla de la mano derecha. Es un parámetro para articulaciones giratorias.
 d_i Es la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo hasta la intersección del

eje z_{i-1} con el eje x_i . En articulaciones prismáticas es un parámetro variable.

a_i Es la distancia a lo largo del eje x_i que va desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i hasta el origen del sistema i -ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i .

α_i Es el ángulo de separación del eje z_{i-1} y el eje z_i , medido en un plano perpendicular al eje x_i , utilizando la regla de la mano derecha. (Barrientos et Al. 1997).

Para el manipulador robótico en estudio, los parámetros de Denavit-Hartenberg se muestran en la Tabla .

Tabla 6. Parámetros Denavit-Hartenberg del manipulador propuesto

Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	230	0	90
2	θ_2	0	200	0
3	θ_3	0	130	0

Una vez obtenidos los parámetros de Denavit-Hartenberg se calculan las matrices de transformación homogénea para cada uno de los sistemas coordenados, siguiendo la ecuación:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i * S\theta_i & S\alpha_i * S\theta_i & a_i * C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i * C\theta_i & -S\alpha_i * C\theta_i & a_i * S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde las funciones trigonométricas, seno y coseno, han sido sustituidas por las letras "S" y "C" respectivamente, por consideraciones de espacio.

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 200 * C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 200 * S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & 130 * C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 130 * S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Cinemática directa

La cinemática directa permite encontrar una matriz de transformación T, que relacione tanto la posición y orientación del extremo del robot con respecto a un sistema coordenado de referencia fijo, que por lo general es la base. Esta relación se hace por medio de transformaciones homogéneas, en donde se asocian cada uno de los sistemas coordenados de cada uno de los eslabones, a través de transformaciones, compuestas de traslaciones y giros básicos. Con lo que el problema se reduce a encontrar las transformaciones necesarias para pasar desde el sistema de referencia hasta el extremo del robot (Torres et Al. 2002). Para el caso en estudio, la cinemática directa viene dada por:

$$T = {}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \quad (3)$$

Obteniéndose una matriz 4x4. De la ecuación anterior se desprenden los términos que corresponden al posicionamiento del extremo del robot manipulador propuesto. De esta matriz los primeros tres elementos de la cuarta columna muestran la posición del extremo del manipulador.

$$X = 130C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - 130C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 + 200C\theta_1 C\theta_2 \quad (4)$$

$$Y = 130S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - 130S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 + 200S\theta_1 C\theta_2 \quad (5)$$

$$Z = 130S\theta_2 C\theta_3 + 130C\theta_2 S\theta_3 + 230 + 200S\theta_2 \quad (6)$$

3.2 Cinemática inversa

Contrariamente al caso de la cinemática directa, en la cinemática inversa se buscan los valores que deben tomar las articulaciones, para que el robot se posicione y oriente en una determinada localización espacial. El cálculo de la cinemática inversa no es tan fácil como el caso de la cinemática directa, ya que en este caso depende mucho de la configuración del robot. A pesar de que existen métodos genéricos, programados para que un computador pueda realizar la cinemática inversa a partir de la cinemática directa; los mismos son métodos iterativos que muchas veces suelen ser lentos e incluso no se garantiza la convergencia de los resultados.

También se da el caso en la cinemática inversa que la solución no sea única, es decir, que existen varias soluciones (configuraciones) del robot que permiten un mismo posicionamiento y orientación. En estos casos se deben restringir las soluciones, de manera que se utilice la solución más adecuada.

El desarrollo de la cinemática inversa para el manipulador en estudio se muestra a continuación: primero se definen las matrices inversas de las matrices de transformación homogéneas:

$$\begin{aligned} {}^1A_0 &= \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -230 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2A_1 &= \begin{bmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -200 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^3A_2 &= \begin{bmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -130 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Una vez obtenidas las matrices de rotación inversa, y partiendo de la ecuación (3), se manipulan de manera que las variables articulares queden en función de la posición espacial.

$$\left({}^0A_1\right)^{-1} * T = {}^1A_2 * {}^2A_3 \quad (8)$$

De la ecuación (9) se obtienen un sistema de ecuaciones, del cual, haciendo uso de igualdades trigonométricas se obtienen los valores de las variables articulares:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctg\left(\frac{Py}{Px}\right) \\ \theta_{2a} &= \left(2 * \arctan\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}}{a + c}\right)\right) \\ \theta_{2b} &= \left(2 * \arctan\left(\frac{b - \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}}{a + c}\right)\right) \\ \theta_{3a} &= \arctan\left(\frac{b * \cos \theta_2 - a * \sin \theta_2}{a * \cos \theta_2 + b * \sin \theta_2 - 200}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta_1 * Px + \sin \theta_1 * Py \\ b &= Pz - 230 \\ c &= \frac{23100 + a^2 + b^2}{400} \end{aligned} \quad (10)$$

De la ecuación (10) se puede observar que existen dos soluciones para el ángulo θ_2 y por lo tanto existen dos so-

luciones también para el ángulo θ_3 , esto se debe a las distintas configuraciones que puede tener el robot manipulador para una posición dada.

La matriz Jacobiana es la relación entre las velocidades de las coordenadas articulares y las de posición y orientación del extremo del robot. Existe la matriz Jacobiana directa que permite conocer las velocidades del extremo del robot conociendo las velocidades de cada articulación. También existe la matriz Jacobiana inversa que permite obtener las velocidades articulares si se conoce la velocidad del extremo del robot.

3.3 Matriz Jacobiana directa

La matriz Jacobiana directa se obtiene a partir de la diferenciación de las ecuaciones de la cinemática directa.

$$\begin{aligned}
 Jd_{\{1,1\}} &= -10 * S\theta_1 (13 * C\theta_2 * C\theta_3 - 13 * S\theta_2 * S\theta_3 + 200 * C\theta_2) \\
 Jd_{\{1,2\}} &= -10 * C\theta_1 (13 * C\theta_2 * S\theta_3 + 20 * S\theta_2 + 13 * S\theta_2 * C\theta_3) \\
 Jd_{\{1,3\}} &= -130 * C\theta_1 (S\theta_2 * C\theta_3 + C\theta_2 * S\theta_3) \\
 Jd_{\{2,1\}} &= -10 * C\theta_1 (-13 * C\theta_2 * C\theta_3 + 13 * S\theta_2 * S\theta_3 - 20 * C\theta_2) \\
 Jd_{\{2,2\}} &= -10 * S\theta_1 (13 * C\theta_2 * S\theta_3 + 20 * S\theta_2 + 13 * S\theta_2 * C\theta_3) \\
 Jd_{\{2,3\}} &= -130 * S\theta_1 (S\theta_2 * C\theta_3 + C\theta_2 * S\theta_3) \\
 Jd_{\{3,1\}} &= 0 \\
 Jd_{\{3,2\}} &= 130 * C\theta_2 * C\theta_3 - 130 * S\theta_2 * S\theta_3 + 200 * C\theta_2 \\
 Jd_{\{3,3\}} &= -130 * S\theta_2 * S\theta_3 + 130 * C\theta_2 * C\theta_3
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 J\dot{\{1,1\}} &= \frac{S\theta_1}{10(-20C\theta_2 - 13C\theta_2C\theta_3 - 13S\theta_2S\theta_3)} \\
 J\dot{\{1,2\}} &= \frac{-C\theta_1}{10(-20C\theta_2 - 13C\theta_2C\theta_3 - 13S\theta_2S\theta_3)} \\
 J\dot{\{1,3\}} &= 0 \\
 J\dot{\{2,1\}} &= \frac{-(S\theta_2S\theta_3 - C\theta_2C\theta_3)S\theta_1}{200S\theta_3} \\
 J\dot{\{2,2\}} &= \frac{S\theta_1}{10(-20C\theta_2 - 13C\theta_2C\theta_3 - 13S\theta_2S\theta_3)} \\
 J\dot{\{2,3\}} &= \frac{S\theta_2C\theta_3 + C\theta_2S\theta_3}{S\theta_3} \\
 J\dot{\{3,1\}} &= \frac{C\theta_1(-20C\theta_2 - 13C\theta_2C\theta_3 + 13S\theta_2S\theta_3)}{2600S\theta_3} \\
 J\dot{\{3,2\}} &= \frac{S\theta_1(-20C\theta_2 - 13C\theta_2C\theta_3 + 13S\theta_2S\theta_3)}{2600S\theta_3} \\
 J\dot{\{3,3\}} &= \frac{13S\theta_2C\theta_3 + 20S\theta_2 + 13C\theta_2S\theta_3}{-2600S\theta_3}
 \end{aligned} \tag{12}$$

3.4 Matriz Jacobiana inversa

La matriz Jacobiana inversa permite determinar las velocidades de las articulaciones basándose en la velocidad del posicionamiento del extremo del manipulador robótico. Se tienen dos maneras de obtener la matriz Jacobiana, la inversa directa que consiste en invertir directamente la ecuación de la Jacobiana directa, y la Jacobiana inversa de la cinemática inversa, donde se calcula la matriz Jacobiana a partir de la cinemática inversa. El presente artículo sólo muestra el primer caso, la matriz Jacobiana inversa directa está expresada por la ecuación (12). El segundo caso no se muestra ya que la ecuación es extensa. Para mayor información sobre esta solución ver Andueza (2008).

4 Modelo dinámico

La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos debido a fuerzas externas e internas de los mismos. Desde el punto de vista de la robótica, se estudia la relación entre el movimiento de los eslabones y las fuerzas o pares ejercidos por los actuadores en las articulaciones. Una vez estudiada la dinámica del robot, se puede controlar a cada uno de los actuadores en las articulaciones, para que el extremo del robot se mueva de una manera determinada.

El modelo dinámico relaciona matemáticamente la localización del robot a través de la velocidad y aceleración mediante las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones. Una vez conocida la dinámica del robot, se pueden controlar los movimientos del mismo, de manera que el extremo realice una acción o siga una trayectoria determinada.

El modelo dinámico de un robot se basa en el equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton o su equivalente para movimientos de rotación, la ley de Euler.

$$\begin{aligned}
 \Sigma F &= m\dot{v} \\
 \Sigma T &= I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Incluso se puede obtener un modelo dinámico a partir de consideraciones del tipo energéticas, como el planteamiento Lagrangiano.

El planteamiento utilizado en el presente trabajo es el de Newton-Euler. Se parte del equilibrio de fuerzas y pares para cada elemento. Se utiliza por poseer un algoritmo recursivo con un orden de complejidad $O(n)$, lo que quiere decir que esa complejidad depende directamente del número de grados de libertad. Con este planteamiento se obtienen las fuerzas y los pares actuantes sobre un eslabón i , referidos a la base del robot (Barrientos et Al., 2007). El algoritmo se basa en operaciones vectoriales, que son más eficientes en comparación a las operaciones matriciales necesarias en la formulación Lagrangiana. Para mayor detalle del desarrollo del modelo ver Andueza (2008).

$$T1 = 82582,37 * \ddot{q}_1 - 20051,39 * \dot{q}_2^2 - 35,19 * \dots$$

$$\dots(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) * (-78,8 * \dot{q}_2 - 78,8 * \dot{q}_3) - 35,19 * \dots$$

$$(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) * (130 * \dot{q}_2 + 130 * \dot{q}_3) \tag{14}$$

$$T2 = 15717,79 * \ddot{q}_2 + 1967,80 * \ddot{q}_3 + 91,98 * gz \tag{15}$$

$$T3 = 1967,80 * \ddot{q}_2 + 401,08 * \ddot{q}_3 + 7,8 * gz \tag{16}$$

5 Resultados

Para comprobar las ecuaciones obtenidas para la cinemática directa, se crea un rutina en el software matemático MATLAB®, en la que se programan las ecuaciones obtenidas correspondientes a la cinemática directa del robot manipulador propuesto. Con la finalidad de comparar los resultados y comprobar que concuerdan, se crea otra rutina con la ayuda del “Robotic ToolBox for MATLAB®” (Corke, 2006), en la que se introducen los parámetros del robot manipulador propuesto. Para ambas rutinas se utilizan los mismos valores de entrada, para el caso de la cinemática directa se introducen valores de ángulos que toman las articulaciones y se obtiene una posición en el espacio del extremo del robot manipulador; luego se comparan los resultados obtenidos en la Tabla 7.

Se puede observar que se consigue la misma posición espacial para ambos casos, aún y cuando la matriz de orientación no sea igual. Esto se debe a la manera como el “Robotics Toolbox for MATLAB®” realiza los cálculos, utiliza métodos recursivos para buscar una solución, y muestra la primera que consigue, sin tener oportunidad de poder seleccionar.

En el presente artículo sólo se muestran los resultados más resaltantes, para ver todos los resultados obtenidos, referirse al trabajo extenso realizado por Andueza (2008).

Tabla 7. Comparación de resultados para la cinemática directa

Valores articulares (rad) (q1 q2 q3)	Propuesta propia (mm)	“Robotic ToolBox” (mm)
(0, 0, 0)	Px = 330	Px = 330
	Py = 0	Py = 0
	Pz = 230	Pz = 230
(0.79; -0.52; 1.09)	Px = 200	Px = 200
	Py = 200	Py = 200
	Pz = 200	Pz = 200
(0.79; -1.42; 1.97)	Px = 100	Px = 100
	Py = 100	Py = 100
	Pz = 100	Pz = 100
(π / 3 π / 3 π / 3)	Px = 17,50	Px = 17,50
	Py = 30,31	Py = 30,31
	Pz = 515,79	Pz = 515,79

Para la comprobación de la cinemática inversa se crean tres rutinas en MATLAB® con las ecuaciones de la cinemática inversa, una rutina donde se programan las ecuaciones de la cinemática inversa obtenidas a partir de las matrices homogéneas, y una rutina de las ecuaciones obtenidas por métodos geométricos. Finalmente se crea una rutina utilizando el “Robotic Toolbox for MATLAB®”. Para los tres casos se utilizan los mismos valores de entrada, en este caso se introduce una ubicación en el espacio por medio de coordenadas, y se obtienen los valores de las articulaciones. La comparación entre los tres métodos se puede observar en la Tabla 8, Tabla 9 y Tabla 10.

Tabla 8. Comparación de las cinemáticas inversas

Ubicación (mm) (x,y,z)	C. Inversa 01
(330, 0, 230)	[0, 0, 0]
(200, 200, 200)	[0.79, -0.52, 1.09]
(100, 100, 100)	[0.79, -0.07, 1.18]
(17.5, 30.31, 515.79)	[1.05, 1.85, -1.05]

Tabla 9. Comparación de las cinemáticas inversas

Ubicación (mm) (x,y,z)	C. Inversa 02
(330, 0, 230)	[0, 0, 0]
(200, 200, 200)	[0.79, -0.52, 1.09]
(100, 100, 100)	[0.79, -0.30, -1.18]
(17.5, 30.31, 515.79)	[1.05, 1.86, -1.05]

Tabla 10. Comparación de las cinemáticas inversas

Ubicación (mm) (x,y,z)	“Robotics toolbox”
(330, 0, 230)	[0, 0, 0]
(200, 200, 200)	[0.79, -0.52, 1.09]
(100, 100, 100)	[0.79, -1.42, 1.97]
(17.5, 30.31, 515.79)	[1.05, 1.86, -1.05]

Se puede observar que la mayoría de los resultados obtenidos coinciden, sin embargo existen casos puntuales en los cálculos hechos con las ecuaciones obtenidas, donde se consigue una división por cero (representados en la tabla con la palabra NA), razón por la que no se llega a un resultado, pudiéndose deber esto que se encuentra una posición singular. Existen otros casos donde los resultados no coinciden, esto se debe a la configuración que adopta el mani-

pulador, teniendo en cuenta que en muchos casos se puede obtener una misma ubicación espacial con diferentes valores articulares del robot manipulador.

Para la comprobación del cálculo de la Jacobiana directa, se crea una rutina en MATLAB® donde se programa la Jacobiana directa obtenida anteriormente. Para comparar estos cálculos se utiliza la función para la Jacobiana directa del “Robotics Toolbox for MATLAB®”. Como datos de entrada se utiliza en cada caso valores articulares, y se obtienen las matrices Jacobianas directas. En la Tabla 11 se muestra la comparación entre los dos métodos utilizados.

Tabla 11. Comparación de las matrices Jacobianas directas

Valores articulares (rad) (q1 q2 q3)	Jacobiana directa calculada	Jacobiana directa “Robotics Toolbox”
(0; 0; 0)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 330 & 0 & 0 \\ 0 & 330 & 130 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 330 & 0 & 0 \\ 0 & 330 & 130 \end{bmatrix}$
(0.79; -0.52; 1.09)	$\begin{bmatrix} -200 & 21.2 & -49.4 \\ 200 & 21.2 & -49.4 \\ 0 & 282.9 & 109.6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -200 & 21.2 & -49.4 \\ 200 & 21.2 & -49.4 \\ 0 & 282.9 & 109.6 \end{bmatrix}$
(0.79; -1.42; 1.97)	$\begin{bmatrix} -99.9 & 91.9 & -47.9 \\ 99.9 & 91.9 & -47.9 \\ 0 & 141.4 & 110.9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -99.9 & 91.9 & -47.9 \\ 99.9 & 91.9 & -47.9 \\ 0 & 141.4 & 110.9 \end{bmatrix}$
$(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$	$\begin{bmatrix} -30.3 & -142.9 & -56.3 \\ 17.5 & -247.5 & -97.5 \\ 0 & 34.9 & -65.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -30.3 & -142.9 & -56.3 \\ 17.5 & -247.5 & -97.5 \\ 0 & 35 & -65 \end{bmatrix}$

Como se observa en la tabla anterior, que tanto los resultados de la matriz Jacobiana directa obtenida con las ecuaciones calculadas, como los resultados obtenidos a través del “Robotic Toolbox for MATLAB®” coinciden para todas las posiciones.

Luego de obtenidos los resultados de la matriz Jacobiana directa, se obtienen resultados para la matriz Jacobiana inversa. Para ello se realizan tres rutinas en MATLAB®, cada una de estas rutinas está programada con un método distinto, según la obtención de la matriz Jacobiana inversa. El primer método es invirtiendo la matriz Jacobiana directa (Jacobiana inversa 01), el segundo método es conseguir la matriz Jacobiana inversa a partir de las matrices homogéneas inversas (Jacobiana inversa 02). Y el tercer método es a partir de la cinemática inversa conseguida geoméricamente (Jacobiana inversa 03). En la Tabla 12, Tabla 13 y 14 se muestran los resultados.

Tabla 12 Comparación resultados Jacobianas inversas

Posición (X,Y,Z)	Jacobiana Inversa 01
(200; 200; 200)	$\begin{bmatrix} -0.0025 & 0.0025 & 0 \\ -0.0028 & -0.0028 & 0.0040 \\ 0.0087 & 0.0087 & -0.0013 \end{bmatrix}$
(100; 100; 100)	$\begin{bmatrix} -0.0027 & 0.0027 & 0 \\ 0.0017 & 0.0017 & 0.0048 \\ -0.0076 & -0.0076 & -0.0043 \end{bmatrix}$
(50; 100; 150)	$\begin{bmatrix} -0.0031 & 0.0016 & 0 \\ 0.0022 & 0.0044 & 0.0054 \\ -0.0072 & -0.0145 & -0.0063 \end{bmatrix}$
(17.5; 30.31; 515.79)	$\begin{bmatrix} -0.0247 & 0.0143 & 0 \\ -0.0020 & -0.0035 & -0.0042 \\ 0.0008 & 0.0013 & 0.0127 \end{bmatrix}$

Tabla 13. Comparación resultados Jacobianas inversas

Posición (X,Y,Z)	Jacobiana Inversa 02
(200; 200; 200)	$\begin{bmatrix} -0.0025 & 0.0025 & 0 \\ -0.0028 & -0.0028 & 0.0040 \\ 0.0087 & 0.0087 & -0.0013 \end{bmatrix}$
(100; 100; 100)	$\begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0050 & 0 \\ 0.0017 & 0.0017 & 0.0048 \\ 0.0042 & 0.0042 & -0.0054 \end{bmatrix}$
(50; 100; 150)	$\begin{bmatrix} -0.0080 & 0.0040 & 0 \\ 0.0022 & 0.0044 & 0.0054 \\ 0.0028 & 0.0056 & -0.0045 \end{bmatrix}$
(17.5; 30.31; 515.79)	$\begin{bmatrix} -0.0247 & 0.0143 & 0 \\ -0.0020 & -0.0035 & -0.0042 \\ 0.0008 & 0.0013 & 0.0127 \end{bmatrix}$

Tabla 14. Comparación resultados Jacobianas inversas

Posición (X,Y,Z)	Jacobiana Inversa 03
(200; 200; 200)	$\begin{bmatrix} -0.0025 & 0.0025 & 0 \\ -0.0028 & -0.0028 & 0.0040 \\ 0.0087 & 0.0087 & -0.0013 \end{bmatrix}$
(100; 100; 100)	$\begin{bmatrix} -0.0050 & 0.0050 & 0 \\ 0.0010 & 0.0010 & 0.0057 \\ 0.0042 & 0.0042 & -0.0054 \end{bmatrix}$
(50; 100; 150)	$\begin{bmatrix} -0.0080 & 0.0040 & 0 \\ 0.0008 & 0.0017 & 0.0076 \\ 0.0028 & 0.0056 & -0.0045 \end{bmatrix}$
(17.5; 30.31; 515.79)	$\begin{bmatrix} -0.0247 & 0.0143 & 0 \\ -0.0020 & -0.0035 & -0.0042 \\ 0.0008 & 0.0013 & 0.0127 \end{bmatrix}$

De la tabla anterior se observa que solamente en dos oportunidades, la primera y la última, los tres métodos para

la matriz Jacobiana coinciden totalmente; para el resto de los casos sólo coinciden los resultados de las matrices Jacobianas inversas calculadas a partir de las inversas de las matrices homogéneas, y la que se calcula a partir de la cinemática inversa geométrica. Esta diferencia se debe al cálculo de la inversión de la matriz Jacobiana directa.

6 Costos del robot manipulador propuesto.

Un aspecto importante en el presente trabajo es el bajo costo de fabricación del robot manipulador. Esto se debe al tamaño utilizado, que por ser de pequeñas dimensiones se reduce la cantidad de material a utilizar; estos materiales utilizados son en su mayoría piezas estándares modificadas para ser adaptadas al diseño elaborado, como el caso de los perfiles cuadrados de aluminio. En la Tabla se presentan los costos del manipulador robótico del presente trabajo.

Tabla 15. Costos de fabricación del robot manipulador propuesto

Material y/o proceso de fabricación:	Precio
Eslabones uno, dos y tres	150 Bs.F
Base	140 Bs.F
4 motores LEGO ® NXT	170 Bs.F
Tornillos y tuercas	15 Bs.F
3 Ejes	60 Bs.F
Piezas varias de LEGO ®	45 Bs.F
Cable para conexión de motores	10 Bs.F
Total	590 Bs.F

Como se puede apreciar el precio del robot manipulador propuesto es mucho menor que robots manipuladores comerciales.

7 Conclusiones

Una vez finalizado el diseño y fabricación del robot manipulador propuesto, y analizados el proceso y los resultados obtenidos, se llega a las siguientes conclusiones:

Se diseñó y construyó un prototipo de robot manipulador con tres grados de libertad para fines educativos. El mismo puede ser utilizado para realizar prácticas de programación de robots manipuladores, análisis de mecanismos, uso de sensores y actuadores, control de procesos.

También puede ser utilizado para la investigación en el área de robótica industrial, como diseño de controladores específicos para tareas específicas, tele-operación, colaboración con otros robots, etc.

Se obtiene una notable reducción de costos en comparación con robots manipuladores comerciales y de investigación. Por lo que la fabricación es una salida bastante viable para muchas de las universidades e institutos que tienen líneas de investigación en estas áreas, así como también los dedicados a la enseñanza y entrenamiento.

El uso de herramientas CAD es de gran ayuda para el diseño geométrico de robots manipuladores, permitiendo la evaluación y verificación de distintos aspectos del mismo antes de la fabricación, reduciendo así tiempos de fabricación y la necesidad de mayor cantidad de prototipos físicos, lo que se traduce en menos costos en el desarrollo del proyecto completo.

El uso de herramientas computacionales para el cálculo matemático también ayudó a la reducción considerable del tiempo de desarrollo del manipulador, permitiendo realizar simulaciones y variaciones de varias propuestas, casi en tiempo real, hasta llegar al diseño final del robot manipulador. Siguiendo con la línea de investigación, se plantean trabajos futuros sobre un programa que permita la simulación y programación del manipulador robótico propuesto, el control de trayectorias en manipuladores robóticos, diseño e implementación de distintos dispositivos terminales, programación de tareas, detección de errores en la medición de sensores, auto-calibración, y otras áreas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo recibido del C.D.C.H.T. de la Universidad de Los Andes, bajo el marco del proyecto I-919-06-02-B titulado Diseño y Construcción de un Manipulador Robótico para fines educativos.

Referencias

- Andueza L, 2008, Diseño de un manipulador robótico con tres grados de libertad con fines educativos, Tesis de Maestría, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
- Barrientos A, Peñín L, Balaguer C y Aracil R, 2007, Fundamentos de robótica, McGraw Hill, Interamericana de España. C.A, Madrid. España.
- Craig J, 2006, Robótica, Tercera Edición, Pearson Education, 2006.
- Corke P, 2006, Robotic toolbox for MATLAB, Recuperado el 03 de Diciembre de 2007, de <http://www.petercorke.com/Robotics%20Toolbox.html>.
- Torres F, Pomares J, Gil P, Puente S y Aracil R, 2002, Robots y sistemas sensoriales, Pearson Educación S.A. Madrid, España.

