

Enfoque de interpolación analítica en la técnica de ganancia programada para el control de sistemas lineales de parámetros variantes

An analytical interpolation approach for gain scheduling control of linear parameter varying systems

Pedro, Teppa-Garrán

Departamento de Procesos y Sistemas, Universidad Simón Bolívar, Apdo. 89000
Valle de Sartenejas, Baruta, Edo.Miranda, Venezuela,
ptepa@usb.ve

José, Andrade-Da Silva

Control and Instrumentation Research Group, Department of Engineering, University of Leicester,
University Road, Leicester, LE1 7RH, England - U.K

Recibido: 29-01-2008

Revisado: 20-01-2009

Resumen

Las ecuaciones que describen un sistema lineal de parámetros variantes (LPV) son interpretadas como una familia de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) provenientes de mediciones en tiempo real del vector de parámetros. Esto permite proponer una estrategia de control del tipo ganancia programada. El procedimiento propuesto se concentra particularmente en el mecanismo de interpolación entre los diferentes controladores LTI suministrados por la técnica de ganancia programada y diseñados para cada miembro de la familia de modelos LTI. Se plantea una metodología de interpolación inspirada en modelos difusos Takagi – Sugeno con la ventaja de no necesitar, en absoluto, de la maquinaria difusa (definición de conjuntos difusos, establecimiento de la base de reglas, adopción del mecanismo de inferencia, entre otros). Se consideran los problemas de regulación, seguimiento e información parcial. Un ejemplo numérico muestra no solo la viabilidad de la técnica sino su efectividad.

Palabras clave: Sistemas LPV, ganancia programada, modelos difusos takagi – sugeno.

Abstract

A Linear Parameter Varying (LPV) system is represented by a family of Linear Time Invariant (LTI) systems where the vector of parameters is measured in real time. The interpolation mechanism of LTI controllers in the Gain Scheduling technique is addressed in this paper. An interpolation approach based upon Takagi-Sugeno fuzzy models is developed. The main attribute of the proposed approach is that the fuzzy machinery (fuzzy sets, rule base, inference mechanism and so forth) is not required at all. Regulation, tracking and partial information problems have been dealt with. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed approach.

Key words: LPV Systems, gain scheduling, takagi – sugeno fuzzy models.

1 Introducción

Los sistemas lineales de parámetros variantes (LPV) son sistemas que dependen de un vector de parámetros reales variantes en el tiempo $\theta(t)$. Tal modelo permite tomar

en cuenta las variaciones paramétricas de un sistema dinámico (masa, temperatura, concentración, velocidad, presión, ángulo de ataque de un avión, entre otros). Estos parámetros corresponden a señales exógenas que no se conocen de antemano pero que se encuentran confinadas en el interior de un conjunto compacto conocido, por lo que pue-

den medirse en tiempo real.

Los sistemas LPV han sido objeto en los últimos años de una considerable atención tanto en los aspectos de análisis como de síntesis. Las técnicas de análisis caen en términos muy generales en dos categorías: la de la pequeña ganancia escalada (Apkarian y Gahinet, 1995, Packard, (1994) y la de los sistemas disipativos (Becker y Packard, 1994).

En el plano de la síntesis, las contribuciones están estrechamente vinculadas a las interpretaciones que se hacen del vector de parámetros. En este contexto, los sistemas LPV pueden considerarse a través de tres interpretaciones (Apkarian y col, 1995): (i) Sistemas lineales sujetos a incertidumbres $\theta(t)$. (ii) Familia de sistemas lineales. (iii) Combinación de las dos situaciones anteriores.

La necesidad de una metodología de síntesis robusta para sistemas LPV fue planteada originalmente por (Shamma, 1992). Por otra parte, en (Apkarian y Gahinet, 1995, Becker y col, 1993, Becker y Packard, 1994 y Becker y col, 1994), el método de síntesis de controladores H_∞ es aplicado a los sistemas LPV empleando la teoría de estabilidad de Lyapunov y el formalismo de las LMI's. Estas ideas se extendieron en (Fromion y col, 1996) para el análisis y en (Wu y col, 1996) para la síntesis, a través del empleo de funciones de Lyapunov dependientes de parámetros, obteniéndose un procedimiento potencialmente menos conservador que, sin embargo, enfrenta la dificultad de que la solución, en general, sólo puede encontrarse de manera aproximada. El método H_∞ , aunque es el más utilizado, no es el único que permite la síntesis de controladores LPV en un formato LMI, también se utiliza el método LQG (Chilali y Gahinet, 1995) y la síntesis a través de valores singulares estructurados (síntesis μ) (Helmerson, 1995). Los Sistemas LPV modelados a través de una dependencia de fracciones lineales en el vector de parámetros han sido estudiados en (Packard, 1994, Scherer, 2001, Scorletti y El Ghaoui, 1998). Este tipo de dependencia ha conducido a condiciones LMI manejables desde un punto de vista computacional. En (Teppa, 2008) el sistema LPV se representa en el espacio de estado a través de incertidumbres politópicas convexas. Lo que permite la utilización de la noción de estabilidad cuadrática (Barmish, 1985, Bernussou y Garcia, 1993). Los resultados obtenidos se expresan en términos de un conjunto reducido de condiciones LMI y de pocas incógnitas, por lo que el manejo computacional es bastante eficiente. Se estudian los problemas de estabilidad, estabilizabilidad, reubicación de polos, seguimiento, diseño de observadores y realimentación estática de la salida.

El presente trabajo considera al sistema LPV descrito mediante una familia de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) provenientes de mediciones en tiempo real del vector de parámetros. La disponibilidad del vector de parámetros y la interpretación del sistema LPV como una familia de modelos LTI es explotada a fin de proponer una estrategia de control del tipo *Ganancia Programada* (Shamma, 1992, Rugh

y Shamma, 2000, Bruzelius y col, 2002). Ahora bien, dentro de la técnica de Ganancia Programada, la metodología se concentra en el aspecto de interpolación entre los diferentes controladores LTI, diseñados para cada miembro de la familia de modelos LTI que describe al sistema LPV original.

Mucha de la literatura relacionada al tópico de ganancia programada (Kaminer y col, 1995, Lawrence y Rugh, 1995, Rugh, 1991, Shamma y Athans, 1990) asumen la existencia de controladores interpolados en forma continua. Ignorándose el proceso de interpolación. Una excepción es (Shahruz y Beh-tash, 1992) donde se introducen unos algoritmos muy bien sustentados teóricamente que permiten el diseño de ganancias de realimentación de estado interpoladas en forma lineal para resolver un problema de asignación de autovalores. Sin embargo, se limitan al caso de un solo parámetro en el sistema LPV y la extensión al caso vectorial no parece evidente. Algunos esquemas de interpolación particulares también han sido propuestos. Por ejemplo, en (Nichols y col, 1993) la ganancia, los ceros y los polos de la función de transferencia del controlador se interpolan en forma lineal. En (Hyde y Glover, 1993) se interpolan linealmente las ganancias de realimentación de estado y del observador de estado. En (Reichert, 1992), un conjunto de controladores H_∞ son interpolados a través de la interpolación lineal de las soluciones de las ecuaciones de Riccati. Todos estos métodos tienen una base intuitiva y funcionan satisfactoriamente en las aplicaciones específicas consideradas.

En este trabajo se plantea una estrategia de interpolación analítica, inspirada en modelos difusos Takagi – Sugeno (Takagi y Sugeno, 1985), con la ventaja de no necesitar en absoluto de la maquinaria difusa (definición de conjuntos difusos, establecimiento de la base de reglas, adopción del mecanismo de inferencia, entre otros). Esta estrategia permite en forma natural la interpolación continua de un conjunto de controladores diseñados para cada modelo LTI. Son resueltos los problemas de regulación, seguimiento e información parcial.

El artículo está organizado de la manera siguiente. La sección 2 aborda una serie de nociones básicas asociadas a los sistemas LPV. En la sección 3 se considera el problema de control de un sistema LPV empleando la técnica de ganancia programada. Se muestra como representar el sistema LPV a través de una familia de modelos LTI provenientes de las combinaciones extremas del vector de parámetros. Igualmente se define el esquema de interpolación analítico que reemplaza al mecanismo difuso Takagi – Sugeno. Las secciones 4 y 5 contemplan los problemas de seguimiento e información parcial del sistema LPV, respectivamente. Finalmente, la sección 6 muestra un ejemplo numérico sencillo de un sistema con dos parámetros variables.

2 Nociones básicas de sistemas LPV

Un sistema LPV depende explícitamente de un vector de parámetros variante en el tiempo $\theta(t)$ que puede medir-

se en tiempo real. El mismo es descrito para todo $t \geq 0$ por la ecuación

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t), \quad (1)$$

donde $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ es el vector de control y $t \in [0, \infty]$ es la variable independiente de tiempo. El vector de parámetros es tal que $\theta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$. Las matrices de estado y entrada son respectivamente $A: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$. El modelo evoluciona en función de una trayectoria paramétrica admisible. Los puntos que conforman la trayectoria admisible pertenecen en todo instante de tiempo al conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, esto es, el vector de parámetros satisface para todo tiempo t la condición

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in \Omega \\ &= \left\{ \theta(t) : \theta_i^- \leq \theta_i(t) \leq \theta_i^+ \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \right\} \subset \mathbb{R}^r, \end{aligned} \quad (2)$$

con θ_i^- y θ_i^+ las cotas inferior y superior del parámetro $\theta_i(t)$. El sistema LPV puede interpretarse como una generalización de un sistema LTI cuando la trayectoria paramétrica admisible es constante $\theta(t) = \theta_0$. Igualmente, un sistema LPV puede verse como una generalización de un sistema lineal variante en el tiempo (LTV). En este último caso, para una trayectoria dada $\sigma(t)$ del parámetro $\theta(t)$ en Ω , el sistema LPV autónomo se escribe como

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) = \tilde{A}(t)x(t), \quad (3)$$

cuya solución, en términos de la matriz transición de estado $\Phi(t, t_0)$ y el estado inicial $x_0 = x(t_0)$, se expresa como

$$x(t) = \Phi_{\sigma(t)}(t, t_0)x_0. \quad (4)$$

De aquí se desprende que el sistema LPV tendrá, bajo estas condiciones, propiedades similares a los sistemas LTV. La figura 1 resume las relaciones existentes entre las tres clases de sistemas lineales.

3 Ganancia programada de sistemas LPV:

• Interpolación analítica

Con el propósito de desarrollar la metodología de ganancia programada para controlar sistemas LPV se considera un sistema de esta clase descrito por (1). Las combinaciones extremas de los parámetros en el interior del conjunto compacto definido en (2) se representan a través

de los vectores.

$$\theta^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1^{(i)}(t) & \dots & \theta_r^{(i)}(t) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

A partir de los vectores $\left\{ \theta^{(i)} \right\}_{i=1}^N$ se construyen modelos locales (LTI) para el sistema LPV haciendo

$$(A_i, B_i) = (A(\theta^{(i)}), B(\theta^{(i)})) \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$



Fig.1. Diferentes modelos lineales

La técnica de ganancia programada es empleada normalmente en el control de plantas no lineales cuando se conoce la relación entre la dinámica de la planta y las condiciones de operación y donde un modelo sencillo lineal invariante en el tiempo no es suficiente para propósitos de control. Se adaptará la metodología general de programación de ganancias a los efectos de controlar los sistemas LPV. Tal metodología sería:

- Representar el sistema LPV dado por (1) en las combinaciones extremas del vector de parámetros (5), obteniéndose un conjunto de sistemas LTI de la forma (6).
- Determinar un controlador lineal para cada modelo LTI a través de técnicas convencionales de síntesis de controladores lineales e invariantes en el tiempo.
- Elaborar una ley de control global, que puede consistir por ejemplo, en la interpolación adecuada de los controladores lineales o en la conmutación de éstos.
- Asegurar la estabilidad y el desempeño del sistema LPV a través de simulaciones posteriores.

En el paso (ii) se empleará la realimentación lineal de las variables de estado en la síntesis de los controladores locales (Brogan, 1991, Chen, 1999). En el paso (iii) se utilizará un esquema de interpolación analítica inspirado en lo que sería un modelo difuso Takagi – Sugeno del sistema LPV (1). A ese fin, se considera una descripción en el dominio compacto paramétrico Ω del sistema LPV a través de un conjunto de sistemas LTI dados por (6). La i – ésima

regla difusa $R_d^{(i)}$ de la base de reglas de un modelo Takagi – Sugeno de (1) es:

$$R_d^{(i)}: \quad \underline{Si} \ x_1(t) \text{ es } FS_1^{(i)} \text{ and ... and } x_n(t) \text{ es } FS_n^{(i)} \\ \underline{Entonces} \ \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \ i = 1, \dots, N$$

Las variables de decisión que aparecen en el antecedente de cada regla difusa, corresponden a las componentes del vector de estado, $u(t)$ es el vector de control, N el número de reglas y los términos $FS_j^{(i)}$ denotan conjuntos difusos. Se define

$$w^{(i)}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = w^{(i)}(x(t)) \\ = \prod_{j=1}^n \pi_j^{(i)}(x_j(t)) = w^{(i)} \quad (7)$$

donde $\pi_j^{(i)}: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ es la función de membresía del conjunto difuso $FS_j^{(i)}$. Dado un par $(x(t), u(t))$ el sistema difuso resultante se infiere como el promedio ponderado de los modelos locales y tiene la forma.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N w^{(i)}(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^N w^{(i)}} \quad (8)$$

si se hace

$$\rho_i = \frac{w^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w^{(i)}} \quad (9)$$

la ecuación (8) se transforma en

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ = \left(\sum_{i=1}^N \rho_i A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^N \rho_i B_i \right) u(t)$$

o sea,

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \quad (10)$$

La ecuación (10) representa formalmente un sistema politópico, ya que se cumple

$$\rho_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \rho_i = 1.$$

Estas ideas asociadas al mecanismo de interpolación del modelo Takagi – Sugeno (promedio ponderado de los modelos locales) son empleadas en la formulación de *un esquema analítico de interpolación* que es independiente de toda la maquinaria difusa vinculada con los modelos Takagi – Sugeno. A ese fin, se retoma el sistema LPV (1) considerándose las combinaciones extremas del vector de parámetros (Ec. 5). Inmediatamente, se determinan los modelos LTI (Ec. 6) y se diseña un controlador por realimentación de estado $u(t) = K_i x(t)$ para cada modelo local.

El cómputo de los controladores locales se hace garantizando que los autovalores de la matriz de estado a lazo cerrado $(A_i + B_i K_i)$ estén contenidos en el interior de la región $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ de la Fig. (2).

La zona del plano complejo donde se localizan los autovalores define el desempeño del sistema en términos de velocidad de respuesta y amortiguamiento.

El parámetro α regula la velocidad de la respuesta, β el amortiguamiento y γ las dinámicas más rápidas, esto último es un factor crítico en la especificación de los actuadores del sistema de control.

El vector de parámetros $\theta(t)$ se emplea para construir un controlador global que interpole los controladores locales. Para todo instante de tiempo t , el vector $\theta(t)$ puede expresarse como

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \theta^{(i)}(t), \quad \sum_{i=1}^N \mu_i(t) = 1 \quad (11)$$

Los pesos $\mu_i(t)$ pueden calcularse para todo instante de tiempo t a través del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mu_1(t) \theta^{(1)}(t) + \dots + \mu_N(t) \theta^{(N)}(t) = \theta(t) \\ \mu_1(t) + \dots + \mu_N(t) = 1 \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{bmatrix} \theta^{(1)}(t) & \dots & \theta^{(N)}(t) \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resultando

$$\begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^{(1)}(t) & \dots & \theta^{(N)}(t) \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \theta(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde $[\cdot]^+$ denota la pseudoinversa de la matriz.

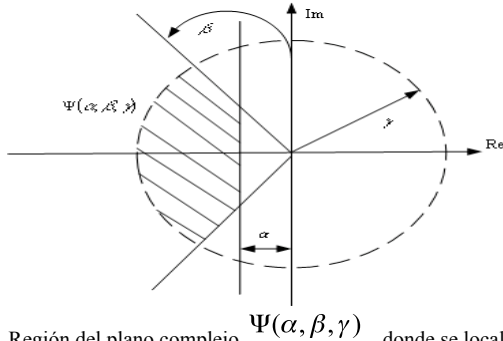


Fig. 2. Región del plano complejo $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ donde se localizan los autovalores a lazo cerrado de cada modelo local.

La ecuación (12) corresponde al esquema de interpolación analítico que se utilizará en este trabajo. El sistema LPV (1) puede aproximarse entonces, combinando los modelos locales según

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^N \mu_i(t) A_i x(t) + \sum_{i=1}^N \mu_i(t) B_i u(t) \\ &= \tilde{A}(t)x(t) + \tilde{B}(t)u(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Empleando los mismos pesos, una matriz de realimentación de estado global $\tilde{K}(t)$ se construye a partir de las matrices de realimentación de estado locales calculadas con antelación, esto es

$$\tilde{K}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) K_i, \quad u(t) = \tilde{K}(t)x(t), \quad (14)$$

donde los pesos $\mu_i(t)$ se calculan resolviendo (12) de manera continua en el tiempo. Esto resulta en el sistema a lazo cerrado siguiente

$$\dot{x}(t) = (\tilde{A}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{K}(t))x(t). \quad (15)$$

4 Problema de seguimiento

El problema de seguimiento consiste en determinar una realimentación de estado (14) de manera que la salida

$$y(t) = C(\theta(t))x(t) \in \mathbb{R}^p,$$

Siga asintóticamente una señal de referencia $r(t) \in \mathbb{R}^p$. El seguimiento es un problema de arquitectura (estructura del sistema de control). Por lo que debe imponerse en la solución. Con este propósito, el sistema LPV se modifica como indica la figura (3).

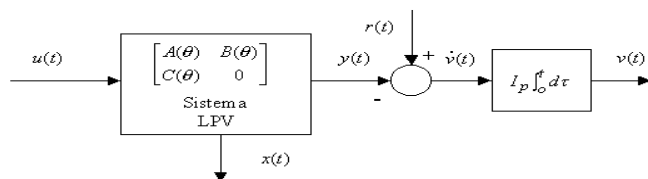


Fig. 3. Sistema LPV aumentado para resolver el problema de seguimiento.

Con la inclusión del integrador se garantiza el seguimiento con error de estado estacionario nulo de señales constantes. Esto no es más que una aplicación del principio del modelo interno (Francis y Wonham, 1976). “Para seguimiento asintótico perfecto, la función de transferencia a lazo abierto debe contener un modelo interno de los polos inestables de la señal de referencia”. No es difícil extender el principio del modelo interno a otro tipo de entradas (rampa, parábola, sinusoides, entre otras).

El sistema LPV aumentado por el vector de estado.

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) & v(t) \end{bmatrix}^T,$$

es descrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} r(t) \end{aligned} \quad (16)$$

Considerando ahora los valores extremos del vector de parámetros $\theta(t)$ en el conjunto compacto (2). La Ec. (16) se transforma en

$$\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} r(t), \quad (17)$$

con

$$\begin{aligned} A_a &= \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}, \\ B_a &= \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

La ley de control se expresa como

$$u(t) = K_a x_a(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \begin{bmatrix} K_i & K_{I_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Al sustituir la Ec. (19) en la Ec. (17) resulta un problema de estabilización o regulación como el de la Ec. (15) donde $\tilde{A} = A_a$, $\tilde{B} = B_a$, $\tilde{K} = K_a$. Este problema se resuelve de manera que los autovalores de la matriz $(A_a + B_a K_a)$ estén contenidos en el interior de la región $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$. A partir de la ganancia aumentada de realimentación obtenida

$$K_a = \begin{bmatrix} K_i & K_{I_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}. \quad (20)$$

Se extraen las matrices $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $K_{I_i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

5 Problema de información parcial

Hasta ahora se ha asumido la disponibilidad de todos los estados de la planta para los efectos de diseñar el controlador. Sin embargo, en la práctica, lo anterior no ocurre generalmente. Para corregir esa dificultad, en este apartado se considera el diseño de un observador de estado para el sistema LPV. Este último debe cumplir con el requerimiento de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = x(t) - \bar{x}(t) = 0, \quad (21)$$

donde $\bar{x}(t)$ denota el vector de estado estimado por el observador LPV.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A(\theta(t))\bar{x}(t) + B(\theta(t))u(t) \\ &+ L(\theta)[y(t) - C(\theta(t))\bar{x}(t)] \end{aligned} \quad (22)$$

Dentro de un esquema de ganancia programada, la matriz del observador $L(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ se va a reemplazar mediante la combinación adecuada de observadores diseñados a nivel local. Las ganancias constantes de los observadores locales se denotan por L_i y se calculan de forma que los autovalores de las matrices $(A_i - L_i C_i)$ se encuentren en la región compleja de la Fig. (2). El observador global se representa conforme a la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \{A_i x(t) + B_i u(t) \\ &+ L_i C_i (x(t) - \bar{x}(t))\} \end{aligned} \quad (23)$$

La ley de control para estabilizar el sistema LPV consiste ahora en la realimentación de los estados estimados, esto es,

$$u(t) = \tilde{K}(t)\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) K_i \bar{x}(t). \quad (24)$$

Sustituyendo la Ec. (24) en las ecuaciones (13) y (23) se obtiene el sistema a lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_i(t) \mu_j(t) \tilde{A}_{ij} \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

con

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B_i K_j \\ F_i C_j & A_i + B_i K_j - F_i C_j \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Introduciendo la transformación no singular

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

se obtiene la ecuación

$$\hat{A}_{i,j} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - F_i C_j \end{bmatrix}. \quad (28)$$

De donde se desprende que se cumple el principio de separación (Brogan, 1991, Chen, 1999) para el problema planteado. En la Fig. (4) se muestra un diagrama de bloques del esquema regulador – observador para el sistema LPV.



$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) L_i \quad \mu_i(t)$$

$$\bar{x}(t)$$

$$\tilde{K} = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) K_i$$

Fig. 4. Esquema regulador – observador para el sistema LPV.

6 Ejemplo numérico

Considérese un sistema LPV con dos parámetros variables descrito por la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_1(t) & -\theta_2(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (29)$$

Los parámetros variables están confinados $\forall t \geq 0$ a los intervalos $\theta_1(t) \in [-1, 1]$ y $\theta_2(t) \in [-2, 2]$. El conjunto de variación paramétrica se muestra en la Fig. (5).

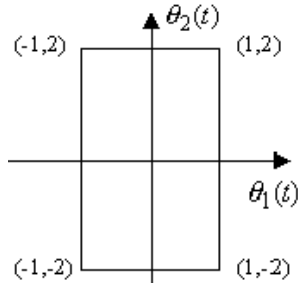


Fig. 5. Conjunto compacto de variación paramétrica

Las combinaciones extremas de los parámetros corresponden a

$$\left\{ \theta^{(i)} \right\}_{i=1}^4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}. \quad (30)$$

Por lo que los sistemas LTI asociados a cada vértice son

$$\{A_i, B_i\} = \left\{ \begin{aligned} &A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ &A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Los sistemas asociados a los vértices 2, 3 y 4 son inestables. Para efectos de la simulación se supone que el vector de parámetros es

$$\theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t)]^T = [\cos(w_1 t) \quad 2 \cos(w_2 t)]^T, \quad (32)$$

como se aprecia en la Fig. (6).

Para cada sistema (31) se diseña un controlador lineal por realimentación de las variables de estado (Brogan, 1991, Chen, 1999) de forma que los polos a lazo cerrado de cada sistema local (vértices en Fig. (5)) sean $\{-4 \pm j2\}$. Esto resulta en las ganancias de realimentación

$$\begin{aligned} K_1 &= [19 \quad 6] & K_2 &= [19 \quad 10] \\ K_3 &= [21 \quad 6] & K_4 &= [21 \quad 10] \end{aligned} \quad (33)$$

Posteriormente se implementa la ley de control (14) empleando los pesos calculados a través de la resolución continua para todo instante de tiempo del sistema de ecuaciones (12). Los pesos resultantes se aprecian en la Fig. (7), en la misma se evidencia que para todo instante de tiempo t se cumple la condición

$$\mu_1(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t) + \mu_4(t) = 1.$$

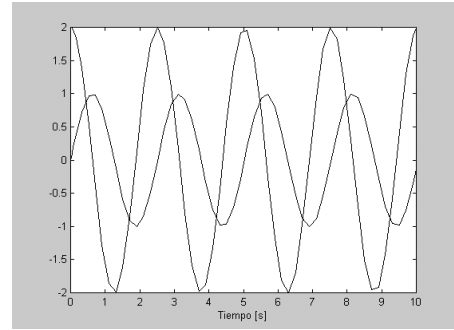


Fig. 6. Variación de parámetros inciertos dentro de las cotas previstas.

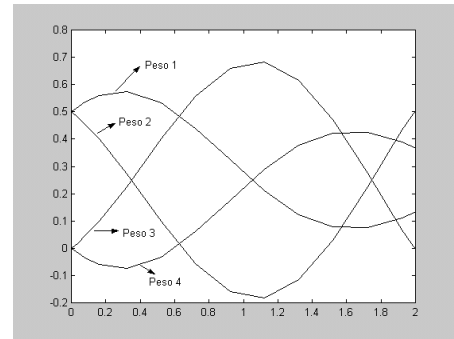


Fig. 7. Pesos del esquema de interpolación analítico.

La Fig. (8) muestra la evolución del vector de estado hacia la posición de equilibrio para una condición inicial de $x(0) = [7 \quad -4]^T$

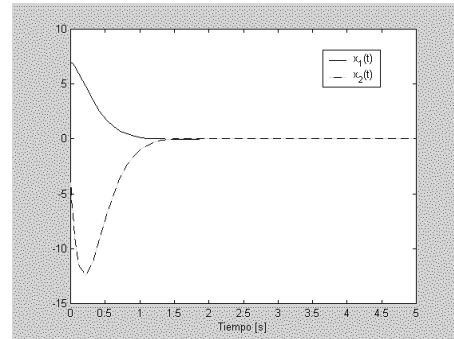


Fig. 8. Evolución del vector de estado hacia la posición de equilibrio

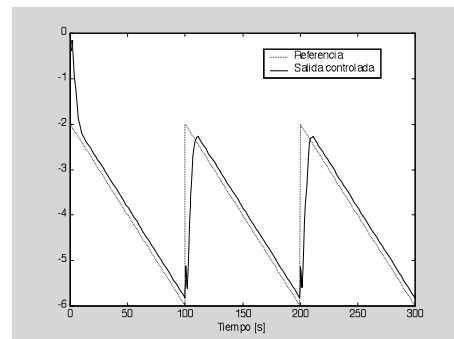


Fig. 9. Seguimiento de una señal diente de sierra.

En la Fig. (9) se considera el seguimiento en la salida $y(t) = x_1(t)$ de una señal de referencia cuadrada de media igual a -4 , amplitud 2 y frecuencia 0.01 Hz.

Los resultados de las simulaciones confirman la efectividad de la técnica en cuanto a su robustez. Dicho de otra forma, a pesar de los cambios en los parámetros de la planta el diseño efectuado es bastante satisfactorio. Adicionalmente, en (Teppa y Andrade, 2008) los autores presentan una comparación de la metodología propuesta en este artículo con un esquema de control robusto para sistemas LPV desarrollado en (Teppa, 2008).

7 Conclusiones

Un esquema de ganancia programada es propuesto para controlar un sistema LPV. Inicialmente se determinan las combinaciones extremas de los parámetros variantes en un conjunto compacto. En estos puntos se obtienen aproximaciones LTI, estas últimas son empleadas posteriormente en la síntesis de leyes de control para los problemas de estabilización, seguimiento e información parcial. El controlador global corresponde a un promedio ponderado de las contribuciones locales, esta ponderación depende de los valores instantáneos del vector de parámetros. Actualmente se trabaja en la extensión de los resultados al caso de sistemas en tiempo discreto y en aplicaciones a sistemas complejos y de interés práctico.

Referencias

- Apkarian P y Gahinet P, (1995), A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, 40(5), pp.853-864.
- Apkarian P, Biannic JM y Gahinet P, (1995), Self scheduled H_∞ control of Missile via Linear Matrix Inequalities, Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 18(3), pp. 1251-1261.
- Barmish B, (1985), Necessary and sufficient condition for a quadratic stabilizability of an uncertain system. Journal of Optimization Theory and Application, 46(4), pp 399-408.
- Becker G, Packard A, Philbrick D y Balas G, (1993). Control of parametrically dependent linear systems: A single quadratic lyapunov approach, American control conference, pp. 2795-2799.
- Becker G y Packard A, (1994), Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback., System & Control Letters 23, pp. 205-215.
- Becker G, Packard A, Philbrick D y Balas G, (1994), Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems, American control conference, pp. 856-860.
- Bernussou J y Garcia G, (1993), Stabilisabilité quadratique et paramétrisation convexe, Rapport LAAS N° 93258, Toulouse, France.
- Boyd S, El Ghaoui, L, Feron E y Balakrishnan V, (1994), Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia, USA, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM Vol.15.
- Brogan W, (1991), Modern Control Theory, New Jersey, USA, Prentice Hall.
- Bruzeliuss F, Breitholtz C y Pettersson S, (2002), LPV-based gain scheduling technique applied to a turbo fan engine model, IEEE Conference on Control Applications, pp. 713-718.
- Chen C, (1999), Linear System Theory and Design, New York, USA, Oxford University Press.
- Chilali M y Gahinet P, (1995), H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3), pp. 358-367.
- Francis BA y Wonham W, (1976), The internal model principle of control theory, Automatica, 12, pp. 457-465.
- Fromion V, Monaco S y Normand-Cyrot D, (1996), Robustness and stability of LPV plants through frozen system analysis, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 6, pp. 235-248.
- Hyde R y Glover K, (1993), The application of scheduled H_∞ controllers to a VSTOL aircraft, IEEE Transactions on Automatic Control, 38(7), pp. 1021-1039.
- Kaminer I, Pascoal A, Khargonekar P y Coleman E, (1995), A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers, Automatica, 31(8), pp. 1185-1191.
- Lawrence D y Rugh W, (1995), Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant, Automatica, 31(3), pp. 381-390.
- Nichols R, Reichert R y Rugh W, (1993), Gain scheduling for H_∞ controllers: A flight control example, IEEE Transactions on Control System Technology, 1(2), pp.69-79.
- Packard, A. (1994). Gain scheduling via linear fraction transforms, Systems & Control Letters, 22, 79-92.
- Reichert R, (1992). Dynamic scheduling of modern robust control autopilot design for missiles, IEEE Control Systems Magazine, 12(5), pp. 35-42.
- Rugh W, (1991), Analytical framework for gain scheduling, IEEE Control Systems Magazine, 11(1), pp.79-84.
- Rugh W y Shamma J, (2000), Research on gain scheduling. Automatica, 36, pp. 1401-1425.
- Scherer C, (2001), LPV control and full block multipliers, Automatica, 37(3), pp. 361-375.
- Scorletti G y El Ghaoui L, (1998), Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems, International Journal of Robust and nonlinear control 8, pp. 845-877.
- Shamma J y Athans M, (1990), Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants, IEEE Transactions on Automatic Control, 35(8), pp.898-907.
- Shamma J, (1992), Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies, IEEE Control System Magazine 12, pp. 101-107.
- Shahruz S y Behtash S, (1992), Design of controllers for linear parameter varying system by the gain scheduling

technique, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 168(1), 195-217.

Takagi T y Susgeno M, (1985), Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 15(1), pp. 116-132.

Teppa P y Andrade J, (2008), Control de Sistemas Lineales de Parámetros Variantes, Revista Anales de la Unimet,

8(1), 2008. (Aceptado).

Teppa P, (2008), Control robusto de sistemas LPV : Un Enfoque LMI, Revista de la Facultad de Ingeniería UCV, 23, 5-17.

Wu F, Yang XH, Packard A y Becker G, (1996), Induced L2 norm controller for LPV systems with bounded parameter variation rates, International Journal of Robust and Non-linear Control, 6(9-10), pp. 983988

