

Control del estado incoherente en redes neuronales

Control of incoherent state in neural networks

Tucci, Kay^{*1,2}; Echeverría, Carlos¹; Uzcátegui, Mayerlin^{1,2}; Condor, Claudio²

¹SUMA. Facultad de Ciencias

Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela

²CeSiMo. Facultad de Ingeniería

Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela

*kay@ula.ve

Resumen

Uno de los fenómenos que se observa en las redes neuronales naturales o artificiales es el de sincronización. Ocurre cuando las neuronas ajustan su ritmo y su frecuencia entre sí. Clínicamente este fenómeno está relacionado con enfermedades de carácter neurológico tales como la epilepsia y el parkinson. Por medio de un modelo neuronal basado en un mapa caótico, se recrea el fenómeno de sincronización neuronal en redes plásticas. Se determina la posibilidad de mantener la red de neuronas desincronizada mediante aplicación de perturbaciones externas a los elementos de la red siguiendo cuatro estrategias de selección espacial y temporal. Para todas las estrategias se construye el diagrama de fases en el espacio de los parámetros de control, encontrándose que en todas ellas existen regiones en la que se logra controlar significativamente la aparición de este fenómeno de sincronización.

Palabras clave: Sincronización, Neuronas, Control, Redes, Epilepsia.

Abstract

One of the phenomena observed in natural or artificial neural networks is synchronization. It happens when neurons adjust their rhythm and frequency to each other. Clinically, this phenomenon is related to neurological diseases such as epilepsy and Parkinson's. By means of a neuronal model based on a chaotic map, the phenomenon of neuronal synchronization in plastic networks is recreated. The possibility of keeping the network of neurons out of sync by applying external perturbations to the elements of the network is determined by following four spatial and temporal selection strategies. For all the strategies the diagram of phases in the space of the control parameters is constructed, finding that in all of them there are regions in which it is possible to control significantly the appearance of this phenomenon of synchronization.

Key words: Synchronization, Neurons, Control, Networks, Epilepsy.

1 Introducción

El surgimiento de dinámicas colectivas y sincronizadas de elementos acoplados se ha estudiado desde finales del siglo pasado en diferentes contextos y en una variedad de campos, que van desde la física (Strogatz, 2000) con láseres y circuitos electrónicos, pasando por la sociología, las comunicaciones (Manrubia y Mikhailov, 2004), la música en todas sus expresiones y manifestaciones, y llegando hasta la biología y la medicina (Pykovsky, Roseblum, y Kurths, 2001).

Ya a mediados de los años 60, A. Winfree elaboró la primera modelación matemática de la sincronización (Winfree, 1967), luego de observar el comportamiento cooperativo

en una gran población de osciladores biológicos con ciclos límite y frecuencias intrínsecas distribuidas alrededor de un valor promedio. Indicando que este fenómeno ocurre cuando un grupo de osciladores autónomos se coordina y ajusta sus ritmos, volviéndose cada vez más similares debido a la presencia de una interacción entre ellos. Este comportamiento descrito por Winfree, captó el interés de Kuramoto (1975), quien comenzó a estudiarlo mediante un modelo conocido actualmente como el Modelo de Kuramoto. Este modelo ha sido utilizado para describir el fenómeno de sincronización de grandes grupos de osciladores acoplados (Strogatz, 2000). Casi de inmediato, se comenzó a estudiar ampliamente el fenómeno de la sincronización caótica en redes dinámicas

(Pecora y Carroll, 1990; Boccaletti, Kurths, Osipov, Valladares, y Zhou, 2002; Strogatz, 2004) sobre diferentes topologías de redes: no dirigidas (Zhou, Motter, y Kurths, 2006; Alvarez-Llamoza, Tucci, Cosenza, y Pineda, 2007), dirigidas (Alvarez-Llamoza y Cosenza, 2010; Bauer, Atay, y Jost, 2010; DeCastro y Tucci, 2010) y complejas (Arenas, Díaz-Guilera, Kurths, Moreno, y Zhou, 2008; Márquez-Rodríguez, Tucci, y Cosenza, 2024); y con dinámicas locales caóticas continuas (Rosenblum, Pikovsky, y Kurths, 1996; Agiza y Yassen, 2001) y discretas (Jost y Joy, 2001; Sinha, 2002), logrando determinar que el comportamiento colectivo de un sistema no sólo depende de las características de los osciladores, sino que también depende de las propiedades del sustrato sobre el que se desarrolla la dinámica (Tucci, 2002; Belykh, Hasler, Lauret, y Nijmeijer, 2005; Atay, Bıyıkoglu, y Jost, 2006).

Estos modelos son frecuentemente usados para investigar y caracterizar el comportamiento de fenómenos críticos en sistemas naturales muy diversos, como el comportamiento de: tejido cardíaco (Karma, 2013; Keener y Sneyd, 2026), incendios forestales (Bak y Chen, 1991; Clar, Drossel, y Schwabl, 1996), la propagación de enfermedades y rumores (Pastor-Satorras y Vespignani, 2001; Moreno, Nekovee, y Pacheco, 2004), la formación estelar (Shore, 1981; Gerola y Seiden, 1978), algunas reacciones químicas (Zhabotinsky, 1991; Epstein y Pojman, 1998), comunicación entre luciérnagas (Buck, 1988; Strogatz, 2004), floración sincronizada (Satake y Iwasa, 2000), entre otros; siendo muy relevantes para comprender, por ejemplo, la unificación de la actividad cerebral y la emergencia de nuestra conciencia (Buzsáki y Draguhn, 2004) o en la aparición de algunas enfermedades como la epilepsia, la esquizofrenia y el parkinson; que surgen como resultado de la sincronización repentina o indeseable de un gran número de neuronas (Glass, 2001; Cumin y Unswort, 2007; Escalona Morán, Guillén, Cosenza, y Coutin, 2011).

En la mayoría de estos trabajos se parte de sistemas cuyas dinámicas son espontáneamente incoherentes, buscando las condiciones bajo las cuales emerge un comportamiento coherente, es decir, la sincronización. En cambio, el objetivo de este trabajo es estudiar cómo estabilizar el estado incoherente o desincronizado partiendo de un sistema que espontáneamente tiende a la sincronización. Para ello, se construye una red de osciladores neuronales idénticos, con dinámicas excitables caóticas, acoplados mediante una red plástica que sigue un proceso o regla de aprendizaje hebbiano, a la cual se le aplican perturbaciones externas con la finalidad de mantenerlas desincronizadas.

2 Método

Para el estudio de la sincronización en sistemas de osciladores caóticos excitables sometidos a perturbaciones consideremos, en primer lugar, que es absolutamente necesario partir de un modelo que permita un estudio amplio de

sincronización caótica en redes formadas por modelos activos de neuronas que cumplan con las condiciones mínimas necesarias para la aparición del fenómeno de sincronización caótica en sistemas complejos (Cosenza y González, 1998). Además, dicho fenómeno requiere la presencia de una relación funcional diferente a la identidad entre los elementos que componen la red, la cual ha de ser establecida entre el subsistema de forzamiento y el subsistema de respuesta (Rulkov, Sushchick, Tsimring, y Abarbanel, 1995). Uno de los modelos de oscilador neuronal que cumple con estos requerimientos es el mapa propuesto por Chialvo (1995),

$$x_{t+1} = f_x(x_t, y_t) = x_t^2 e^{y_t - x_t} + k \quad (1)$$

$$y_{t+1} = f_y(x_t, y_t) = ay_t - bx_t + c \quad (2)$$

en el que x_t y y_t representan los estados de activación y recuperación del oscilador, respectivamente, en el instante de tiempo discreto t . El comportamiento del oscilador se ajusta mediante 4 parámetros: k , que representa una entrada constante o incluso puede representar una perturbación aditiva que no depende del tiempo; a , que es la constante de recuperación; b , que establece la dependencia de activación en el proceso de recuperación, y c , que es el valor de offset. En este trabajo, los parámetros del oscilador neuronal se fijaron en $a = 0.89$, $b = 0.18$, $c = 0.28$ y $k = 0.03$ que aseguran que su dinámica sea caótica y excitable.

Por otra parte, Kaneko (1993) propone el uso de redes de mapas acoplados (RMA) como una manera eficiente de realizar el estudio numérico de un sistema complejo y, en particular, de una red neuronal. Una RMA consiste en una simplificación del sistema en la que se construye un modelo compuesto por elementos con dinámica local capaces de interactuar entre sí. Siguiendo esta metodología, nuestro modelo base, sin perturbaciones, lo conforma una red de mapas acoplados con enlaces ponderados, compuesta por N osciladores neuronales caóticos excitables que representan las neuronas y cuya dinámica viene dada por:

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f_x(x_t^i, y_t^i) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j \neq i} w_t^{ij} f_x(x_t^j, y_t^j) \quad (3)$$

$$y_{t+1}^i = f_y(x_t^i, y_t^i) + c \quad (4)$$

donde x_t^i y y_t^i representan las variables de estado de la neurona $i = 1, 2, \dots, N$; en el instante de tiempo t ; $\epsilon \in (0, 1)$ es un parámetro que controla la intensidad del acoplamiento y w_t^{ij} es el elemento de la matriz de adyacencia $\mathbf{W}$ que representa el peso con el que la neurona j influye en la neurona i en el instante t .

Por su parte, la evolución de los pesos sigue el mecanismo de plasticidad homeostática (Alvarez-Silva, Álvarez-Rodríguez, Pérez-Echeverría, y Álvarez-Silva, 2006) y viene dada por:

$$w_{t+1}^{ij} = \frac{(1 + \delta g(x_t^i, x_t^j))w_t^{ij}}{\sum_j (1 + \delta g(x_t^i, x_t^j))w_t^{ij}} \quad (5)$$

donde $\delta \in (0, 1)$ representa el grado de plasticidad de la red y el denominador de la expresión actúa como normalizador de los pesos para que estos se mantengan en el intervalo $[0, 1]$. Aquí, la función $g(x_t^i, x_t^j)$ representa el “proceso o regla de aprendizaje” (Ito y Kaneko, 2000; Hebb, 2005) de la red que viene dada por:

$$g(x_t^i, x_t^j) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x_t^j - x_t^i}{\Omega}\right) & \text{si } |x_t^j - x_t^i| \leq 4 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (6)$$

donde $\Omega = 1.25$.

Con el fin de cuantificar el grado de sincronización de las neuronas, calculamos la varianza promedio en T iteraciones,

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t^2 \quad (7)$$

a partir de σ_t^2 , que es la varianza instantánea de los estados de los elementos del sistema,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \bar{x}_t)^2 + (y_t^i - \bar{y}_t)^2 \quad (8)$$

donde $\bar{x}_t$ e $\bar{y}_t$ son los promedios instantáneos de las variables de estado de las N neuronas de la red en la iteración t .

Se propone introducir cuatro estrategias para perturbar el sistema con la finalidad de estabilizar un estado incoherente, es decir, desincronizar el sistema. La primera estrategia es la más agresiva porque introduce una perturbación constante que afecta a todos los elementos del sistema en todas las iteraciones. Para ello, sumamos la perturbación a la ecuación (3), obteniendo

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f_x(x_t^i, y_t^i) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j \neq i} w_t^{ij} f_x(x_t^j, y_t^j) + B \quad (9)$$

donde B es la magnitud de la perturbación que se aplica a cada elemento x_t^i de la red en todo instante de tiempo t .

La segunda estrategia busca disminuir la agresividad al reducir la frecuencia con la que se aplica la perturbación. Para ello, se introduce la función aleatoria

$$\Theta_t(p) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases} \quad (10)$$

donde p_1 es la probabilidad con la que la perturbación se aplica en el instante de tiempo t , modificando la ecuación (3) de la forma:

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f_x(x_t^i, y_t^i) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j \neq i} w_t^{ij} f_x(x_t^j, y_t^j) + \Theta_t(p_1)B \quad (11)$$

Nótese que la probabilidad p_1 actúa como un modulador de la agresividad de la estrategia, ya que la perturbación B solamente se suma al estado x_{t+1}^i cuando $\Theta_t(p_1) = 1$.

Al igual que la estrategia anterior, la tercera estrategia también busca moderar la agresividad de la primera. Esto lo logra reduciendo la cantidad de elementos a los que se aplica la perturbación mediante la función aleatoria

$$\Theta^i(q) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } q \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - q \end{cases} \quad (12)$$

donde q representa la probabilidad de que la perturbación se aplique al elemento i . En esta estrategia, la ecuación (3) del modelo sin perturbaciones se modifica de la siguiente forma

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f_x(x_t^i, y_t^i) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j \neq i} w_t^{ij} f_x(x_t^j, y_t^j) + \Theta^i(q)B \quad (13)$$

Finalmente, la cuarta estrategia combina las dos estrategias anteriores, aplicando una perturbación externa a algunos elementos en algunas ocasiones. En este caso, modificamos la ecuación (3) de la siguiente forma:

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f_x(x_t^i, y_t^i) + \epsilon \sum_j w_t^{ij} f_x(x_t^j, y_t^j) + \Theta_t(p_1)\Theta^i(q)B \quad (14)$$

donde la perturbación se aplica en el instante de tiempo t con probabilidad p_1 al elemento i con probabilidad q .

3 Resultados.

Las simulaciones del modelo se llevaron a cabo sobre una red de $N = 1000$ osciladores neuronales descrita en las ecuaciones (1-2) con condiciones iniciales aleatorias uniformemente distribuidas: $x_o^i \in (0.1, 5.0)$ e $y_o^i \in (0.8, 2.3)$, que garantizan que todos los osciladores están en un estado caótico y excitable. El valor inicial de los pesos se estableció en

$$w_o^{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N-1} & i \neq j, \\ 0 & i = j \end{cases}$$

La figura 1 muestra la evolución temporal de 10 elementos de la red durante 300 iteraciones para dos valores diferentes de la intensidad de acoplamientos, $\epsilon = 0.15$ a la izquierda y $\epsilon = 0.25$ a la derecha. En la gráfica de la izquierda

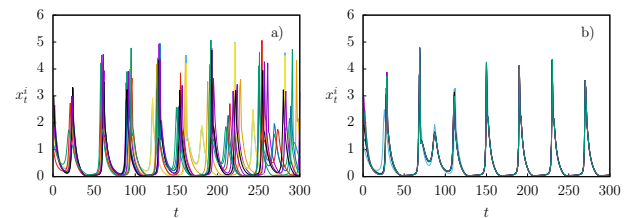


Fig. 1: Evolución temporal de la variable de activación x_t^i para 10 elementos de la red con plasticidad $\delta = 0.5$. **a)** Comportamiento incoherente con $\epsilon = 0.15$. **b)** Comportamiento sincronizado con $\epsilon = 0.25$.

se aprecia que cuando el acoplamiento no es suficientemente

intenso ($\epsilon = 0.15$) el comportamiento de las neuronas de la red es incoherente. Por su parte, en la gráfica de la derecha de la figura 1 tenemos la evolución de estos mismos 10 elementos para un acoplamiento mayor ($\epsilon = 0.25$). Allí vemos claramente que la red alcanza un estado sincronizado en muy pocas iteraciones ($t < 100$).

Teniendo en cuenta esto, con el fin de eliminar el efecto de las condiciones iniciales, en los resultados siguientes se descartan aproximadamente 10^3 iteraciones antes de aplicar la perturbación y calcular los promedios temporales de la ecuación (7). Además, para su cálculo se estableció que $T = 10^3$ iteraciones.

La figura 2 muestra el diagrama de fase del modelo en el espacio de parámetros (ϵ, δ) antes de aplicar ninguna perturbación (Ecs. (3-5)). Como es de esperarse, para

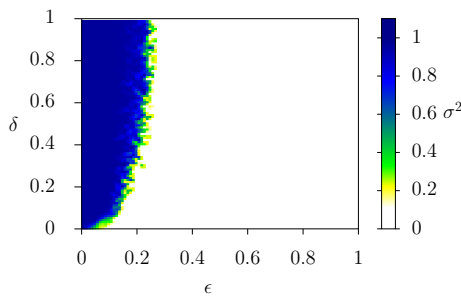


Fig. 2: Diagrama de fases de la red sin perturbaciones en el espacio de parámetros (ϵ, δ). En negro se muestra la región de incoherente y en blanco la región sincronizada.

valores pequeños de la intensidad de los acoplamientos ϵ el comportamiento del sistema es incoherente ($\sigma^2 \approx 1$) y al aumentarla se llega a un punto en el que el sistema se sincroniza ($\sigma^2 \approx 0$). Además, se aprecia que los valores de ϵ para los que ocurre la transición aumentan al incrementar el valor de la plasticidad de la red δ .

Para estudiar los efectos del forzamiento en el sistema con cada una de las cuatro estrategias, se eligió una intensidad del acoplamiento de $\epsilon = 0.30$ y una plasticidad de la red de $\delta = 0.50$. De esta forma se asegura que el modelo sin forzamiento se encuentre en la fase sincronizada, pero suficientemente cerca de la transición a la fase incoherente.

La figura 3 muestra el comportamiento de la varianza, σ^2 en función de la intensidad de la perturbación, B , con la primera estrategia (Ec. (9)), que consiste en aplicar siempre una perturbación externa a todas las neuronas de la red.

Nótese que para $B = 0$, es decir, cuando no se aplica ninguna perturbación, el sistema se encuentra sincronizado ($\sigma^2 = 0$). También se aprecia que si la intensidad de la perturbación $B < -0.20$ la varianza σ^2 alcanza valores que indican que el sistema se encuentra en un estado incoherente. En otras palabras, encontramos que partiendo de un sistema que espontáneamente ($B = 0$) se sincroniza es posible mantener al sistema en su fase incoherente aplicando una

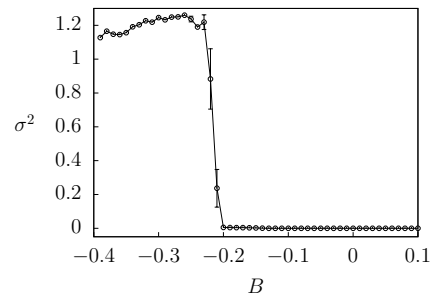


Fig. 3: Comportamiento de σ^2 en función de B con la primera estrategia. Las barras de error indican desviaciones estándar típicas sobre los valores medios de σ^2 obtenidos en 10 realizaciones para cada valor de B .

perturbación ($B < -0.20$) a todos los osciladores todo el tiempo.

Buscando ser menos agresivo con la aplicación de la perturbación, la figura 4 muestra el comportamiento del sistema al aplicar la segunda estrategia, planteada en las ecuaciones (10)–(11). En el diagrama de fase, Fig. 4a, se aprecia

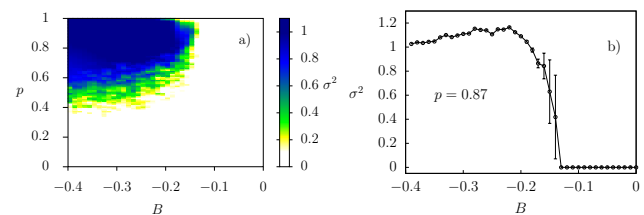


Fig. 4: Varianza σ^2 al aplicar la segunda estrategia, es decir, aplicar la perturbación B a todos los elementos con probabilidad p . **a)** Diagrama de fases en el espacio de parámetros (B, p). **b)** Valores de σ^2 en función de B para $p = 0.87$. Las barras de error indican desviaciones estándar típicas sobre los valores medios de σ^2 obtenidos en 10 realizaciones para cada valor de B .

en azul la región en la que al aplicar la perturbación B a todos los elementos con probabilidad p se logra mantener al sistema en un estado incoherente. Nótese que con esta estrategia existen valores de $p < 1$ para los cuales el sistema alcanza el régimen incoherente, incluso con cuando la magnitud de la perturbación B es menor que la requerida si se aplicara todo el tiempo, esto es con $p = 1$ (primera estrategia). En particular, para $p = 0.87$ se tiene que el comportamiento del sistema es incoherente para valores de la intensidad de la perturbación $B < -0.15$ como lo muestra a la izquierda la figura 4b.

Otra forma de reducir la agresividad de la perturbación es aplicar la tercera estrategia (Ecs. (12)–(13)), que consiste en perturbar con intensidad B siempre, pero escogiendo aleatoriamente los elementos a los que se les perturba con probabilidad q . Al aplicarla se obtiene el diagrama de fase en el espacio de parámetros (B, q) que se muestra en la figura 5a. Allí se observa que el régimen sincronizado de los elementos de la red se pierde para valores de la magnitud de $B > -0.2$, considerablemente más cercanos a cero

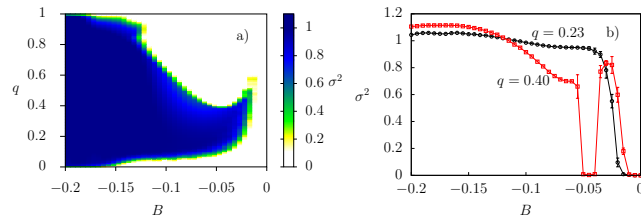


Fig. 5: Varianza σ^2 al aplicar la tercera estrategia. **a)** Diagrama de fases en el espacio de parámetros (B, q) . **b)** Valores de σ^2 en función de B para $q = 0.23$ (círculos negros) y $q = 0.40$ (cuadrados rojos). Las barras de error indican desviaciones estándar típicas sobre los valores medios de σ^2 obtenidos en 10 realizaciones para cada valor de B .

en comparación con lo que ocurre al aplicar la primera o segunda estrategia, (Figs. 3 y 4). Por su parte, la figura 5b, muestra el comportamiento de la varianza σ^2 para dos valores de la probabilidad q . Cuando $q = 0.23$ (círculos negros) vemos que existe una única transición de la fase sincronizada a la incoherente para valores de la intensidad de la perturbación $-0.03 \leq B \leq -0.02$. En cambio, cuando $q = 0.40$ (cuadrados rojos) se aprecian tres transiciones entre las dos fases. Este comportamiento evidencia la complejidad en el comportamiento que pueden llegar a presentar este tipo de sistemas.

Finalmente, al combinar las dos estrategias anteriores para la aplicación de la perturbación externa, se tiene la cuarta estrategia representada por las ecuaciones (10), (12) y (14). En esta estrategia hay tres parámetros que controlan al sistema, B , p y q . La figura 6 muestra el comportamiento del sistema al fijar uno de los tres parámetros y variar los otros dos. Las probabilidades $p = 0.87$ y $q = 0.23$, que se

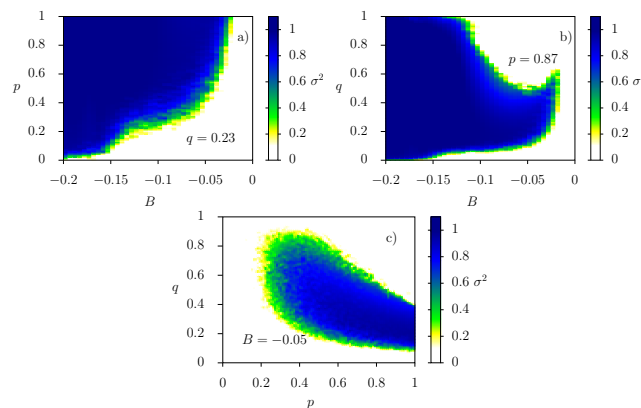


Fig. 6: Varianza σ^2 al aplicar la cuarta estrategia. **a)** Diagrama de fase en el espacio de parámetros (B, p) para $q = 0.23$. **b)** Diagrama de fase en el espacio de parámetros (B, q) para $p = 0.87$. **c)** Diagrama de fase en el espacio de parámetros (p, q) para $B = -0.05$.

usaron en la figura, corresponden respectivamente a los valores mínimos para los cuales la segunda y tercera estrategia lograron que el sistema se mantuviese en su fase incoherente. Por su parte, la intensidad $B = -0.05$ se seleccionó porque

en la tercera estrategia el sistema presenta un cambio de comportamiento en ese valor.

Al comparar las figuras 4a y 6a se puede observar que al disminuir la probabilidad de seleccionar un elemento para aplicar la perturbación de $q = 1$ a $q = 0.23$ aumenta el área de la fase incoherente, ampliando significativamente el rango tanto de la probabilidad p como de la intensidad de la perturbación B . Del mismo modo, al comparar las figuras 5a y 6b se puede observar que al disminuir la probabilidad de aplicar la perturbación en cada iteración de $p = 1$ a $p = 0.87$ el área de la fase incoherente aumenta, aunque en este caso el cambio no es tan marcado como en el caso anterior. Por último, la figura 6c muestra que existen varias combinaciones para las probabilidades p y q que logran mantener el sistema en su fase incoherente para una intensidad de la perturbación relativamente baja $B = -0.05$, menos de un cuarto de la magnitud mínima si se aplicara la primera estrategia (Fig. 3), esto es aplicar la perturbación siempre y a todos los elementos.

4 Discusión y conclusiones.

Para estudiar el efecto que tiene un campo externo de magnitud constante sobre sistema de elementos excitables sincronizado, se sometió a una red neuronal con dinámica caótica a una perturbación siguiendo cuatro estrategias. En la primera estrategia se aplicó la perturbación a todos los elementos de la red en cada iteración. Con esta estrategia se determinó que es posible inducir un comportamiento incoherente de los elementos de la red manteniendo el carácter caótico y excitable de cada elemento de la red, como se muestra en la figura 3.

Aunque la primera estrategia logra el objetivo de estabilizar el comportamiento incoherente en el sistema, en algunos sistemas reales puede ser muy agresiva. Por ejemplo, en el caso de un ataque epiléptico la aplicación de una perturbación relativamente grande a todos los elementos todo el tiempo implicaría someter a todas las neuronas del cerebro a un choque eléctrico continuamente. Es por esto que con las otras tres estrategias se buscó disminuir la agresividad al intervenir menos en el sistema. Nótese que la segunda y tercera estrategia buscan reducir respectivamente la frecuencia y la cantidad de elementos sobre los que se interviene, mientras que la cuarta estrategia es el producto de combinar las dos anteriores.

En la figura 4 se observa que en el caso de la segunda estrategia, con la que se somete la red neuronal a una perturbación que afecta a todos los elementos con cierta probabilidad, es posible estabilizar el estado incoherente sin necesidad de aplicar la perturbación en todo momento. Además, para ciertos valores de la probabilidad de aplicar la perturbación, como por ejemplo $p = 0.87$, se aprecia que la estabilización de la fase incoherente se logra con magnitudes de la intensidad de la perturbación menor que lo observado con la primera estrategia.

En cambio, con la tercera estrategia se busca reducir la agresividad disminuyendo la cantidad de elementos que se perturban. Para ello, en cada iteración, se seleccionan los elementos que son sometidos a la perturbación con cierta probabilidad q . En este caso, al igual que ocurrió con la segunda estrategia, se encontró que es posible estabilizar la fase incoherente sin necesidad de afectar a todos sus elementos, logrando también una reducción del valor de la magnitud de la perturbación para algunos valores de probabilidad como por ejemplo $q = 0.23$, como se muestra en la figura 5. Además, se encontró que para algunos valores de la probabilidad, por ejemplo $q = 0.40$, al variar la intensidad de la perturbación ocurren tres transiciones entre las fases sincronizada e incoherente. Estudiar el origen y la naturaleza de estas transiciones escapa del alcance de este trabajo, pero podría ser un tema de interés para futuras investigaciones.

Finalmente, con la cuarta estrategia se busca disminuir aún más la agresividad combinando las dos estrategias anteriores, es decir, perturbar a algunos elementos a veces. Los resultados de aplicar esta estrategia se muestran en la figura 6. En la figura se aprecia que existe un amplio rango para los valores de las probabilidades p y q , y de la intensidad de la perturbación B donde se logra el objetivo de estabilizar el comportamiento incoherente del sistema. Nótese además que esto puede lograrse para valores combinados de los parámetros p , q y $|B|$ inferiores a los mínimos obtenidos usando las primeras tres estrategias.

Referencias

- Agiza, H., y Yassen, M. (2001). Synchronization of rossler and chen chaotic dynamical systems using active control. *Physics Letters A*, 278(4), 191–197.
- Alvarez-Llamoza, O., y Cosenza, M. G. (2010). Synchronization induced by intermittent versus partial drives in chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(02), 323–330.
- Alvarez-Llamoza, O., Tucci, K., Cosenza, M., y Pineda, M. (2007). Random global coupling induces synchronization and nontrivial collective behavior in networks of chaotic maps. *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1), 245–247.
- Alvarez-Silva, S., Alvarez-Rodríguez, J., Pérez-Echeverría, M., y Alvarez-Silva, I. (2006). Panic and epilepsy. *Journal of anxiety disorders*, 20(3), 353–362.
- Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., y Zhou, C. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics reports*, 469(3), 93–153.
- Atay, F. M., Bıyıkoglu, T., y Jost, J. (2006). Network synchronization: Spectral versus statistical properties. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 224(1-2), 35–41.
- Bak, P., y Chen, K. (1991). Self-organized criticality. *Scientific American*, 264(1), 46–53.
- Bauer, F., Atay, F. M., y Jost, J. (2010). Synchronized chaos in networks of simple units. *Europhysics Letters*, 89(2), 20002.
- Belykh, I., Hasler, M., Lauret, M., y Nijmeijer, H. (2005). Synchronization and graph topology. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11), 3423–3433.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D., y Zhou, C. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics reports*, 366(1-2), 1–101.
- Buck, J. (1988). Synchronous rhythmic flashing of fireflies. ii. *The Quarterly review of biology*, 63(3), 265–289.
- Buzsáki, G., y Draguhn, A. (2004). Neuronal oscillations in cortical networks. *Science*, 304(5679), 1926–9. doi: [10.1126/science.1099745](https://doi.org/10.1126/science.1099745)
- Chialvo, D. (1995). Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(5), 461–479.
- Clar, S., Drossel, B., y Schwabl, F. (1996). Forest fires and other examples of self-organized criticality. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 8(37), 6803–6824.
- Cosenza, M. G., y González, J. (1998). Synchronization and collective behavior in globally coupled logarithmic maps. *Progress of Theoretical Physics*, 100(1), 21–38.
- Cumin, D., y Unsworth, C. (2007). Generalizing the kuramoto model for the study of neuronal synchronization in the brain. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 226(2), 181–196.
- DeCastro, D., y Tucci, K. (2010). Chaotic synchronization on directed networks. En *Journal of physics: Conference series* (Vol. 246, p. 012010).
- Epstein, I. R., y Pojman, J. A. (1998). *An introduction to nonlinear chemical dynamics*. New York: Oxford Univ. Press.
- Escalona Morán, M., Guillén, P., Cosenza, M., y Coutin, P. (2011). Análisis de la sincronización de señales eeg usando dinámica no lineal. *Ciencia*, 13(4).
- Gerola, H., y Seiden, P. E. (1978). Stochastic star formation and spiral structure of galaxies. *Astrophysical Journal, Part 1, vol. 223, July 1, 1978, p. 129-135, 137, 139., 223, 129–135.*
- Glass, L. (2001). Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, 410(6825), 277–84. doi: [10.1038/35065745](https://doi.org/10.1038/35065745)
- Hebb, D. (2005). *The organization of behavior: A neuropsychological theory* (reprint ed.). New York: Psychology Press.
- Ito, J., y Kaneko, K. (2000). Self-organized hierarchical structure in a plastic network of chaotic units. *Neural Networks*, 13(3), 275–281.
- Jost, J., y Joy, M. P. (2001). Spectral properties and synchronization in coupled map lattices. *Physical Review E*, 65(1), 016201.
- Kaneko, K. (1993). *Theory and applications of coupled map lattices* (Vol. 12). John Wiley & Son Ltd.

- Karma, A. (2013). Physics of cardiac arrhythmogenesis. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 4(1), 313–337.
- Keener, J., y Sneyd, J. (2026). Neuroendocrine cells. En *Mathematical physiology* (pp. 467–502). Springer.
- Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. En *International symposium on mathematical problems in theoretical physics* (pp. 420–422). Springer.
- Manrubia, S. C., y Mikhailov, A. S. (2004). *Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems*. World Scientific.
- Márquez-Rodríguez, V., Tucci, K., y Cosenza, M. (2024). Chimera states and information transfer in interacting populations of map-based neurons. *Neural Computing and Applications*, 36(29), 18151–18159.
- Moreno, Y., Nekovee, M., y Pacheco, A. F. (2004). Dynamics of rumor spreading in complex networks. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 69(6), 066130.
- Pastor-Satorras, R., y Vespignani, A. (2001). Epidemic spreading in scale-free networks. *Physical review letters*, 86(14), 3200.
- Pecora, L. M., y Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8), 821.
- Pykovsky, A., Roseblum, M., y Kurths, J. (2001). Synchronization: A universal concept in nonlinear science. *Cambridge Univ. Press*.
- Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., y Kurths, J. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical review letters*, 76(11), 1804.
- Rulkov, N., Sushchick, M., Tsimring, L., y Abarbanel, H. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51(2), 980.
- Satake, A., y Iwasa, Y. (2000). Pollen coupling and synchronous flowering: a theoretical study of resource-budget models. *Journal of Theoretical Biology*, 203(1), 63–79.
- Shore, S. N. (1981). Star formation as a critical phenomenon. *The Astrophysical Journal*, 249, 93–105.
- Sinha, S. (2002). Random coupling of chaotic maps leads to spatiotemporal synchronisation. *arXiv preprint nlin/0205008*.
- Strogatz, S. (2000). From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1), 1–20.
- Strogatz, S. (2004). *Sync: The emerging science of spontaneous order*. Penguin UK.
- Tucci, K. (2002). *Procesos dinámicos espaciotemporales en redes inhomogéneas* (Tesis Doctoral no publicada). Postgrado de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida.
- Winfree, A. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of theoretical biology*, 16(1), 15–42.
- Zhabotinsky, A. M. (1991). Self-oscillating chemical reactions. En *Selected topics in chemical physics*. Elsevier / North-Holland.
- Zhou, C., Motter, A. E., y Kurths, J. (2006). Universality in the synchronization of weighted random networks. *Physical review letters*, 96(3), 034101.

Recibido: 26 de mayo de 2026

Aceptado: 05 de julio de 2026

Tucci, Kay: Ingeniero de Sistemas ULA 1993, Doctor en Física Fundamental ULA 2002. Profesor Titular en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Mérida. Venezuela

 <https://orcid.org/0000-0002-7628-7752>

Echeverría, Carlos: Licenciado en Química 1995, Magister en Física Fundamental ULA 1999, Doctor en Física Fundamental ULA 2008. Profesor Titular en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, Mérida. Venezuela

Correo electrónico: cecheve@ula.ve

 <https://orcid.org/0000-0003-4114-7845>

Uzcátegui, Mayerlin: Ingeniero de Sistemas ULA 1993, Magister Scientiae en Computación ULA 2002. Candidato al grado de Doctor en Ciencias Aplicadas ULA. Profesor Titular en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Mérida. Venezuela

Correo electrónico: mayer@ula.ve

 <https://orcid.org/0009-0007-1449-2690>

