

Controlabilidad exacta para una ecuación de onda integro-diferencial con retardo

Exact controllability of an integro-differential wave equation with delay

Leiva^{1*}, Hugo y Sívoli, Zoraida²

¹Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias

²Departamento de Cálculo. Facultad de Ingeniería.

Universidad de Los Andes. Mérida 5101, Venezuela

*hleiva@ula.ve

Recibido: 27-03-2008

Revisado: 15-05-2009

Resumen

En este trabajo se dan condiciones suficientes que permitan garantizar la Controlabilidad Exacta de una Ecuación de Onda no lineal, cuyas condiciones de borde son de tipo Dirichlet y la no-linealidad está dada a través de un término integral el cual incluye una expresión con retardo. Para realizar este estudio, se escribe la ecuación como un sistema abstracto, ordinario, no lineal de primer orden en un espacio de Hilbert convenientemente seleccionado. La técnica utilizada se basa en la teoría de semigrupos y la teoría de Control.

Palabras clave: Semigrupos fuertemente continuo, ecuación de la onda integro-diferencial, controlabilidad exacta.

Abstract

In this paper we present sufficient conditions to guarantee the Exact Controllability of a non-linear wave equation, which boundary conditions are of Dirichlet type and the non-linearity is expressed by an integral term including an expression with delay. To carry out this study, the equation is written like an ordinary, non linear first order abstract system in an appropriate Hilbert space. The used technique is based on the semigroups theory and the theory of Control.

Key words: Strongly continuous semigroups, integrodifferential equation wave, exact controllability.

1 Introducción

En este trabajo se estudia la controlabilidad exacta de la ecuación de la onda integro-diferencial con retardo en el término no-lineal, dada por el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) + \\ + \int_0^t p(\tau, w(\tau - r, x)) d\tau, \\ t \in J = [0, b], \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \quad t > 0 \\ w(t, x) = \varphi(t, x), \quad -r \leq t \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

donde:

$w: [-r, b] \times [0, 1] \rightarrow R$, $\varphi: [-r, 0] \times [0, 1] \rightarrow R$ es una función continua, $p \in L^1([0, b] \times R)$ y el control $u \in L^2([0, b] \times [0, 1])$

El sistema (1.1) puede escribirse como una ecuación abstracta de segundo orden en el Espacio de Hilbert $X = L^2[0, 1]$, de la siguiente manera:

$$\ddot{w}(t) = -A_0 w + u(t) + \int_0^t P(\tau, w_\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

donde $A_0 \varphi = \frac{-d^2 \varphi}{dx^2}$ con dominio $D(A_0) = H^2 \cap H_0^1$,

$u \in L^2(J, X)$, $J = [0, b]$; $P: [0, b] \times X \rightarrow X$,

$P(t, \psi)(x) = p(t, \psi(-r)(x)) = p(t, \psi(-r, x))$,

$w_r \in C = C([-r, 0], X)$ es el truncamiento de $x \in C([-r, b], X)$, siendo C el espacio de las funciones continuas $\varphi: [-r, 0] \rightarrow X$ con la norma $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)|: -r \leq \theta \leq 0\}$

Es conocido que el espectro de $A_0, \sigma(A_0)$, está formado por los autovalores simples $\lambda_n = n^2 \pi^2$ con auto funciones correspondientes $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$, lo cual asegura la existencia de una familia completa de proyectores ortogonales E_n en $X = L^2[0, 1]$ dada por:

$$E_n x = \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x.$$

el espacio fraccionario $X^{\frac{1}{2}}$ se define como sigue:

$$X^{\frac{1}{2}} = D(A_0^{\frac{1}{2}}) = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|E_n x\|^2 < \infty\},$$

con la norma

$$\|x\|_{\frac{1}{2}} = \|A_0^{\frac{1}{2}} x\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle E_n x \rangle^2 \right\}^{1/2}, \quad x \in X^{\frac{1}{2}},$$

siendo $A_0^{\frac{1}{2}}$ el operador dado por:

$$A_0^{\frac{1}{2}} x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} E_n x. \quad (1.3)$$

finalmente, definimos el espacio de Hilbert $Z_{\frac{1}{2}} = X^{\frac{1}{2}} \times X$,

$$\text{con la norma dada por } \left\| \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z_{\frac{1}{2}}}^2 = \|w\|_{X^{\frac{1}{2}}}^2 + \|v\|_X^2.$$

Usando el siguiente cambio de variable:

$$\dot{w} = v \quad y \quad z = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix},$$

La ecuación (1.1) puede escribirse, como un sistema semilineal de primer orden, en el Espacio de Hilbert $Z_{\frac{1}{2}}$, de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + \int_0^t F(\tau, z_\tau) d\tau, & t \in J, \\ z(t) = \tilde{\varphi}(t), & t \in [-r, 0], \end{cases} \quad (1.4)$$

donde $D(A) = D(A_0) \times X$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$I = I_d : X \rightarrow X, \quad F(t, z_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ P(t, z_t^1) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$z_t \in C([-r, 0], Z_{\frac{1}{2}}), \quad z_t = \langle z_t^1, z_t^2 \rangle, \quad \tilde{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.1 Si $p: J \times R \rightarrow R$, es continua en J y globalmente Lipschitz en R , entonces, $F: J \times C \rightarrow Z_{\frac{1}{2}}$ es continua en J y uniformemente Lipschitz en C .

El siguiente resultado puede encontrarse en (Leiva, 2005), y será usando más adelante.

Proposición 1.2 El operador A dado en (1.5), es el generador infinitesimal del grupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t \in R}$, dado por:

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z_{\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

donde $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una familia completa de proyectores ortogonales en el Espacio de Hilbert $Z_{\frac{1}{2}}$ dado por

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n), \quad n \geq 1, \quad (1.8)$$

y

$$A_n = B_n P_n, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.9)$$

Debido a que $\{T(t)\}$ es un grupo, los operadores $\{T(t)\}_{t > 0}$ son invertibles, y en consecuencia no pueden ser compactos. Así, de acuerdo con (Barcenás, Leiva, Sívoli, 2005), los resultados de (Balachandran and Sakthivel, 2001), (Balachandran and Manimegalai, 2002) no pueden ser aplicados a este sistema, sin embargo, aquí se realiza una prueba directa de la controlabilidad exacta de (1.1), usando para ello un método general que puede ser aplicado a otros sistemas de control infinito dimensionales.

Específicamente, en este trabajo se prueba el siguiente resultado: Si el sistema lineal $\dot{z} = Az + Bu$, es exactamente controlable y vale la siguiente estimación

$$\|W^{-1}\| M^3 L \|B\|^2 \frac{b^3}{2} \exp\left(\frac{MLb^2}{2}\right) \leq 1,$$

entonces el sistema (1.4) es exactamente controlable; donde L es la constante de Lipschitz del operador F , M la constante de acotamiento del semigrupo y $W: X \rightarrow X$ el operador acotado dado por:

$$Wx = \int_0^b T(-s) B B^* T^*(-s) x ds.$$

2 Controlabilidad del sistema lineal

En esta sección presentaremos algunos resultados sobre la controlabilidad exacta del sistema lineal (2.1), los cuales serán necesarios para probar la controlabilidad del sistema no lineal (1.4)

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, & t \in J, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definición 2.1 Sea A el generador del grupo fuertemente continuo $\{T(t)\}$ dado por la ecuación (1.7), $z_0 \in Z_{\frac{1}{2}}$,

$$u \in L^2(J, X). \text{ Una función } Z \in C\left[J, Z_{\frac{1}{2}}\right]$$

Es una solución moderada de (2.1) si admite una representación integral de la forma

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad t \in [0, b] \quad (2.2)$$

Definición 2.2 Decimos que el sistema (2.1) es exactamente controlable en $[0, b]$, si para todo $z_0, z_1 \in Z_{\frac{1}{2}}$ existe un

control $u \in L^2([0, b], L^2[0, 1])$, tal que las soluciones de (2.1) correspondientes al control u verifican que $z(b) = z_1$.

Consideremos los siguientes operadores lineales y acotados

$$\hat{G}: L^2(J, L^2[0, 1]) \rightarrow Z_{\frac{1}{2}}, \quad \hat{G}u = \int_0^b T(-s)Bu(s)ds. \quad (2.3)$$

$$W: Z_{\frac{1}{2}} \rightarrow Z_{\frac{1}{2}}, \quad Wz = \int_0^b T(-s)BB^*T^*(-s)zds. \quad (2.4)$$

Los siguientes resultados caracterizan la controlabilidad exacta del sistema (2.1) y pueden encontrarse en (Iturriaga and Leiva, 2007), (Leiva, 2005).

Proposición 2.1 El sistema (2.1) es exactamente controlable en $[0, b]$ si, y solo si, el operador $\hat{G}$ es sobreyectivo; es decir

$$\hat{G}(L^2(J, L^2[0, 1])) = Z_{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

Se considera la siguiente familia de Sistemas Finito Dimensionales

$$y' = A_j P_j y + P_j B u, y \in R(P_j); \quad j = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2.6)$$

donde p_j y A_j están dadas por las ecuaciones (1.8) y (1.9) respectivamente.

El resultado que se presenta a continuación puede ser demostrado del mismo modo que el Lema 1 de (Leiva and Zambrano, 1999)

Proposición 2.2. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) El sistema (2.6) es controlable en $[0, b]$.

(b) $B^* P_j^* e^{A_j^* t} y = 0, \forall t \in [0, b], \Rightarrow y = 0$,

(c) $\text{Rank}[P_j B; A_j P_j B] = 2$

(d) El operador $W_j(t_1): R(P_j) \rightarrow R(P_j)$ dado por

$$W_j(b) = \int_0^b e^{-A_j s} B B^* e^{-A_j^* s} ds, \quad (2.7)$$

es invertible.

Teorema 2.1 El sistema (2.1) es exactamente controlable en $[0, b]$. Además el control $u \in L^2(0, b; L^2[0, 1])$ que lleva el estado inicial z_0 al estado final z_1 en el tiempo $b > 0$ está dado por la siguiente fórmula:

$$u(t) = B^* T^*(-t) \sum_{j=1}^{\infty} W_j^{-1}(b) P_j (T(-b)z_1 - z_0). \quad (2.8)$$

Corolario 2.1 El sistema (2.1) es exactamente controlable en $[0, b]$ si, y solo si, el operador

$$Wz = \int_0^b T(-s) B B^* T^*(-s) z ds. \quad (2.9)$$

Es invertible; además el control $u \in L^2(0, b; L^2[0, 1])$ que lleva el estado inicial z_0 , al estado final z_1 en el tiempo $b > 0$, está dado por:

$$u(t) = B^* T^*(-t) W^{-1}(b) (T(-b)z_1 - z_0)$$

3 Controlabilidad del sistema no-lineal

En esta sección probaremos el resultado principal de este trabajo, el cual se refiere a la controlabilidad exacta del sistema no lineal (1.4), para lo cual es necesario dar las siguientes definiciones y mostrar los resultados que se presentan a continuación.

Definición 3.1 Sea A el generador infinitesimal del grupo $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$; $\varphi \in C([-r, 0], Z_{\frac{1}{2}})$,

$$u \in L^2(J, L^2[0, 1]), \quad B \in L(L^2[0, 1]; Z_{\frac{1}{2}}) \quad y$$

$$F: J \times C([-r, 0; Z_{\frac{1}{2}}]) \longrightarrow Z_{\frac{1}{2}}, \text{ las cuales satisfacen las con-}$$

diciones de (1.4), (1.5) y (1.6). Entonces la función

$z \in C([-r, b]; Z_{\frac{1}{2}})$, dada por:

$$z(t) = \begin{cases} T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[Bu(s) + \\ \quad + \int_0^s F(\tau, x_\tau) d_\tau] ds, & t \in J \\ \varphi(t), & -r \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

es una solución moderada del problema (1.4)

Proposición 3.1 Como A es el generador infinitesimal del grupo fuertemente continuo $\{T(t)\}$ en $Z_{\frac{1}{2}}$, si

$F: J \times C \longrightarrow Z_{\frac{1}{2}}$, es continua en J y uniformemente Lipschitz C , entonces para cualquier $\varphi \in C$, el problema (1.4) tiene una y solo una solución moderada dada por (3.1).

Definición 3.2 Decimos que el sistema (1.4) es exactamente controlable en J si, para todo $\tilde{\varphi} \in C$ y $z_1 \in Z_{\frac{1}{2}}$, existe un

control $u \in L^2(J, L^2[0, 1])$ tal que la solución $z(t)$ de (3.1),

satisface que $z(b) = z_1$

Sea

$$G_F : L^2(J, L^2[0,1]) \rightarrow Z_{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

el operador dado por

$$G_F u = \int_0^b T(-s)[Bu(s) + \int_0^s F(\tau, z_\tau) d\tau] ds \quad (3.3)$$

donde z_τ es el truncamiento de la solución moderada,

$z(t) = z(t, \varphi(0), u)$, correspondiente al sistema (1.4).

Proposición 3.2 El Sistema (1.4) es exactamente controlable en J si, y solo si, el operador G_F dado por (3.3) es sobreyectivo; esto es

$$G_F(L^2(J, L^2[0,1])) = Z_{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Lema 3.1 Sean $u_1, u_2 \in L^2(J, L^2[0,1])$; $\varphi \in C$ y $z_i = z(t, \varphi(0), u_i)$; $i = 1, 2$, la solución moderada de (1.4). entonces ocurre la siguiente estimación:

$$\|z_t^2 - z_t^1\| \leq M \|B\| \|u_2 - u_1\|_{L^2(J, L^2[0,1])} \sqrt{be^{\frac{MLb^2}{2}}}, \quad 0 \leq t \leq b, \quad (3.5)$$

donde L es la constante de Lipschitz de F , $M = \hat{M}e^{wb}$ y $z_t^i = (z_i)_t$ es el truncamiento de la solución z_i , $i = 1, 2$.

Prueba

Sean z_1, z_2 las soluciones moderadas de (1.4), correspondientes a u_1, u_2 respectivamente, entonces:

$$\|z_2(t) - z_1(t)\| = \left\| \int_0^t T(t-s)[Bu_2(s) - Bu_1(s)] ds + \int_0^t T(t-s) \left[\int_0^s F(\tau, z_\tau^2) - F(\tau, z_\tau^1) d\tau \right] ds \right\|$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|z_2(t) - z_1(t)\| &\leq \\ M \|B\| \int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\| ds + & \quad (3.6) \\ M \int_0^t \int_0^s \|F(\tau, z_\tau^2) - F(\tau, z_\tau^1)\| d\tau ds, \end{aligned}$$

se usa la desigualdad de Holder's para obtener:

$$\int_0^t \|u_2(s) - u_1(s)\| ds \leq (\|u_2 - u_1\|)_{L^2} \sqrt{b} \quad (3.7)$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s \|F(\tau, z_\tau^2) - F(\tau, z_\tau^1)\| d\tau ds &\leq \\ L \int_0^t \int_0^s \|z_\tau^2 - z_\tau^1\| d\tau ds = L \int_0^t \int_\tau^t \|z_\tau^2 - z_\tau^1\| ds d\tau = & \\ L \int_0^t \|z_\tau^2 - z_\tau^1\| (t - \tau) d\tau & \quad (3.8) \end{aligned}$$

luego, de las ecuaciones (3.6), (3.7), (3.8), se tiene que

$$\begin{aligned} \|z_2(t) - z_1(t)\| &\leq M \|B\| (\|u_2 - u_1\|)_{L^2(J, L^2[0,1])} \sqrt{b} + \\ &+ ML \int_0^t \|z_\tau^2 - z_\tau^1\| (t - \tau) d\tau \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

Dado que el lado derecho de esta desigualdad es una función creciente de t y además

$$\|z_2(t) - z_1(t)\| = 0, \quad \forall t \in [-r, 0],$$

entonces,

$$\|z_2(t + \theta) - z_1(t + \theta)\| \leq M \|B\| \|u_2 - u_1\| \sqrt{b} + ML \int_0^t \|z_\tau^2 - z_\tau^1\| (t - \tau) d\tau \quad \forall t \in J, \theta \in [-r, 0]$$

así

$$\|z_t^2 - z_t^1\| \leq M \|B\| (\|u_2 - u_1\|)_{L^2(J, L^2[0,1])} \sqrt{b} + ML \int_0^t \|z_\tau^2 - z_\tau^1\| (t - \tau) d\tau \quad \forall t \in J$$

usando ahora la desigualdad de Gronwall's se obtiene

$$\|z_t^2 - z_t^1\| \leq M \|B\| \|u_2 - u_1\|_{L^2(J, L^2[0,1])} \sqrt{b} \exp\left(\frac{MLb^2}{2}\right).$$

lo cual concluye la prueba del Lema.

Teorema 3.1 Sea L la constante de Lipschitz de F y supongamos que

$$\|W^{-1}\| M^2 L \|B\| \frac{b^3}{2} \exp\left(\frac{MLb^2}{2}\right) \leq 1. \quad (3.9)$$

entonces el sistema (1.4) es exactamente controlable.

Prueba. Dado que el sistema lineal (2.1) es exactamente controlable, sabemos del corolario (2.1) que:

$$Wx = \int_0^b T(-s) B B^* T^*(-s) x ds, \quad x \in Z_{\frac{1}{2}}$$

es invertible y que el operador

$$\hat{G}u = \int_0^b T(-s) B u(s) ds.$$

es sobreyectivo.

Para demostrar la controlabilidad exacta del sistema no-lineal (1.4), es suficiente probar que el operador G_F , dado por (3.3), es sobreyectivo; para ello se toman

$$z_1 \in Z_{\frac{1}{2}}, \quad u_1 \in L^2(J, L^2[0,1]),$$

$$\varphi \in C([-r, 0], Z_{\frac{1}{2}}). \quad (3.10)$$

y se denota por $z_1(t) = z(t, \varphi(0), u_1)$ la solución moderada de (1.4) dada por (3.1); luego la controlabilidad del sistema lineal (2.1) permite asegurar la existencia de un control $u_2 \in L^2(J, X)$ tal que:

$$\hat{G}u_2 = z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^1) d\tau ds.$$

así,

$$z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^1) d\tau ds - \int_0^b T(-s) B u_2(s) ds = 0 \quad (3.11)$$

donde

$$u_2(t) = B^* T^*(-t) W^{-1} (z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^1) d\tau ds) \quad (3.12)$$

sea $z_2(t, \varphi, u_2) = z_2$, la solución moderada de (1.4) dada por (3.1) y z_τ^2 su truncamiento. Dado que

$$z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s f(\tau, z_\tau^2) d\tau ds \in Z_{\frac{1}{2}},$$

existe un control $u_3 \in L^2(J, X)$ y la correspondiente

solución moderada de (1.4) dada por $z^3(t, \varphi, u_3)$, la cual satisface

$$\hat{G}u_3 = z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^2) d\tau ds$$

y

$$z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^2) d\tau ds - \int_0^b T(-s) B u_3(s) ds = 0 \quad (3.13)$$

donde

$$u_3(t) = B^* T^*(-t) W^{-1} (z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^2) d\tau ds) \quad (3.14)$$

Continuando con este proceso, se construyen dos sucesiones: $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset L^2(J, X)$ y, $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset C([-r, b], Z_{\frac{1}{2}})$ tales que:

$$\begin{cases} u_{n+1} = B^* T^*(-t) W^{-1} (z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^n) d\tau ds), \\ z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^n) d\tau ds - \int_0^b T(-s) B u_{n+1}(s) ds = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

A continuación se prueba que $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(J, L^2[0, 1])$. En efecto:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\leq \|B^* \|T^*(-t)\| \\ &\|W^{-1} [\int_0^b T(-s) (\int_0^s F(\tau, z_\tau^{n+1}) - F(\tau, z_\tau^n) d\tau) ds]\| \leq \\ &\|B^* \| \|T^*(-t)\| \|W^{-1} \| \int_0^b \|T(-s)\| (\int_0^s \|F(\tau, z_\tau^{n+1}) - F(\tau, z_\tau^n)\| d\tau) ds \\ &\bullet \leq \|B^* \| \|T^*(-t)\| \|W^{-1}\| [ML \int_0^b (\int_0^s \|z_\tau^n - z_\tau^{n-1}\| d\tau) ds] \\ &= \|B\| \|T(-t)\| \|W^{-1}\| [ML \int_0^b (\int_0^s \|z_\tau^n - z_\tau^{n-1}\| d\tau) ds] \\ &= \|B\| \|M^2 L\| W^{-1} \| [\int_0^b (\int_\tau^b \|z_\tau^n - z_\tau^{n-1}\| ds) d\tau] \\ &= \|B\| \|M^2 L\| W^{-1} \int_0^b \|z_\tau^n - z_\tau^{n-1}\| (b-\tau) d\tau \end{aligned}$$

aplicando ahora el lema 3.1, se obtiene

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq M^3 L \|B\|^2 \|W^{-1}\| \|u_n - u_{n-1}\|_{L^2(J, L^2[0, 1])} \frac{b^{\frac{5}{2}}}{2} e^{\frac{MLb^2}{2}}.$$

Se eleva al cuadrado y luego se integran ambos miembros, de la desigualdad anterior, para obtener:

$$\int_0^b \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|^2 dt \leq M^6 L^2 \|W^{-1}\|^2 \|B\|^4 \|u_n - u_{n-1}\|_{L^2(J, L^2[0, 1])}^2 \cdot \left\{\frac{b^{\frac{5}{2}}}{2}\right\}^2 e^{MLb^2} \int_0^b dt$$

entonces:

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{L^2(J, X)} \leq M^3 L \|W^{-1}\| \|B\|^2 \|u_n - u_{n-1}\|_{L^2(J, L^2[0, 1])} \frac{b^3}{2} e^{\frac{MLb^2}{2}}$$

por lo tanto, si

$$M^3 L \|W^{-1}\| \|B\|^2 \frac{b^3}{2} e^{\frac{MLb^2}{2}} \leq 1, \text{ y } (u_n)_{n=1}^\infty \text{ es una}$$

sucesión de Cauchy en $L^2(J, L^2[0, 1])$, se tiene que existe

$u \in L^2(J, L^2[0, 1])$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

Sea $z(t) = z(t, \varphi, u)$ la solución moderada correspondiente al control u , probaremos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau^n) d\tau ds = \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau) d\tau ds \quad (3.17)$$

donde z_τ , es el truncamiento de la solución moderada $z(t, \varphi, u)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^b T(-s) \left[\int_0^s F(\tau, z_\tau^n) - F(\tau, z_\tau) d\tau \right] ds \right\| \leq \\ &\leq ML \int_0^b \int_0^s \|z_\tau^n - z_\tau\| d\tau ds = ML \int_0^b \int_\tau^b \|z_\tau^n - z_\tau\| ds d\tau \\ &= ML \int_0^b \|z_\tau^n - z_\tau\| (b-\tau) d\tau \leq MLb \int_0^b \|z_\tau^n - z_\tau\| d\tau \end{aligned}$$

usando nuevamente el lema 3.1, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^b T(-s) \left[\int_0^s F(\tau, z_\tau^n) - F(\tau, z_\tau) d\tau \right] ds \right\| \\ &\leq M^2 L b^{\frac{5}{2}} \|B\| \exp \frac{MLb^2}{2} \|u_n - u\|_{L^2(J, L^2[0, 1])} \end{aligned}$$

así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b T(-s) \left[\int_0^s F(\tau, z_\tau^n) - F(\tau, z_\tau) d\tau \right] ds = 0,$$

lo cual prueba (3.17).

finalmente, tomando límite en (3.15), se obtiene que:

$$z_1 - \int_0^b T(-s) \int_0^s F(\tau, z_\tau) d_\tau ds - \int_0^b T(-s) Bu(s) ds = 0 \quad (3.18)$$

entonces,

$$\int_0^b T(-s) [Bu(s) + \int_0^s F(\tau, z_\tau) d_\tau] ds = z_1,$$

Lo cual prueba que G_F es sobreyectivo. Por lo tanto, de la proposición 3.2, se concluye que el sistema (1.4) es exactamente controlable.

Agradecimiento

Los Autores expresan su agradecimiento al Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CDCHT) de la Universidad de Los Andes, por haber financiado parcialmente este trabajo bajo el proyecto I-894-05-05-C.

Referencias

Balachandran K and Sakthivel R, 2001, Controllability of

Functional Semilinear Integrodifferential Systems in Banach Space, *Journal of mathematical Analysis and Applications*, Vol. 255, pp. 447-457.

Balachandran K and Manimegalai, 2002, Controllability of Nonlinear Abstract Neutral Evolution Integrodifferential System, *Nonlinear Funct. Anal. and Appl*, Vol. 7, N°. 1, pp. 85-100.

Bárcenas D, Leiva H and Sívoli Z, 2005, A Broad Class of Evolution Equations are Approximately Controllable, but Never Exactly Controllable, *IMA Journal of Math. Cont. and Information*, Vol. 22, pp. 310-320.

Iturriaga E and Leiva H, 2007, A necessary and sufficient condition for the controllability of linear systems in Hilbert spaces and applications, *IMA Journal of Math. Cont. and Information*.

Leiva H, 2005, Exact controllability of the suspension bridge model proposed by Lazer and McKenna, *J. Math. Anal. Appl.* 309, pp 404-419.

Leiva H and Zambrano H, 1999, Rank condition for the controllability of a linear time-varying system *International Journal of Control*, Vol. 72, pp 920-931.