

Sintonización por reubicación de polos de los cuatro parámetros de un controlador PID para plantas FOPTD

Four parameters PID controller sintonization using poles placement for FOPTD plants

Teppa-Garran, Pedro^{1*}; Caraballo, Luis²

¹Departamento de Gestión de Proyectos y Sistemas, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.

²Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.

*teppa@unimet.edu.ve

Resumen

La mayoría de los métodos de sintonización de controladores PID permiten el diseño de tres constantes del controlador. Sin embargo, dado que el término derivativo no puede aplicarse en forma pura se requiere incluir un cuarto parámetro en el filtro de derivación que posteriormente suele ajustarse a través de relaciones empíricas predefinidas. Estos procedimientos que combinan la sintonización de tres parámetros y el ajuste posterior del cuarto, muchas veces producen controladores PID pobremente sintonizados. En este trabajo se propone un método de sintonización directo de los cuatro parámetros del controlador PID basado en la reubicación de polos para un modelo de la planta de primer orden con retardo de transporte.

Palabras clave: Controlador PID, Patada del derivador, Reubicación de polos, Sistemas con retardo, Sistema FOPTD, Naciones Unidas ODS 9.

Abstract

Most PID controller tuning methods allow for the design of three controller constants. However, since the derivative term cannot be applied in its pure form, a fourth parameter must be included in the derivative filter, which is then typically tuned using predefined empirical relationships. These procedures, which combine tuning of three parameters and subsequent adjustment of the fourth, often produce poorly tuned PID controllers. This paper proposes a four-parameter PID controller tuning method based on pole placement for a first-order plant model with transport delay.

Keywords: PID controller, Derivative kick, Pole placement, Delay systems, FOPTD System, United Nations SDG 9.

1 Introducción

El controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) es una de las primeras estrategias de control que se empleó en la práctica, su implementación inicial fue a través de dispositivos neumáticos, seguido por el uso de tubos de vacío y circuitos electrónicos analógicos, hasta la implementación digital actual mediante microprocesadores (Bennett, 1993). Hoy en día, y a pesar de los significativos avances alcanzados en la teoría de control, es la estrategia más utilizada en el control de procesos industriales porque proporciona estabilidad y respuestas rápidas para un rango amplio de condiciones de operación. Según Åström y Hagglund (1995) más del 90 % de los sistemas industriales de control, contienen algún tipo de controlador PID. Un estudio posterior, llevado a cabo por Desborough y Miller

(2002) consideró alrededor de 11.000 controladores en refinerías, industrias químicas y fábricas de papel, concluyendo que alrededor del 97 % de los controladores poseía una estructura PID. Una arquitectura típica del controlador PID se muestra en la Fig. 1, donde se aprecia que la señal de error $e(t)$ se utiliza para generar las acciones proporcional, integral y derivativa, que luego se ponderan y suman para formar la señal de control $u(t)$. Un modelo matemático del controlador PID es

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (1)$$

O equivalentemente, usando la transformada de Laplace

$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) E(s) \quad (2)$$

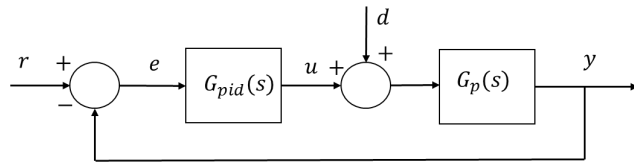


Fig. 1. Arquitectura típica de un controlador PID.
(A typical PID control structure)

Como se aprecia en (1) o (2), los parámetros del controlador PID son tres: la constante proporcional K_p , la constante integral K_i y la constante derivativa K_d . Estas constantes deben sintonizarse para responder a los requerimientos de diseño y a ese fin se han formulado diversas reglas de sintonización, muchas de ellas utilizadas comúnmente en la práctica, pueden mencionarse: la regla de Ziegler y Nichols (1942), la de Chien, Hrones y Reswick (1952), la de Cohen y Coon (1953), la regla complementaria (Mantz y Taconi, 1989), las reglas de algo de sobrepico y sin sobrepico (Seborg, Edgar y Mellichamp, 1989), la regla modificada de Ziegler y Nichols (Hang, Åström y Ho, 1991), la regla de la integral del error cuadrático multiplicado por el tiempo (Zhuang y Atherton, 1993), la de la integral del error absoluto (Pessen, 1994), la fórmula de Wang, Juang y Chan (1995) y el rechazo activo de perturbaciones (Teppa-Garrán y García, 2017). Estas reglas, muchas de ellas fáciles de implementar, aportan métodos de sintonización de los parámetros del controlador PID que en muchos casos no suministran los mejores ajustes de las constantes (Lee y col, 2014). Por tal razón, se han propuesto métodos de sintonización óptima: basados en algoritmos genéticos (El-Deen y col, 2015; Gunawan y col, 2018), asistidos por computadora (Teppa-Garran y col, 2021; Teppa-Garran y El Gharib, 2024) o basados en el regulador lineal cuadrático (Teppa-Garran y col, 2025a).

Ahora bien, en aplicaciones prácticas, la acción derivativa pura en (1) nunca se emplea, debido al fenómeno de “la patada del derivador” (*derivative kick*) producido en la señal de control para entradas tipo escalón y a la amplificación del ruido de medición (Atherton y Majhi, 1999; Zhu, 2009). Por tal razón, el término derivativo se coloca en cascada con un filtro pasa-bajo de primer orden, resultando que la ecuación (2) toma la forma

$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\tau_d s + 1} \right) E(s) \quad (3)$$

Todas las reglas (tradicionales y óptimas) citadas previamente consideran únicamente la sintonización de las tres constantes K_p , K_i y K_d pero no el término τ_d . Para fijar este último se suelen emplear simulaciones posteriores a partir de rangos predefinidos. Por ejemplo: (Goodwin y col, 2001).

$$0.1(K_d/K_p) \leq \tau_d \leq 0.2(K_d/K_p) \quad (4)$$

O resultados que buscan mitigar el efecto de la patada del derivador pero usando controladores PID difusos (Kumar, y Rana, 2016) o controladores PID de orden fraccional (Lendek y Tan, 2021).

Los sistemas de control con retardo temporal se encuentran presentes en numerosas aplicaciones industriales, como la ingeniería química, la bioquímica, la industria aeroespacial y la generación de energía, por nombrar solo algunas (Gu y col, 2003). Aunque no sean un componente natural del proceso controlado, los actuadores y sensores de un sistema de control introducen retardos en su funcionamiento (Richard, 2003). La principal causa de estos retardos en los procesos industriales es el transporte de materiales o energía en tuberías de gran longitud (Bresch y col, 2014) o el tráfico de datos en redes de comunicación (Ariba y col, 2009). Se sabe que el retardo temporal degrada el rendimiento del proceso, llegando incluso a desestabilizarlo. Como caso especial de sistemas con retardo temporal, muchos procesos industriales de lazo abierto de interés práctico pueden modelarse eficazmente mediante una cascada de funciones de transferencia de orden bajo con un retardo temporal. Los sistemas de primer orden con retardo temporal (FOPTD) son el modelo de proceso más utilizado en el diseño de control (O'Dwyer, 2009).

En este trabajo se propone un método de sintonización de los cuatro parámetros del controlador PID descrito por (3) para una planta representada mediante un modelo FOPTD empleando un enfoque algebraico de reubicación de polos. Varios ejemplos muestran la eficacia del procedimiento propuesto. Finalmente, los resultados de este trabajo fomentan la innovación en el control de procesos industriales y de esta manera contribuir con el ODS 9 de las Naciones Unidas.

2 Método

En el sistema de control a lazo cerrado de la Fig. 1 ya se mencionaron las señales de control $u(t)$ y de error $e(t)$ que aparecen en el controlador PID. La señal $r(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la entrada de referencia, $d(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una señal de perturbación, $y(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la salida controlada y t es la variable independiente del tiempo. La señal de error se define como $e(t) = r(t) - y(t)$. La función de transferencia a lazo cerrado de r a y viene dada por la ecuación

$$G_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{pid}(s)G_p(s)}{1 + G_{pid}(s)G_p(s)} \quad (5)$$

Donde la función de transferencia del controlador PID es la expresión de cuatro parámetros dada por

$$G_{pid}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\tau_d s + 1} \quad (6)$$

Y la planta se modela mediante un sistema de primer orden con retardo de transporte θ_d (FOPTD).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\theta_d s} \quad (7)$$

Empleando un modelo de Padé de primer orden para aproximar el retardo de transporte en (7) ($e^{-\theta_d s} \approx (2 - \theta_d s)/(2 + \theta_d s)$) (Hanta y Procházka, 2009) permite obtener la siguiente función de transferencia de la planta

$$G_p(s) = \frac{-b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (8)$$

Donde

$$b_1 = K/T, b_0 = 2K/T\theta_d, a_1 = (2T + \theta_d)/T\theta_d, a_0 = 2/T\theta_d$$

La ecuación (8) será empleada para diseñar el controlador (6) de la Fig. 1. Sin embargo, para representar el controlador PID se usará una forma alternativa que se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 1: Cualquier controlador PID modelado por la función de transferencia

$$G_{pid}(s) = \frac{n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_2 s^2 + d_1 s} \quad (9)$$

Es idéntico al controlador PID modelado por (6) donde

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{n_1 d_1 - n_0 d_2}{d_1^2} \\ K_i &= \frac{n_0}{d_1} \\ K_d &= \frac{n_2 d_1^2 - n_1 d_1 d_2 + n_0 d_2^2}{d_1^2} \\ \tau_d &= \frac{d_2}{d_1} \end{aligned} \quad (10)$$

Prueba: La ecuación (6) se reescribe como

$$\frac{(K_d + K_p \tau_d) s^2 + (K_p + K_i \tau_d) s + K_i}{\tau_d s^2 + s}$$

Y la ecuación (9) en la forma

$$\frac{\frac{n_2}{d_1} s^2 + \frac{n_1}{d_1} s + \frac{n_0}{d_1}}{\frac{d_2}{d_1} s^2 + s}$$

Al igualar las dos ecuaciones previas queda establecido el teorema.

A continuación se va a desarrollar un método para determinar los cuatro parámetros del controlador PID en (6) mediante un procedimiento de reubicación de polos pero

usando la forma de representación (9) y luego se emplea el Teorema 1 para efectuar la conexión con la forma (6).

A partir de la ecuación característica $1 + G_{pid}(s)G_p(s) = 0$ del sistema de control a lazo cerrado (5) haciendo uso de (8) y (9) se obtiene el polinomio característico

$$\begin{aligned} d_2 s^4 + (a_1 d_2 + d_1 - b_1 n_2) s^3 \\ + (a_0 d_2 + a_1 d_1 + b_0 n_2 - b_1 n_1) s^2 + (a_0 d_1 + b_0 n_1 - b_1 n_0) s + b_0 n_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Mediante unos requerimientos de diseño pueden definirse un conjunto de polos deseados $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y de esta manera formar el polinomio a lazo cerrado deseado

$$T(s) = t_4 s^4 + t_3 s^3 + t_2 s^2 + t_1 s + t_0 \quad (12)$$

Con parámetros $t_i > 0$ conocidos.

Comentario 1: No hay pérdida de generalidad si el polinomio en (12) se define como mónico ($t_4 = 1$).

En este trabajo los polos a lazo cerrado se van a seleccionar a través de un procedimiento de garantía de polos dominantes propuesto inicialmente por (Persson y Åström, 1992) y empleado en varias aplicaciones de control. Por ejemplo, en el control de sistemas de dos grados de libertad (Teppa-Garran y col, 2023), en el control robusto a través de la optimización lineal (Teppa-Garran y Leizaola, 2024) y en el control de sistemas quasi-LPV (Teppa-Garran y col, 2025b).

Las especificaciones de desempeño en el tiempo de la salida controlada se convierten en un par de polos conjugados $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$. Su dominancia requiere que el cociente entre la parte real de los otros polos y $-\alpha$ exceda un término λ . De esta manera, todos los otros polos se encuentran a la izquierda de la línea vertical $s = -\lambda\alpha$. En nuestro caso, el polinomio $T(s)$ se puede escribir como

$$T(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \lambda\zeta\omega_n)^2 \quad (13)$$

El coeficiente de amortiguación ζ y la frecuencia natural ω_n de los polos dominantes se computan en términos del sobrepico (M_p) y del tiempo de establecimiento (T_s) deseados a través de las ecuaciones (Dorf y Bishop, 2017).

$$\begin{aligned} M_p &= e^{(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \Rightarrow \\ \zeta &= 1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(M_p)}\right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$T_s = 4/(\zeta\omega_n) \Rightarrow \omega_n = 4/\zeta T_s$$

Teorema 2: Si los coeficientes de los polinomios (11) y (12) son iguales, entonces los parámetros del controlador (6) se computan a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
K_i &= \frac{t_0 A_1}{A_2} \\
\tau_d &= b_0 t_4 K_{i1} \\
K_p &= \left(\frac{b_0 A_1}{A_2} \right)^2 \left[\frac{A_2 A_3}{(b_0 A_1)^2} - \frac{t_0 t_4}{b_0} \right] \\
K_d &= \left(\frac{b_0 A_1}{A_2} \right)^2 \left[\frac{t_0 t_4^2}{b_0} + \frac{A_2^2 A_4}{(b_0 A_1)^3} - \frac{t_4 A_2 A_3}{(b_0 A_1)^2} \right]
\end{aligned} \quad (15)$$

Con

$$\begin{aligned}
A_1 &= b_0^2 + a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2 \\
A_2 &= b_1^3 t_0 + b_0^3 t_3 - a_1 b_0^3 t_4 + b_0 b_1^2 t_1 + b_0^2 b_1 t_2 \\
&\quad - a_0 b_0^2 b_1 t_4 \\
A_3 &= b_0^2 t_1 + b_0 b_1 t_0 + a_1 b_1^2 t_0 - a_0 b_0^2 t_3 + a_0 a_1 b_0^2 t_4 \\
&\quad + a_0^2 b_0 b_1 t_4 - a_0 b_0 b_1 t_2 + a_1 b_0 b_1 t_1 \\
A_4 &= b_1^2 t_0 + b_0^2 t_2 + a_1^2 b_0^2 t_4 + b_0 b_1 t_1 - a_0 b_0^2 t_4 \\
&\quad - a_1 b_0^2 t_3 - a_0 b_0 b_1 t_3 + a_0 a_1 b_0 b_1 t_4
\end{aligned}$$

Prueba: Igualando los coeficientes de los polinomios (11) y (12) resulta en el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & -b_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & -b_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_1 \\ n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_4 \\ t_3 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

El teorema queda establecido resolviendo (16) y empleando (10).

Comentario 2: Una pregunta legítima es por qué la ecuación (6) del controlador PID se representa en la forma (9). La razón es que si la forma (6) se usa directamente para construir el polinomio característico (11). El sistema de ecuaciones es no lineal y sobredeterminado en lugar de lineal como se tiene en (16).

Comentario 3: El determinante de la matriz de coeficientes en (16) es igual a $b_0(b_0^2 + a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2)$. Para que sea nulo debe cumplirse que $b_0 = 0$. Pero esto es imposible que ocurra dado que la ganancia K en (7) también debería ser cero. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (16) tiene solución única y siempre pueden encontrarse valores de las constantes del controlador PID empleando (15) en el teorema 2.

Comentario 4: Para calcular las constantes del controlador no se emplean las ecuaciones (15). El teorema 2 es un resultado teórico para justificar el procedimiento y que siempre es posible computar las constantes del controlador. La manera de determinar las constantes del controlador PID

(6) es a través de la resolución de (16) para obtener los valores de d_2, d_1, n_2, n_1 y n_0 y posteriormente computar las constantes del controlador PID a través de (10).

3 Resultados

En esta sección se desarrollan varios ejemplos que muestran como aplicar el método de sintonización de los cuatro parámetros del controlador PID descrito en la forma (6) para plantas FOPTD. El ejemplo 1 considera un proceso de flujo de calor donde el retardo de transporte no es significativo en relación a la constante de tiempo del sistema. El segundo ejemplo trata el caso donde el retardo de transporte si es importante. Finalmente, el ejemplo 3, un sistema de tanques acoplados, muestra que el método puede extenderse para tratar otro tipo de sistemas diferentes al modelo FOPTD.

En todos los ejemplos los requerimientos de diseño para la salida controlada se definen a través de un sobrepico M_p y un tiempo de establecimiento T_s deseados y se implementan mediante un criterio de garantía de polos dominantes.

3.1 Ejemplo 1

Se considera un proceso de flujo de calor (Teppa-Garran y Leizaola, 2024) que consiste en un ducto de fibra de vidrio con un calentador y un soplador localizados en un extremo y tres sensores de temperatura a lo largo del ducto. La salida controlada corresponde a la temperatura y la señal de control es el voltaje aplicado al elemento calentador (el voltaje del soplador se mantiene constante). El modelo de temperatura en el tercer sensor (más alejado) viene dado por la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6.1}{28s + 1} e^{-0.85s} \quad (17)$$

La ecuación (8) toma la forma

$$G_p(s) = \frac{-0.2179s + 0.5126}{s^2 + 2.3887s + 0.0840} \quad (18)$$

Empleando el criterio de garantía de polos dominantes para que la salida controlada tenga un sobrepico $M_p \leq 10\%$ y un tiempo de establecimiento $T_s = 40$ s resulta en el polinomio a lazo cerrado deseado

$$T(s) = s^4 + 2.6s^3 + 1.941s^2 + 0.3384s + 0.032 \quad (19)$$

Utilizando el procedimiento de diseño propuesto, los parámetros del controlador PID en (6) vienen dados por los valores $K_p = 0.9288, K_i = 0.1126, K_d = 0.5065$ y $\tau_d = 1.9082$.

En la Fig. 2 se muestra la evolución de la temperatura en el tercer sensor cuando el perfil de temperatura de la entrada de referencia cambia en forma escalonada. La Fig. 3 ilustra la señal de control que debe aplicarse. En la simulación se

emplea para representar a la planta el modelo FOPTD dado por (17).

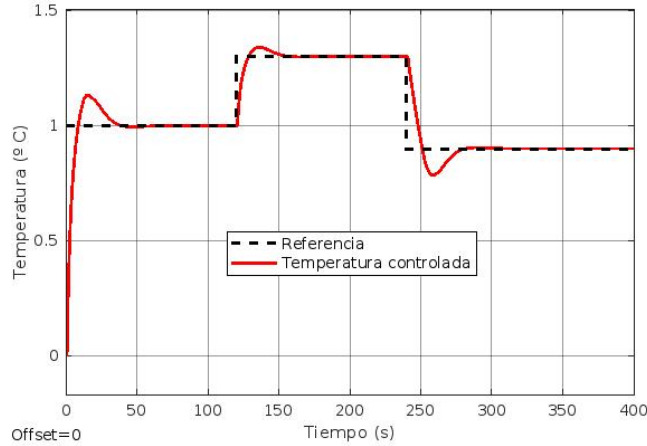


Fig. 2. Control de la temperatura del tercer sensor en el proceso de flujo de calor.

(Temperature control of the third sensor in the heat flow process)

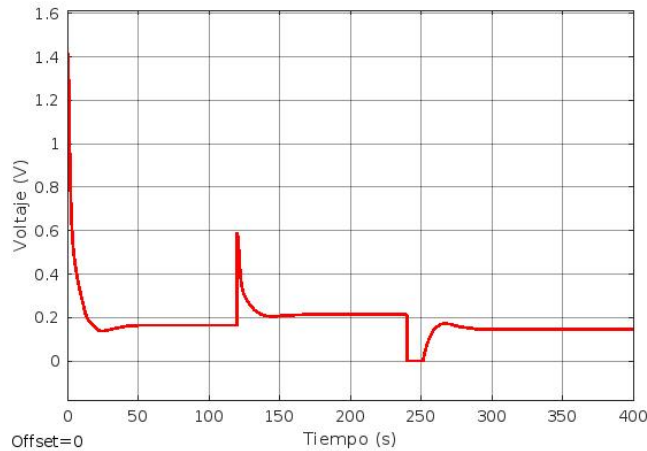


Fig. 3. Señal de control aplicada al proceso de flujo de calor.

(Input control signal applied to the heat flow process)

3.2 Ejemplo 2

En el ejemplo anterior se cumplía la relación $\theta_d/T < 1$. En este ejemplo se va a tratar la situación más exigente donde $\theta_d/T > 1$. A ese fin se considera un proceso de orden elevado descrito por el modelo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)^{10}} \quad (20)$$

Empleando el método de ajustes de mínimos cuadrados entre el proceso y la respuesta frecuencial del modelo descrito en (Hang y Bi, 1997) se obtiene la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2.72s+1} e^{-7.69s} \quad (21)$$

Y en este caso la ecuación (8) toma la forma

$$G_p(s) = \frac{-0.3676s + 0.0956}{s^2 + 0.6277s + 0.0956} \quad (22)$$

La Tabla 1 muestra los valores calculados, con el método de sintonización propuesto, de los cuatro parámetros del controlador PID utilizando el mismo tiempo de establecimiento $T_s = 60$ s y tres valores de sobrepico (5 %, 10% y 20 %).

Tabla 1. Valores de las constantes del controlador PID para diferentes condiciones de sobrepico en el ejemplo 2.
(PID controller constant values for different overshoot conditions in Example 2)

	$T_s = 60$ s		
	$M_p = 5\%$	$M_p = 10\%$	$M_p = 20\%$
K_p	0.0165	0.0815	0.2321
K_i	0.0513	0.0674	0.1039
K_d	0.2877	0.3445	0.5056
τ_d	0.8214	0.7923	0.7263

La Tabla 2 muestra las constantes calculadas para el controlador PID para tres valores de tiempo de establecimiento (40 s, 50 s y 60 s) manteniendo el sobrepico en 10 %.

Tabla 2. Valores de las constantes del controlador PID para diferentes condiciones de tiempo de establecimiento en el ejemplo 2.
(PID controller constant values for different settling time conditions in Example 2)

	$M_p = 10\%$		
	$T_s = 40$ s	$T_s = 50$ s	$T_s = 60$ s
K_p	0.5201	0.2648	0.0815
K_i	0.1245	0.0893	0.0674
K_d	3.5324	1.1600	0.3445
τ_d	0.2888	0.5060	0.7923

La Fig. 4 presenta la evolución de la salida controlada para los tres valores de sobrepico considerados en la Tabla 1 y la Fig. 5 cuando se varía el requerimiento de tiempo de establecimiento según aparece en la Tabla 2. En ambos casos se aprecia que las respuestas son influenciadas por las especificaciones de diseño. La Fig. 6 exhibe el comportamiento de la salida controlada para un controlador PID de cuatro parámetros sintonizados por el método propuesto y un controlador PID con las constantes proporcional, integral y derivativa sintonizadas conforme a la popular regla de Ziegler-Nichols y luego el parámetro τ_d ajustado según la relación empírica (4). Puede apreciarse que este último resultado no es satisfactorio. Esto no es algo inusual, generalmente este tipo de reglas suministran unos valores preliminares que mediante simulaciones posteriores se van ajustando hasta encontrar un conjunto de constantes adecuado. Sin embargo, resulta evidente que los primeros valores que generó el método propuesto ya son satisfactorios. En la Figura 7, aparecen las señales de

control para los dos esquemas de sintonización. Ambos exhiben niveles de amplitud adecuados.

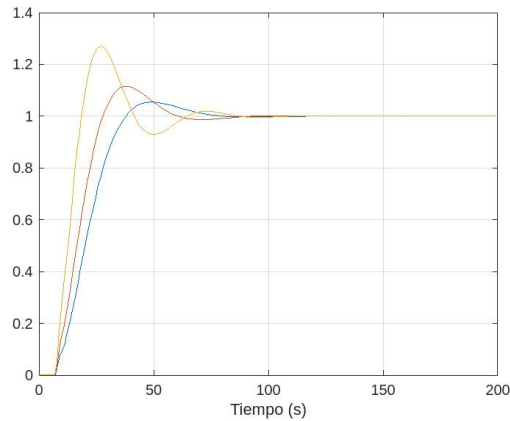


Fig. 4. Salida controlada en el Ejemplo 2 para diferentes requerimientos de sobrepico considerados en la Tabla 1.
(Controlled output in Example 2 for different overshoot requirements considered in Table 1)

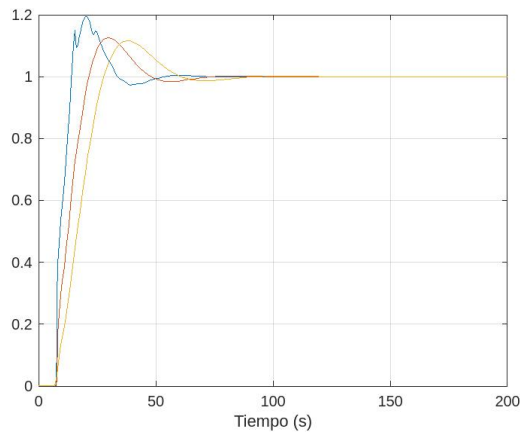


Fig. 5. Salida controlada en el Ejemplo 2 para diferentes requerimientos de tiempo de establecimiento considerados en la Tabla 2.
(Controlled output in Example 2 for different settling time requirements considered in Table 2)

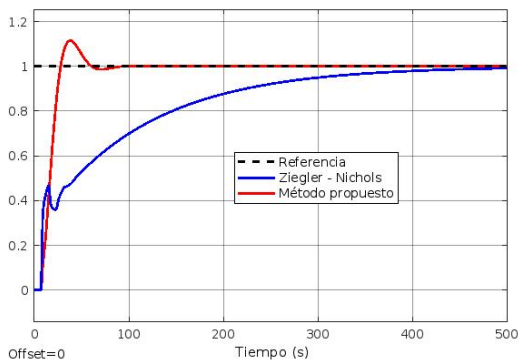


Fig. 6. Salida controlada en el Ejemplo 2 para controladores PID sintonizados por el método propuesto y por la regla de Ziegler-Nichols.
(Controlled output in Example 2 for PID controllers tuned by the proposed method and by the Ziegler-Nichols rule)

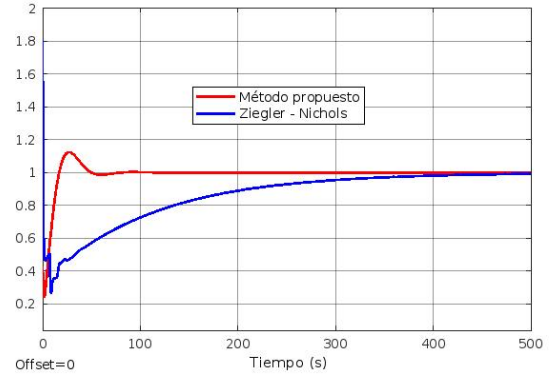


Fig. 7. Señal de control en el Ejemplo 2 para controladores PID sintonizados por el método propuesto y por la regla de Ziegler-Nichols.
(Control signal in Example 2 for PID controllers tuned by the proposed method and by the Ziegler-Nichols rule)

3.3 Ejemplo 3

Un modelo no lineal de espacio de estados de un sistema de dos tanques acoplados se presenta en la ecuación (23) (Teppa-Garran y col, 2025b). El vector de estados $[x_1(t) \ x_2(t)]^T$ es igual a los niveles de los tanques, la señal de control $u(t)$ corresponde al voltaje de entrada aplicado a una bomba y la salida $y(t)$ se selecciona como el nivel del segundo tanque. Los niveles de los tanques se encuentran en el intervalo $[0, 30]$ cm y el voltaje de la bomba en $[0, 22]$ V.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.904\sqrt{x_1(t)} + 0.258u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0.904\sqrt{x_1(t)} - 0.508\sqrt{x_2(t)} \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned} \quad (23)$$

Linealizando (23) en el punto de operación (15, 15) cm se obtiene la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.0302}{s^2 + 0.183s + 0.0077} \quad (24)$$

Puede apreciarse que es de la forma (8) con $b_1 = 0$, $b_0 = 0.0302$, $a_1 = 0.183$ y $a_0 = 0.0077$. Por lo que puede implementarse un PID de la forma (6) para controlar el sistema de tanques acoplados y sintonizar sus constantes utilizando el método propuesto.

Para $M_p = 5\%$ y $T_s = 80$ s resultan las constantes del controlador $K_p = 0.5528$, $K_i = 0.0261$, $K_d = 0.7299$ y $\tau_d = 2.3981$.

La Fig. 8 muestra el seguimiento del nivel en el segundo tanque cuando se aplica una entrada de referencia que cambia el punto de ajuste del nivel en los instantes $t = 150$ s y $t = 300$ s. Se aprecia que el seguimiento es satisfactorio y debe destacarse que en la simulación se utiliza el modelo no lineal del sistema de tanques acoplados dado por la ecuación (23). La Fig. 9 ilustra la evolución de

la señal de control y puede apreciarse que se encuentra dentro de los límites de actuación del voltaje de la bomba.

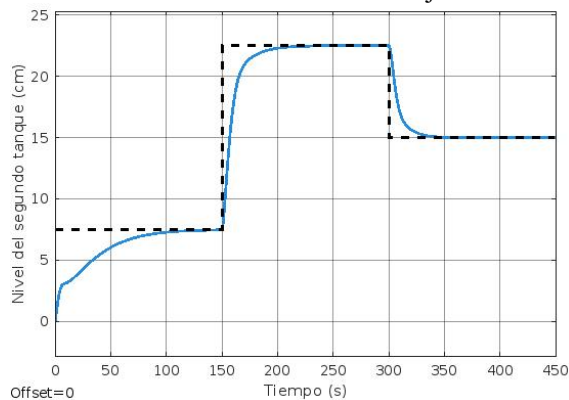


Fig. 8. Seguimiento del nivel del segundo tanque para varios cambios en el punto de ajuste.

(Tracking the second tank level for different setpoint changes)

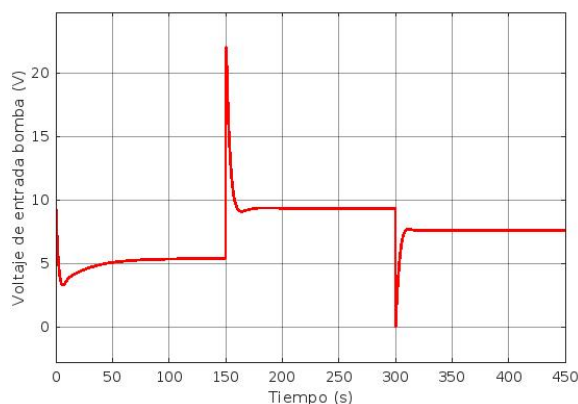


Fig. 9. Voltaje de entrada aplicado a la bomba en el sistema de tanques acoplados.

(Input voltage applied to the pump in the coupled tank system)

Conclusiones

En este trabajo se propone un método de sintonización de los cuatro parámetros de un controlador PID expresado en la forma paralela dada por la ecuación (6). El método aplica para un modelo de la planta de primer orden con retardo de transporte. Las especificaciones de desempeño se definen a través de un criterio de garantía de polos dominantes mediante la selección de un sobrepico y un tiempo de establecimiento deseados en la salida controlada del sistema. Se consideraron ejemplos donde el retardo de transporte era menor y mayor que la constante de tiempo del sistema y en ambos casos se obtuvieron resultados satisfactorios. También se muestra que el método puede extenderse a otro tipo de plantas como fue el caso de un sistema de tanques acoplados cuya dinámica es no lineal.

En uno de los ejemplos se observa que los procedimientos actuales de sintonización que se concentran inicialmente en la sintonización de las constantes proporcional, integral y derivativa mediante el empleo de

conocidas reglas y el posterior ajuste del parámetro del filtro de derivación utilizando relaciones predefinidas puede resultar en un desempeño inadecuado.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo brindado por el Programa de Investigación de la Universidad Metropolitana en Caracas, Venezuela a través del proyecto número PI-A-01-23-24.

Referencias

- Ariba, Y., Gouaisbaut, F., y Labit, Y. (2009). Feedback control for router management and TCP/IP network stability. *IEEE Transactions on Network and Service Management*, 6(4), 255-266.
- Åström, K. y Hagglund, T. (1995). *PID controllers: Theory, design and tuning*. NC: Instrument Society of America, Research Triangle Park.
- Atherton, D. P., y Majhi, S. (1999, June). Limitations of PID controllers. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)* (Vol. 6, pp. 3843-3847). IEEE.
- Bennett, S. (1993). Development of the PID controllers. *IEEE Control System Magazine*, 13(2), pp. 58 – 65.
- Bresch-Pietri, D., Chauvin, J., y Petit, N. (2014). Prediction-based stabilization of linear systems subject to input-dependent input delay of integral-type. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(9), pp. 2385-2399.
- Chien, K., Hrones, J. y Reswick, J. (1952). On the automatic control of generalised passive systems. *Transactions of the ASME*, pp. 175 -185.
- Cohen, G. y Coon, G. (1953). Theoretical considerations of retarded control. *Transactions of the ASME*, pp. 827 - 834.
- Desborough, L. y Miller, R. (2002). Increasing customer value of industrial control performance monitoring: Honeywell's experience, In *6th International Conference on Chemical Process Control*, AIChE Symposium Series, Vol. 98(326).
- Dorf, R., Bishop, R., (2017). *Modern control systems*. Pearson Prentice Hall.
- El-Deen, A. T., Mahmoud, A. H., y El-Sawi, A. R. (2015). Optimal PID tuning for DC motor speed controller based on genetic algorithm. *Int. Rev. Autom. Control*, 8(1), pp. 80-85.
- Goodwin, G. C., Graebe, S. F., y Salgado, M. E. (2001). *Control system design* (Vol. 240). Upper Saddle River: Prentice Hall.
- Gu, K., Chen, J., y Kharitonov, V. L. (2003). *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media.
- Gunawan, S. A., Yuwono, Y. C. H., Pratama, G. N. P., Cahyadi, A. I., & Winduratna, B. (2018, August).

- Optimal fractional-order PID for DC motor: Comparison study. In *2018, the 4th International Conference on Science and Technology (ICST)* (pp. 1-6). IEEE.
- Hang, C., Åström, K. y Ho, W. (1991). Refinements of the Ziegler–Nichols tuning formula. *IEE Proceedings-D*, 138(2), pp. 111 – 118.
- Hang, C. C. y Bi, Q. (1997). A frequency domain controller design method. *Chemical Engineering Research and Design*, 75(1), pp. 64-72.
- Hanta, V., y Procházka, A. (2009). Rational approximation of time delay. *Institute of Chemical Technology in Prague. Department of computing and control engineering. Technická*, 5(166), p. 28.
- Kumar, V., y Rana, K. P. S. (2016). Some investigations on hybrid fuzzy IPD controllers for proportional and derivative kick suppression. *International Journal of Automation and Computing*, 13, pp. 516-528.
- Lendek, A., y Tan, L. (2021). Mitigation of derivative kick using time-varying fractional-order PID control. *IEEE Access*, 9, 55974-55987.
- Lee, J., Cho, W., y Edgar, T. F. (2014). Simple analytic PID controller tuning rules revisited. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 53(13), pp. 5038-5047.
- Mantz, R. y Taconi, E. (1989). Complementary rules to Ziegler-Nichols: rules for a regulating and tracking controller. *International Journal of Control*, 49(5), pp. 1465 – 1471.
- O'Dwyer, A. *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, 3rd ed.; Imperial College Press: London, UK, 2009.
- Persson, P. y Åström, K. (1992). Dominant pole design a unified view of PID controller tuning, *IFAC Proceedings Volumes*, 25(14), pp. 377-382.
- Pessen, D. (1994). A new look at PID controller tuning. *Journal of Dynamic Systems, Measures and Control*, 116, pp. 53 – 557.
- Richard, J. P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10), pp. 1667-1694.
- Seborg, D., Edgar, T. y Mellichamp, D. (1989). *Process Dynamics and Control*. New York: Wiley.
- Teppa-Garran, P. y Garcia, G. (2017). Design of an Optimal PID controller for a coupled tanks system employing ADRC, *IEEE Latin America Transactions*, 15(2), pp. 189-192.
- Teppa-Garran, P., Arzola, F., y Elyas, E. (2021). Ajuste óptimo de controladores PID mediante Matlab/Simulink. *Anales De Ciencias Básicas, Físicas Y Naturales*, (37), pp. 15–32.
- Teppa-Garran, P., Faggioni, M y Garcia, G. (2023). Optimal tracking in two-degree-of-freedom control systems: Coupled tank system. *Journal of Applied Research and Technology*, 21(4), pp. 560-570.
- Teppa-Garran, P. y El Gharib, G. (2024). Sintonización óptima asistida por computadora de controladores PI para sistemas no lineales con restricciones de amplitud en el actuador. *Ciencia e Ingeniería*, 45(1), pp. 1-10.
- Teppa-Garran, P. y Leizaola I. (2024). Control robusto de un proceso de flujo de calor empleando la optimización lineal. *Ciencia e Ingeniería*, 45(3), pp.289-294.
- Teppa-Garran, P., Bohórquez, G., y Garcia, G. (2025). Optimal tuning of PID-type controllers. *Journal of Applied Research and Technology*, 23(2), pp. 145–154.
- Teppa-Garrán, P., Muñoz-de Escalona, D., y Zambrano, J. (2025). Liquid level tracking for a coupled tank system using quasi-LPV control. *Ingenius*, (33), pp. 15-26.
- Wang, F. S., Juang, W. S., y Chan, C. T. (1995). Optimal tuning of PID controllers for single and cascade control loops. *Chemical Engineering Communications*, 132(1), pp. 15-34.
- Zhu, X. (2009). Practical PID controller implementation and the theory behind it. In *2009, Second International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems* (pp. 58-61). IEEE.
- Zhuang, M. y Atherton, D. (1993). Automatic tuning of optimum PID controllers. *IEE Proceedings-D*. 140(3), pp. 216 – 224.
- Ziegler, J. y Nichols, N. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, 64, pp. 759 -768.

Recibido: 14 de febrero de 2025

Aceptado: 20 de junio de 2025

Pedro Teppa-Garrán; Ingeniero Electricista UNIMET, MSc Ingeniería Electrónica, USB. MSc Matemáticas, USB. PhD Sistemas de Control, Université Paul Sabatier, Francia. Postdoctorado en Sistemas de Control, LAAS – CNRS, Francia. Profesor Titular UNIMET.
 <https://orcid.org/0000-0001-6384-3185>

Luis Caraballo; Ingeniero Electricista UNIMET. Correo electronico:c.luis@correo.unimet.edu.ve
 <https://orcid.org/0009-0004-5507-272X>