Consideraciones para el modelado de sistemas mediante Redes de Petri

Aspects of modeling systems using Petri Nets

Castellanos, Carlos
Departamento de Ingeniería de Sistemas Telemáticos
ETSI Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid
ccaste@dit.upm.es

Recibido: 03-01-2006 Revisado: 25-06-2006

Resumen

Las Redes de Petri son una alternativa matemática y gráfica para modelar diferentes tipos de sistemas, dichas redes han tenido gran aceptación entre la comunidad científica, su permisividad y generalización han dado pie a diversas interpretaciones durante el modelado permitiendo una amplia gama de aplicaciones. Aunque no es algo nuevo, actualmente, su campo de aplicación sigue en constante crecimiento gracias a las diversas extensiones y ampliaciones de carácter específico. Este documento presenta el estado del arte de las Redes de Petri proporcionando las herramientas y conceptos básicos que permiten profundizar en esta área de investigación y actuales desarrollos.

Palabras clave: redes, Petri, modelado, sistemas.

Abstract

Petri Nets are a mathematical and graphical choice to model many kind of systems, which have been accepted by the scientist community, their permissiveness and spread give cause for being interpreted in several different ways during the modelling, making possible a wide range of applications. Although Petri Nets are not new, actually, the field of application continues growing thanks to their extensions and specific development. This review paper on Petri Nets provides the basic skills and concepts to help us to understand this topical research area.

Key words: net, Petri, modeling, systems.

1 Introducción

Desde sus orígenes hasta nuestros días, muchas han sido las aportaciones realizadas al entorno teórico y aplicado de las Redes de Petri (RdP), así mismo, debido a sus características y contribuciones, existen diferentes perspectivas para explicarlos y abordarlos. Actualmente, el conocimiento básico de RdP es deseable y hasta obligatorio para diversas áreas como, Ciencias Computaciones, Análisis de Sistemas, Ingenierías, etc.

Este documento fue elaborado para servir como medio de referencia y consulta, presenta el panorama general de las RdP facilitando el entendimiento de los conceptos básicos para el modelado de sistemas, proporcionando las herramientas que permiten profundizar en esta área de investigación y actuales desarrollos.

Las Redes de Petri surgen como resultado del trabajo doctoral "Kommunikation mit Automaten" (Petri, 1962) y de las investigaciones realizadas por Carl Adam Petri en la Universidad de Darmstadt. En ese trabajo se presentaba principalmente el desarrollo teórico de los conceptos básicos desde las que se han desarrollado las RdP, se formulaban las bases para la teoría de comunicación entre componentes asíncronos de un sistema computacional, la relación entre eventos (Peterson, 1981); y se describía la conducta de sistemas concurrentes en términos de relaciones causa-efecto (Bernardi, 2002).

Las RdP representan una alternativa gráfica y matemática para el modelado de sistemas de información paralelos, concurrentes, asíncronos, no-determinísticos, distribuidos y/o estocásticos (Rivera, 2000; Murata, 1989). Una RdP es un modelo formal abstracto de flujo de información que posibilita el análisis de sistemas y procesos, ya que permite modelar el comportamiento y la estructura de un sistema, llevando el modelo a condiciones límite que en un sistema real son difíciles de lograr.

En este documento se presentan los principales aspectos de las RdP, se inicia con la descripción de las definiciones formal, gráfica y matricial, representadas en un mismo ejemplo, así como los principales conceptos; posteriormente se hace referencia a las reglas de disparo como normas de ejecución para dichas redes.

De forma breve se describen las propiedades y métodos de análisis de las RdP, de igual forma, se presenta su taxonomía y las principales extensiones realizadas, presentando brevemente algunos ejemplos, y por último se describe el entorno aplicativo de las RdP.

2 Definiciones formales y representaciones de Redes de Petri

La estructura básica de una RdP está formada por dos tipos de nodos: lugares P (places) y transiciones T (transitions); y por dos tipos de funciones: la función de entrada I (input) y la función de salida O (output). Las funciones de entrada y salida relacionan a los lugares y a las transiciones. La definición formal de una RdP clásica es de la siguiente manera:

Definición 1. Representación Red de Petri clásica es una 4-tupla N=(P,T,I,O), donde: $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ (P es un conjunto finito y no vacío de lugares). $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ (T es un conjunto finito y no vacío de transiciones). $P\cap T=\varnothing$ y $P\cup T\neq\varnothing$. $I:P\times T\rightarrow\{0,1\}$ Función de entrada, representa los lugares de entrada a la transición T). $O:T\times P\rightarrow\{0,1\}$ (Función de salida, representa los lugares de salida de la transición T).

De la definición anterior se pueden deducir los siguientes conjuntos, $^{\bullet}p$ y $p^{\bullet}$ representan las funciones de entrada y salida para los lugares, de igual forma, $^{\bullet}t$ y $t^{\bullet}$ para las transiciones: $p\in P$ y $t\in T$. $^{\bullet}p=\{t\in T \mid I(t,p)>0\}$ (Transiciones de entrada a p). $p^{\bullet}=\{t\in T \mid O(p,t)>0\}$ (Transiciones de salida de p). $^{\bullet}t=\{p\in P \mid I(p,t)>0\}$ (Lugares de entrada a t). $t^{\bullet}=\{p\in P \mid O(t,p)>0\}$ (Lugares de salida de t).

Cabe mencionar que, la definición formal de una RdP varía de un autor a otro, por ejemplo, algunos la definen como una cuaterna (Brams, 1986a; Brams, 1986b; Peterson, 1981; Jiménez, 2004; Manson, 1988; Čapek, 2001), otros como una tripla N=(P,T,F) donde P representa el conjunto de lugares, T las transiciones y $F\subseteq\{P\times T\}\cup\{T\times P\}$ es un conjunto de arcos (Aalst y Hee, 2002; Kiepuszewski, 2003; Valk, 2003; Reijers 2002) y algunos más como una tupla de cinco elementos $N=(P,T,F,W,M_0)$ donde P representa los lugares, T las transiciones, $F\subseteq\{P\times T\}\cup\{T\times P\}$, $W:F\rightarrow\{1,2,3\ldots\}$ es una función de peso y $M_0:P\rightarrow\{0,1,2,3\ldots\}$ es la marcación inicial (Rivera, 2000; Murata, 1989).

Gráficamente, una RdP se representa por medio de un grafo dirigido, con peso y bipartito que posee un estado inicial llamado marcado inicial M_0, donde los círculos simbolizan a los lugares y barras a las transacciones, dichos lugares y transiciones se conectan por medio de arcos dirigidos etiquetados con un número entero natural llamado *peso de arco* (por convención, un arco no etiquetado tiene peso unitario, los arcos con peso mayor que la unidad se dibujan frecuentemente con dos o más trazos paralelos), pero nunca se conectan lugares con lugares ni transiciones con transiciones. Esta forma gráfica proporciona una representación clara del problema modelado y en la mayoría de los casos es equivalente a la descripción algebraica de las RdP (Fig. 1 y Fig. 2).

$P=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$ $T=\{t_1,t_2,t_3\}$

$F=\{(p_1,t_1),(p_2,t_2),(p_3,t_2),(t_1,p_4),(t_2,p_4),(p_4,t_3),(t_3,p_5)\}$

$I(t1)=\{p_1\}$ $I(p_1)=I(p_2)=I(p_3)=\varnothing$
$I(t2)=\{p_2,p_3\}$ $I(p_4)=\{t_1,t_2\}$
$I(t3)=\{p_4\}$ $I(p_5)=\{t_3\}$

$O(t_1)=O(t_2)=\{p_4\}$ $O(p_1)=\{t_1\}$
$O(t_3)=\{p_5\}$ $O(p_2)=O(p_3)=\{t_2\}$
$O(p_4)=\{t_3\}$
$O(p_5)=\varnothing$

$w(p_2,t_2)=w(p_3,t_2)=w(t_1,p_4)=w(t_2,p_4)=1$
$w(p_1,t_1)=w(p_4,t_3)=2$
$w(t_3,p_5)=3$

$M_0=\{2,1,1,0,0\}=2p_1+1p_2+1p_3+0p_4+0p_4=[2p_1,1p_2,1p_3]$

Fig. 1. Definición formal de Redes de Petri.

Los tokens residen en los lugares y controlan la ejecución de las transiciones de la red, determinando el estado de una RdP, dichos tokens pueden ser representados gráficamente como pequeños puntos negros y pueden encontrarse cero o más en un mismo lugar, debido a esta flexibilidad ilimitada en el número, también se pueden representar escribiendo el número (entero positivo) de tokens en el lugar correspondiente. Cabe mencionar que, para el modelado de cierto tipo de sistemas (por ejemplo, sistemas físicos) es necesario determinar un límite en el número de tokens, lo que recibe el nombre de *RdP de capacidad finita*, donde a cada lugar p se le asigna una capacidad K(p) que indica el máximo número de tokens que pueden contener al mismo tiempo (Murata, 1989; Rivera 2000).

Definición 2. Representación gráfica de una RdP N=(P,T,I,O), es un grafo G múltiple (porque permite múltiples arcos de un nodo del grafo a otro), dirigido (porque los arcos tienen dirección, lugares-transiciones o transiciones-lugares) y bipartito (porque consiste de dos tipos de nodos: lugares y transiciones), G=(V,A), donde $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_y\}$ es un conjunto finito de vértices y $A=\{a_1,a_2,...,a_z\}$ es un conjunto finito de arcos dirigidos, $a_r=(v_s,v_d)$ con $v_s\in V$ y $v_d\in V$. El conjunto V puede ser particionado en dos conjuntos disjuntos P y T tal que $V=P\cup T$, $P\cap T=\varnothing$, y para cada arco dirigido, $a_r\in A$, si $a_r=(v_s,v_d)$, donde $v_s\in P$ y $v_d\in T$, o $v_s\in T$ y

$v_d \in P$.

Expresado de otra forma, si de $V=P \cup T$ se define A como un conjunto de arcos dirigidos tal que $\forall p_i \in P$ y $\forall t_j \in T$ por lo tanto $((p_i,t_j),A)=(p_i,I(t_j))$ y $((t_j,p_i),A)=(p_i,O(t_j))$. Como se puede observar, el grafo $G=(V,A)$ de la RdP es equivalente a la estructura de RdP $N=(P,T,I,O)$.

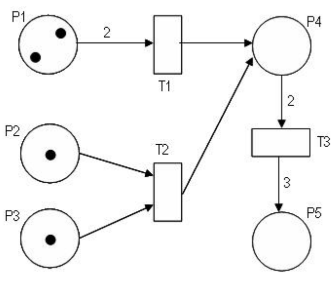

Fig. 2. Representación gráfica de Redes de Petri.

La naturaleza gráfica de las RdP permite la incorporación de etiquetas que explican las especificaciones y el funcionamiento del modelo, sin que estas afecten la ejecución de la red, favoreciendo la comunicación entre los usuarios y los implementadores del sistema.

Una RdP con tokens es una *RdP Marcada*, la cual puede definirse formalmente como $N=(P,T,I,O,M_0)$, donde $M_0=\{m_{01},m_{02},\ldots m_{0p}\}$ es un vector que denota el marcado inicial en cada lugar. El estado de un RdP esta definido por un conjunto de subestados del sistema, dicho de otra manera, es el conjunto de marcas (número de tokens) asociadas a cada uno de los lugares en un instante dado, lo que se denomina Marcado, *secuencia de marcación* $M=\{m_1,m_2,\ldots m_n\}$. Es importante conocer la siguiente notación relacionada al Marcado: $M_1 \xrightarrow{t} M_2$ (La transición t es activada en el estado M_1 y después del disparo de t el resultado es M_2). $M_1 \longrightarrow M_2$ (Hay una transición t, tal que, $M_1 \xrightarrow{t} M_2$). $M_1 \xrightarrow{\sigma} M_n$ (La *secuencia de disparo* $\sigma=(t_1t_2t_3\ldots t_{n-1})$ genera los estados desde M_1 hasta M_n, es decir, $M_1 \xrightarrow{t1} M_2 \xrightarrow{t2} \ldots \xrightarrow{tn-1} M_n$).

En la literatura también se puede encontrar el concepto *función de estado siguiente* que se representa por δ, el cual determina el cambio de estado causado por el disparo de una transición, relacionando las dos secuencias; $\delta(M_k,t_j)=M_{k+1}$ donde $k=\{0,1,2,\ldots\}$, por ejemplo, $\delta(M_2,t_3)=(0,1,2,3,0)=M_3$ indica que con el disparo de t_3 durante la marcación M_2 se obtiene el estado siguiente M_3 equivalente al vector $M_3=(0,1,2,3,0)$.

Generalmente, durante la ejecución de una RdP se obtienen la secuencia de marcación y la secuencia de disparo, las cuales proporcionan el *registro de la ejecución* de la red. Dada la secuencia de marcación se puede obtener la secuencia de disparo y viceversa.

Como se ha mencionado, el estado de una RdP se representa por medio de un vector que indica la distribución de los tokens en la red, pueden representarse de diversas formas: $0p_1+1p_2+2p_3+3p_4+0p_5$ lo que indica que los lugares p_1 y p_5 no contienen tokens, se encuentra uno en p_2, dos en p_3 y tres en p_4, igualmente puede representarse como $p_2+2p_3+3p_4$; también mediante corchetes $[p_2,2p_3,3p_4]$ y $[p_2,p_3^2,p_4^3]$.

En las RdP se puede determinar la *multiplicidad* (entero positivo), es decir, el número de ocurrencias de entrada ya sean de lugares a transiciones y viceversa. Su representación matemática sería $\#(p_i,I(t_j))$ donde $i=\{1,2,..,m\}$ y $j=\{1,2,..,n\}$, lo que indica que la multiplicad es el peso del arco $w(p_i,t_j)$, el conjunto de arcos paralelos que van del lugar de entrada p_i hacia la transición t_j; y respectivamente para $w(t_j,p_i)$, lo que significa que un arco etiquetado con z puede ser interpretado como z arcos paralelos, ver Fig. 4a. De lo antes mencionado se deduce: $\#(t_j,I(p_i)) = \#(p_i,O(t_j))$ y $\#(t_j,O(p_i)) = \#(p_i,I(t_j))$.

La primera extensión de las RdP clásicas son las *RdP Generalizadas*, las cuales se consideran una mejora de las RdP clásicas debido a la incorporación del concepto "peso del arco" (Jiménez, 2004).

Las RdP también pueden ser representadas matricialmente, tomando como base la definición formal de RdP clásica pero reemplazando las funciones de entrada y salida por dos matrices de m (número de lugares en la red) filas por n (número de transiciones en la red) columnas.

Definición 3. Representación matricial de una RdP $N=(P,T,D^-,D^+)$, donde: $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ (P es un conjunto finito y no vacío de lugares). $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ (T es un conjunto finito y no vacío de transiciones). $D^-[j,i]=\#(p_i,I(t_j))$ (Matriz que define la multiplicidad de entras a las transiciones). $D^+[j,i]=\#(p_i,O(t_j))$ (Matriz que define la multiplicidad de salidas de las transiciones).

De lo anterior, se pueden determinar las siguientes matrices: $D^-=[D^-[ji]]_{n\times m}$ (Matriz de incidencia previa, donde $D^-[j,i]=\#(p_i,I(t_j))$). $D^+=[D^+[ji]]_{n\times m}$ (Matriz de incidencia posterior, donde $D^+[j,i]=\#(p_i,O(t_j))$). $D=D^+-D^-$ (Matriz de incidencia N).

$$D^- = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & +3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} & \end{array}$$

Fig 3. Representación matricial de Redes de Petri.

La *dualidad* es un aspecto común en la teoría de grafos, en RdP aunque este concepto puede ser usado manteniendo su estructura gráfica, su uso no ha sido generalizado debido a la dificultad que se presenta en la definición de la dualidad de RdP marcadas. La dualidad de una RdP N=(P,T,I,O) se obtiene intercambiando lugares y transiciones, lo que se representa como ¬N=(T,P,I,O), ver Fig. 5a.

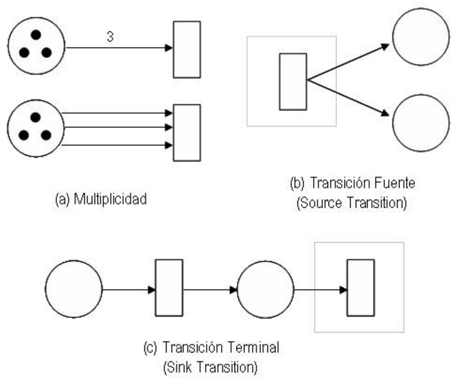

Fig. 4. Conceptos de Redes de Petri (1).

En una RdP, una transición sin lugar de entrada es llamada *transición fuente* (source transition), la cual es incondicionalmente activada (Fig. 4b). Una transición sin lugar de salida es llamada *transición terminal* (sink transition), ya que consume tokens pero no los produce (Fig. 4c).

Una RdP es *pura* cuando ninguna transición t tiene un lugar p que sea al mismo tiempo un lugar de entrada y de salida (*self-loop*), $\forall t_j \in T\ \ \forall p_i \in P\ \ I(p_i,t_j) \cap O(t_j,p_i)=\varnothing$, es decir, $\forall t \in T\ \ {}^{\bullet}t \cap t^{\bullet}=\varnothing$.

Entre las extensiones realizadas a las RdP clásicas se encuentran los *arcos inhibidores*, los cuales se representan gráficamente con un arco que sólo van dirigidos de lugares a transiciones terminado en un pequeña circunferencia en vez de punta de flecha, tienen la función de deshabilitar la transición cuando el lugar de entrada tiene un token y activa la transición cuando el lugar de entrada se encuentra desmarcado y se cumplen los requisitos de los lugares normales conectados a él, es decir, su función es inhibir transiciones, ver Fig. 5b. El uso de arcos inhibidores proporciona un incremento en las funcionalidades del modelado, pero reduce las posibilidades de análisis (Čapek, 2001).

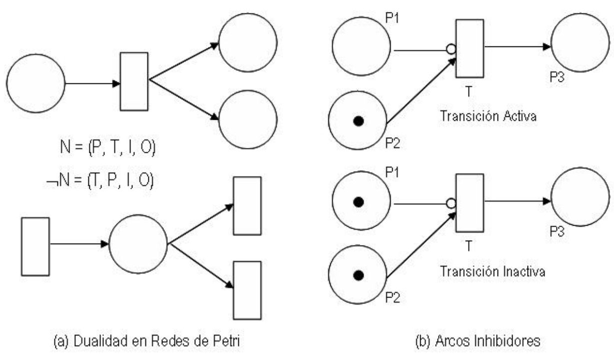

Fig. 5. Conceptos de Redes de Petri (2).

3 Reglas de disparo

El comportamiento de muchos sistemas puede describirse en términos de sus estados y cambios; como se ha mencionado antes, el estado de una RdP depende directamente del marcado en cada instante durante la ejecución de la red, es decir, la ubicación de los tokens cambiará de acuerdo a las reglas de disparo, proporcionando su comportamiento dinámico, ver Fig. 6. A continuación se presentan las reglas básicas de disparo para una RdP clásica:

- Una transición t es activada, si cada lugar p de entrada de t contiene al menos un token.
- Una transición t activada consume un token para cada lugar de entrada p y produce un token para cada lugar de salida p correspondiente a esa transición, $M'(p)=M(p)-I(p,t)+O(t,p),\ \forall p \in P$.

Para Murata (1989), las reglas de disparo para RdP de capacidad finita son llamadas *reglas de transición estrictas* (strict transition rules), las cuales adicionalmente deben seguir el siguiente criterio: El número de tokens de cada lugar de salida p de t no debe exceder su capacidad K(p) después del disparo de t.

Si tomamos en cuenta otros aspectos como multiplicidad y arcos inhibidores, las reglas de disparo podrían ser las siguientes (Gaeta, 1997; Bernardi 2002):

- Una transición t es activada, si cada lugar de entrada p contiene un número de tokens mayor o igual a la multiplicidad de los arcos de entrada a la transición t, $\forall p \in I(p,t),\ M(p) \geq w(p,t)$. Dicho de otra manera, elimina el número de tokens correspondiente al peso del arco que conecta el lugar de entrada p y la transición t, y agrega los tokens correspondientes a la multiplicidad del arco que conecta t con el lugar de salida p.
- Una transición t es activada, si cada lugar inhibidor contiene un número de tokens estrictamente más pequeño que la multiplicidad correspondiente al arco inhibidor, $\forall p \in IH(t),\ M(p)<w(p,t)$.

Para las RdP de capacidad finita, habría que aplicar la siguiente regla de disparo: M(p) no puede excederse de K(p) para todo $p \in t^{\bullet}$.

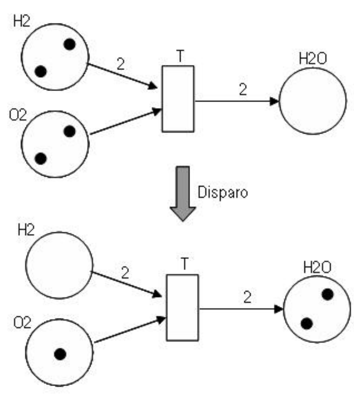

Fig. 6. Ejemplo de disparo de Redes de Petri.

Las transiciones pueden seguir disparándose indefinidamente hasta llegar a un estado deseado o hasta que ninguna puede ser disparada, conforme las transiciones son disparadas, el número total de tokens en la red puede variar, no garantizando su conservación. Tal como señala Rivera (2000), una transición puede o no ser disparada al habilitarse, cuando más de una transición son habilitadas, alguna de ellas es seleccionada de manera no-determinística dependiendo de la secuencia de disparo del modelo empleado.

4 Algunas propiedades de las Redes de Petri

Después del modelado de sistemas por medio de RdP, es importante realizar la verificación de propiedades y problemas asociados, principalmente aplicados a sistemas concurrentes, por un lado para demostrar que el diseño realizado es correcto y que cumple las especificaciones con las que ha sido concebido, y por otro, poder extraer propiedades sobre el comportamiento del sistema. En las RdP se pueden encontrar dos tipos de propiedades: las que dependen del marcado inicial llamadas *propiedades de comportamiento* y las que son independientes del marcado inicial llamadas *propiedades estructurales*.

Entre las propiedades de comportamiento se pueden mencionar las siguientes:

- ***Alcanzabilidad:*** (Reachability) Es una base fundamental para el estudio de las propiedades dinámicas de cualquier sistema. Como se ha visto, una secuencia de disparos propicia una secuencia de marcados, por lo que, un marcado M_k se dice que es alcanzable desde un marcado M_0 si existe una secuencia de disparos σ que transforma M_0 en M_k, lo que se representa como $M_0[\sigma>M_k$ (M_k es alcanzable desde M_0 mediante σ), el conjunto de todos los marcados alcanzables desde M_0 se denota por $R(M_0)$ y el conjunto de todas las secuencias de disparo por $L(M_0)$. El problema de alcanzabilidad, quizás el más simple y básico de los problemas de análisis en RdP, consiste en verificar si $M_k \in R(M_0)$ dada una RdP N con un marcado M_0 y un marcado M_k.
- ***Seguridad:*** (Safeness) Esta propiedad es una de las principales y básicas, por definición las RdP clásicas son seguras. Se dice que un lugar de una RdP es segura si el número de tokens en ese lugar nunca excede la unidad. Una RdP es segura si todos los lugares de la red son seguros, lo que se representa de la siguiente manera, un lugar $p_i \in P$ de una RdP N con un marcado inicial M_0 es segura si para toda $M_k \in R(M_0)$, $M_k(p_i) \leq 1$. Esta propiedad es una de las más importantes en el modelado para dispositivos de hardware, el lugar puede ser implementado por medio de un flip-flop, la seguridad es una caso especial de la propiedad de acotamiento (Peterson, 1981).
- ***Acotamiento:*** (Boundedness) Una RdP es acotada o k-acotada si el número de tokens en cada lugar no excede el número finito k para cualquier marcado alcanzable desde M_0, es decir, $M_k(p_i) \leq k$ para cada lugar de la red en cada marcado $M_k \in R(M_0)$. Esta propiedad determina la finitud del número de estados del sistema representado por una RdP, ya que verificando si la red es acotada o segura se garantiza que no habrán desbordamientos en los buffers o registros, sin importar la secuencia de disparo realizada.
- ***Persistencia*:** (Persistence) Se dice que una RdP es persistente si, dos transiciones activadas cualesquiera, el disparo de una de las transiciones no desactiva a la otra. Una transición en una red persistente una vez activada estará activada hasta que dispara. Esta propiedad es útil en el contexto de la programación paralela y circuitos asíncronos.
- ***Vivacidad:*** (Liveness) Una RdP viva garantiza las operaciones libres de bloqueos (transacción o transacciones que no pueden ser disparadas), sin importar la secuencia de disparo realizada. Una transición $t \in T$ se dice viva si, para todo $M_k \in R(M_0)$ hay un marcado M_{k+1} alcanzable desde M_k que habilita la transición t; una RdP se dice viva si todas sus transiciones t son vivas. Otros estudios en relación a la vivacidad y bloqueos, categorizan la vivacidad en niveles, en la que una transición esta muerta en el nivel cero (L0) y viva en el nivel cuatro (L4), una RdP es viva en el nivel i si cada transición es viva en el nivel i, la clasificación es la siguiente: L0-live (dead), si nunca puede ser disparada. L1-live, si es potencialmente disparable, es decir, si puede ser disparable alguna vez en alguna secuencia de disparo en $L(M_0)$. L2-live, si dado un número entero positivo n, la transición t puede ser disparada al menos n veces en alguna secuencia de disparo en $L(M_0)$. L3-live, si hay un número infinito de secuencias de disparo en las que la transición ocurra infinitamente con frecuencia en $L(M_0)$. L4-live (live), si la transición t es L1-live para cada marcado M en $R(M_0)$.

Entre las propiedades estructurales se puede mencionar las siguientes:

- ***Acotamiento estructural:*** (Structural Boundedness) Una RdP N es estructuralmente acotada si se encuentra acotada para cualquier marcado inicial finito M_0.
- **Conservatividad:** (Conservativeness) Una RdP N es (parcialmente) conservativa si existe un número entero positivo para todo (algún) lugar p tal que la suma de tokens es una constante para todo $M_k \in R(M_0)$ y el marcado M_0.
- ***Controlabilidad:*** (Controllability) Una RdP N es completamente controlable si un marcado es alcanzable desde cualquier otro marcado.
- **Repetitividad:** (Repetitiveness) Una RdP N es (parcialmente) repetitiva si existe un marcado M_0 y una secuencia de disparos σ desde M_0 tal que toda (alguna) transición ocurre infinitas veces en σ.
- ***Vivacidad estructural:*** (Structural Liveness) Una RdP N es estructuralmente viva si existe un marcado inicial vivo para N.

5 Análisis de Redes de Petri

Debido a su generalización, tomaremos como base la clasificación proporcionada por Murata (Murata, 1989) donde se propone la siguiente taxonomía de los métodos de análisis para RdP:

- ***Árbol de cobertura*:** (The Coverability Tree) Las Técnicas Enumerativas consisten esencialmente en la enumeración de todos los marcados mediante la generación del grafo de alcanzabilidad para sistemas acotados o del grafo de cobertura para sistemas no acotados, estas técnicas son aplicables a todas las clases de redes aunque en la práctica son restringidas a redes relativamente pequeñas debido a que un árbol de cobertura de gran tamaño imposibilita un cálculo efectivo. Dada una RdP con el marcado M_0 se obtienen todos los nuevos marcados de acuerdo al número de transacciones disparadas, dando como resultado un árbol de representación de marcados, donde los nodos representan los marcados generados desde M_0 y los arcos las transiciones disparadas. Cuando se trata de una red no acotada, con el objetivo de producir un árbol finito, se introduce el símbolo ω indicando que un lugar puede llegar a tener un número arbitrariamente grande de marcas, generando un grafo de cobertura.
- Matriz de incidencias y ecuaciones de estados**:** (Incidente Matrix and State Equation) El comportamiento dinámico de los sistemas puedes ser representado por ecuaciones diferenciales o ecuaciones algebraicas. Estás Técnicas Estructurales tienen como objetivo obtener la máxima información del modelo utilizando su estructura y marcado inicial, investigando la relación entre el comportamiento de la red y su estructura. La solución de estas ecuaciones es un tanto limitada, debido a la naturaleza no-determinística de los modelos de RdP y por la restricción respecto a la solución en la que no deben encontrarse enteros negativos (Murata, 1989).
- ***Reglas de reducción simple:*** (Simple Reduction Rules for Analysis) Las Técnicas de Transformación tiene el objetivo de simplificar el tamaño de modelos extensos mediante reglas de reducción que conservan las propiedades que se quieren analizar. La aplicación de los métodos de reducción están limitados por los sistemas irreducibles, por lo que, el análisis debe ser complementado por otras técnicas.

Estas tres técnicas de análisis no son exclusivas sino complementarias, por ejemplo, las conclusiones obtenidas en un análisis estructural para una determinada red podrían simplificar o acelerar el análisis de enumeración, o la aplicación de los métodos de reducción; normalmente, el diseñador puede usarlas en función de las necesidades del proceso de análisis (Colom et all, 2003). Para Peterson (Peterson, 1981), el árbol de cobertura y la matriz de ecuaciones son las técnicas de análisis que pueden ser fácilmente implementadas por medio de ordenadores, permitiendo el análisis automático de los sistemas modelados; así mismo, señala que estas técnicas proveen de mecanismos de solución a los principales problemas asociados a las propiedades.

6 Taxonomía de las Redes de Petri

Las bases desarrolladas por Carl A. Petri dieron origen a las RdP clásicas (redes donde el peso del arco es la unidad), sólo describían la estructura lógica de los sistemas, no permitían la definición de datos, no incluían el uso de variables o funciones, no abarcaban la especificación de módulos bien definidos utilizando el concepto de jerarquías, no consideraba explícitamente el concepto tiempo, la manipulación de la red tenía que ser directamente en su estructura, no contemplaban factores indocumentados del modelo, siempre después de cada disparo tenían que ser eliminados todos los tokens de los lugares de entrada, etc. Todos estos y otros factores propiciaron el surgiendo de propuestas en busca de mejoras, estas iniciativas se fueron agrupando y clasificando como la realizada por Monika Trompedeller, basada en los valores que pueden representar los lugares, tomando como referencia a Bernardinello y de Cindio, (1992), aunque la mayoría de los autores hacen la siguiente taxonomía: RdP de Alto Nivel, RdP Extendidas y Subclases de RdP. De igual forma, se han propuesto otros tipos de RdP de carácter específico, en la Tabla 1 se muestran las principales contribuciones realizadas.

Tabla 1. Contribuciones a las Redes de Petri.

Clases de RdP	Principales desarrolladores
Abstract Petri Nets	J. Padberg
Arc-Typed Petri Nets	E. Kindeler, R. Walter
Coloured Petri Nets (CPN)	K. Jensen
Distributed Timed-Arc Petri Nets (DTAPN)	M. Nielsen, V. Sassone, J. Srba
Elementary Nets (EN-nets)	G. Rozenberg, P.S. Thiagarajan
Extended Fuzzy-Timing Net (EFTN)	Y. Zhou, T. Murata
extended Hybrid Petri Nets (eHPNs)	R. David, S.I. Caramihai
First-Order Hybrid Petri Nets (FOHPNs)	F. Balduzzi, A. Guia, C. Seatzu
Fuzzy Timing Net (EFTN)	T. Murata
Generalized Batches Petri Nets (GBPNs)	I. Demongodin
Hierarchical Object-Oriented PN (HOONets)	J.E. Hong, D.H. Bae
Hybrid Petri Nets (HPN)	R. David, H. Alla
Object Composition Petri Nets (OCPN)	T. Little, A. Ghafoor
Petri Nets with Objects (PNO)	P.A. Palanque, R. Bastide, L. Dourte, C. Sibertin-Blanc
Predicate/Transition Nets (PrT-nets)	H.J. Genrich, K. Lautenbach
R-fuzzy Petri Nets	J.S. Golan
Time Petri Nets	P. Merlin, D.J. Faber
Timed Petri Nets	C. Ramchandani
Time Stream Petri Nets (TSPN)	M. Diaz, S. Senac
Time Workflow Nets (TWF-nets)	S. Ling, H. Schmidt
Workflow Nets (WFnet)	W.M.P. van der Aalst
OTROS: Compositional PN (CoPN), Open PN, Dynamic Timed PN, Markovian PN (MPN), Labeled Generalized Stochastic PN (LGSPN), Multi-Dimensional PN, Product-Form Stochastic PN (PF-SPN).	

Las Extensiones a las RdP incrementaban el poder de modelado facilitándolo para los procesos complejos, cabe mencionar que, los efectos de algunas extensiones también se vieron reflejados en la disminución del poder de decisión. Entre las extensiones a las RdP se pueden mencionar: RdP Generalizadas, RdP con Arcos Inhibidores, RdP de capacidad finita, RdP Etiquetadas, etc.

Con la reducción del poder de decisión, se realizaron estudios para determinar las restricciones estructurales de las RdP, definiendo un grupo de redes clásicas llamada Subclases de RdP formado por: Máquinas de Estados (State Machine), Grafos Marcados (Marked Graphs), Redes de Libre Elección (Free Choice), Redes de Libre Elección Extendidas (Extended Free Choice), Redes de Elección Asimétricas (Asymmetric Choice).

Las funcionalidades de las RdP han sido útiles en diversas áreas en las que se requiere de modelado de sistemas, aunque cuando se trataba de sistemas complejos y extensos se presentaban dificultades de diseño, por tal motivo, se desarrollaron las llamadas Redes de Petri de Alto Nivel (High-Level Petri Nets) que según Aalst (Aalst, 1994) básicamente deben poseer las características de las RdP clásicas junto con color, tiempo y jerarquía.

6.1 Redes de Petri coloreadas

Las RdP Coloreadas (Coloured Petri Nets - CPN) fueron propuestas Kurt Jensen con el objetivo de formar parte del repertorio de modelado avanzado para diseñadores y analistas de sistemas, permitiendo escribir modelos compactos de sistemas muy complejos, tal como explica Jiménez (2004), realizado mediante la concentración de la descripción (y el análisis) de sistemas en los que se identifican diversos subsistemas con estructura y comportamientos similares, pero que trabajan en paralelo.

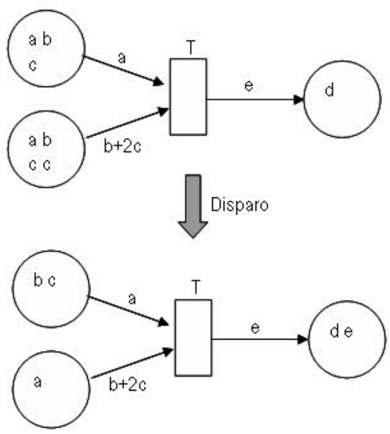

Fig. 7. Redes de Petri coloreadas.

Jensen (Jensen 1994, Jensen 1998) expone algunas ventajas existentes con el uso de CPN para el modelado de sistemas: Tienen una representación gráfica, proporcionan una semántica bien definida que especifica sin ambigüedad el comportamiento de las CPN, pueden usarse para describir una gran variedad de sistemas diferentes debido a su carácter genérico, proporcionan un mayor poder descriptivo de estados y acciones, proporcionan una descripción jerárquica, integran la descripción de control y sincronización con la descripción de manipulación de datos, pueden ser extendidas incorporando el concepto tiempo, proporcionan estabilidad evitando cambios significativos del sistema modelado, permiten simulaciones interactivas donde los resultados son presentados en diagramas CPN, constan de un vasto número de métodos de análisis formales para probar las propiedades de CPN, existen herramientas de apoyo para el diseño, simulación y análisis formal de redes, etc.

Las CPN proporcionan una estructura para la construcción y análisis de sistemas distribuidos y concurrentes, el funcionamiento básico consiste en la incorporación de marcas de diferentes colores permitiendo la circulación de diferentes tipos de tokens por la red, los colores pueden ser vistos como tipos de datos, variables o valores; por tal motivo, las CPN deben especificar el dominio de color cd(p) para cada lugar p y la información asociada a cada arco de la red, ver Fig. 7.

Las transiciones son activadas dependiendo las diferentes combinaciones de colores de los tokens en los lugares de entrada, de la misma forma, el número de tokens producidos, y sus valores, dependerán de los tokens consumidos. Las transiciones pueden etiquetarse dependiendo de los objetivos de diseño mediante texto, pseudos-código, una subrutina de programación o una especificación formal (Aalst y Hee, 2002).

6.2 Redes de Petri con tiempo

La incorporación del concepto tiempo a las redes no se hizo esperar debido a que las RdP clásicas no consideraban este concepto y sólo permitían el análisis de las propiedades lógicas de sistemas, las primeras contribuciones se basaban en el uso del tiempo de forma determinística y posteriormente estocástica (RdP Estocástica: Red donde cada transición es asociada con una variable aleatoria exponencialmente distribuida que representa el retraso desde la activación hasta el disparo de la transición); hay muchos mecanismos para relacionar el tiempo con las RdP.

Por ejemplo, Aalst (Aalst, 1994; Aalst y Hee, 2002) plantea la siguiente asociación, el tiempo en los tokens indicará cuando el token está disponible para su consumición (el tiempo en que se activará la transición), el tiempo asociado a los arcos representará el retraso (valor fijo o aleatorio, incluyendo el cero), la suma de ambas proporcionará el tiempo asignado los tokens generados por la transición para los lugares de salida. Los tokens son consumidos de acuerdo a las estructuras FIFO (first in, first out) y el disparo se realiza de forma automática sin implicar tiempo, cuando existen más de una transición con el mismo tiempo de activación se realiza una selección no-determinística.

Otra perspectiva se basa en el tiempo usado desde el momento en que los tokens del lugar de entrada son reservados para que puedan ser consumidos por la transición hasta el momento en que se generan los tokens para el lugar de salida, Gaeta (1997) describe esta acción como una operación atómica.

Como se ha dicho no existe una única perspectiva para incorporar el tiempo a las RdP, ya que puede estar asociado a los lugares (TPPN), transiciones (TTPN), tokens o arcos o. El tiempo se introduce para modelar la interacción entre distintas actividades considerando el tiempo desde comienzan hasta que se completan.

6.3 Workflow Net

Según Workflow Management Coalition (WfMC - http://www.wfmc.org/index.html), Workflow se define como la automatización de un proceso de negocio, completa o parcialmente, en donde documentos, información o tareas son transferidas de un participante a otro para su procesamiento, de acuerdo a un conjunto de reglas establecidas. En otras palabras, Workflow es la automatización y administración de procesos de negocios (principalmente relacionados a los procesos operacionales de contexto administrativo) descritos desde el punto de vista de los SI. Los Wf pueden ser vistos como la secuencia e interrelación de materiales, información, actividades y comunicaciones dentro de un proceso, que permite hacer llegar a la persona indicada, la actividad y los datos necesarios en el momento indicado dentro de determinado flujo del proceso.

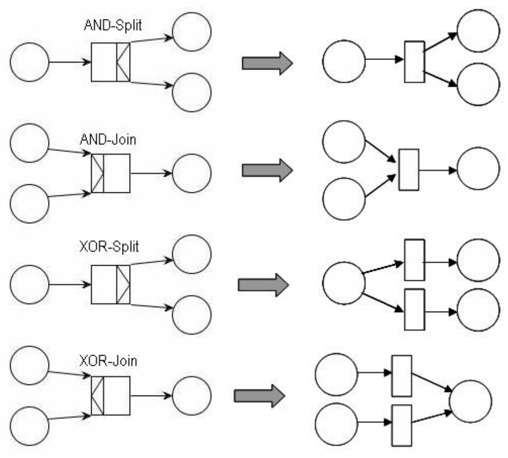

Fig. 8. Bloques de Control WFnet.

Workflow Net (WF-net) es una extensión de las RdP enfocadas específicamente a los procesos de negocio, desarrollado por W.M.P. van der Aalst (Aalst y Hee, 2002; Graaf y Aalst, 2003) y basada en los formalismos de RdP de alto nivel, es decir, con color, tiempo y jerarquía.

Las WF-nets se caracterizan por su estructura regular que especifica el ciclo de vida de un proceso, en la que debe haber un inicio y un fin, evitando los lugares y transiciones que pueden quedar suspendidos, garantizando que las tareas que no contribuyen al procesamiento no sean consideradas en el modelo.

Gráficamente, en este tipo de RdP se definen los bloques de control AND-split, AND-join, OR-split y OR-join que son usados para modelar rutinas secuenciales, condicionales, paralelas e iterativas, reduciendo la notación en gráficos compactos (ver Fig. 8). También se definen cuatro tipos de disparo (automático, recurso, mensaje y tiempo) que representan los diferentes tipos de dependencia entre una tarea del Workflow y su entorno operativo (ver Fig. 9).

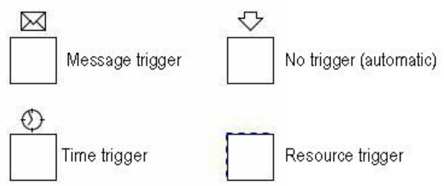

Fig. 9. Tipos de disparo WFnet.

7 Aplicaciones

Hay dos tendencias en el modelado de RdP que se enfocan en diferentes perspectivas: Condiciones en los lugares y eventos en las transiciones, o condiciones en las transacciones y eventos en los lugares. Aunque no hay un consenso de cual usar y cual presenta las mayores ventajas, la preferencia es utilizar la primera, es decir, representar los elementos pasivos como lugares y elementos activos como transiciones.

Como se ha dicho, las RdP han tenido gran aceptación entre la comunidad científica, su permisividad y generalización han dado pie a diversas interpretaciones durante el modelado de sistemas; por ejemplo, si usamos el concepto de condiciones y eventos, los lugares representan condiciones y las transiciones representan eventos, una transición (un evento) tiene un cierto número de lugares de entrada y salida que representan, respectivamente, las precondiciones y poscondiciones del evento, la presencia de un token en un lugar es interpretado como una condición verdadera asociada al lugar; otra interpretación podría ser, que el número de tokens en un lugar indican la cantidad de recursos disponibles (Murata, 1989), ver Tabla 2.

Las RdP tienen una amplia gama de aplicaciones, por ejemplo, sistemas sociales, sistemas de software distribuido, evaluación del desempeño, protocolos de comunicación, sistemas de bases de datos distribuidas, sistemas operativos y compiladores, programación paralela y concurrente, sistemas de control industrial, manufacturación flexible, tecnología Workflow, PLC, VLSI, estructuras y circuitos asíncronos, lenguajes formales, redes neuronales, etc. (Bernardi, 2002; Murata, 1989) y actualmente para el modelado de sistemas de educación a distancia.

Las RdP pueden estudiarse y aplicarse en diversas formas, Peterson (1981) expone que, el estudio y desarrollo de esta área tiene dos direcciones: la que se basa en el estudio teórico de las RdP para el desarrollo de herramientas, técnicas, fundamentos y conceptos para la aplicación de las RdP (Pure Petri net theory); y la que respecta principalmente a la aplicación de las RdP para el modelado y análisis de sistemas (Applied Petri net theory).

Tabla 2. Algunas interpretaciones de lugares y transiciones durante el modelado de Redes de Petri. Fuente (Murata, 1989).

Lugares de entrada	Transiciones	Lugares de salida
Precondiciones	Eventos	Poscondiciones
Datos de entrada	Procesamiento o Computo	Datos de salida
Señales de entrada	Procesador de señales	Señales de salida
Recursos necesarios	Tarea o Trabajo	Recursos liberados
Condiciones	Cláusula lógica	Conclusiones
Buffers	Procesador	Buffers

A pesar de que las RdP se han venido usando y desarrollando desde hace mucho tiempo, no existe una sola forma de definirlas y presentarlas, para una mayor comprensión y estudio en las RdP es aconsejable visitar el site "Petri Nets World" (http://www.informatik.uni-hamburg.de /TGI/PetriNets/) en el que se presenta una gran cantidad de recursos y herramientas clasificadas que pueden ser de mucha utilidad para profundizar en este amplio campo de investigación.

Referencias

Aalst W van der, 1994, Putting High-Level Petri Nets to Work in Industry, Journal of Computers in Industry, Vol. 25, No.1, pp. 45-54.

Aalst W van der y Hee K van, 2002, Workflow Management, Models, Methods, and Systems, MIT Press, USA.

Anisimov NA, Golenkov EA y Kharitonov DI, 2001, Compositional Petri Net Approach to the Development of Concurrent and Distributed Systems, Journal of Programming and Computer Software, Vol. 27, No. 6, pp. 309-319.

Bernardi S, 2002, Building Stochastic Petri Net models for the verification of complex software systems, Tesis de Doctorado, University of Turin. Italy.

Bernardinello L y de Cindio F, 1992, A Survey of Basic Net Models and Modular Net Classes, LNCS Vol 609, Springer Verlag. (http://www.informatik.uni-hamburg.de/ TGI/PetriNets/classification/).

Brams GW, 1986a, Las Redes de Petri, Teoría y Práctica, Tomo 1, Teoría y Análisis, Masson, S.A. Barcelona.

Brams GW, 1986b, Las Redes de Petri, Teoría y Práctica, Tomo 1, Modelización y Aplicaciones, Masson, S.A. Barcelona.

Čapek J, 2001, Petri Net Simulation of Non-deterministic MAC Layers of Computer Communication Networks, Tesis de Doctorado, Czech Technical University, Czech Republic.

Colom JM, Silva M y Teruel E, 2003, Properties of Petri Nets, En C. Girault y R. Valk (Eds,), Petri Nets for Systems Enginering, A Guide to Modeling, Verification, and Applications, pp. 53-72, Springer-Verlag, Germany.

Cortadella J, Lavagno L y Yakovlev A, 2000, Petri Nets 2000: Hardware Design and Petri Nets, Proceedings of the 21st International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Aarhus, Denmark.

Ermel C y Martini A, 1996, A Taste of Categorical Petri Nets, Technical Report No.96-9, Computer Science Department, Technical University of Berlin, Germany.

Gaeta R, 1997, Performance Analysis of ATM Communication Networks by Timed Petri Nets: Methodological Advances and New Simulation Algorithms, Tesis de Doctorado, University of Torino, Italy.

Graaf M van der y Aalst W van der, 2003, Workflow Systems, En C. Girault y R. Valk (Eds,), Petri Nets for Systems Enginering, A Guide to Modeling, Verification, and Applications, pp. 507-540, Springer-Verlag, Germany.

Jensen K, 1994, An Introduction to the Theorical Aspects of Coloured Petri Nets, En J.W. de Bakker, W.P. de Roever y G. Rozenberg (Eds.), A Decade of Concurrency, [LNCS 803], pp.230-272, Springer-Verlag, Germany.

Jensen K, 1998, An Introduction to the Practical Use of Coloured Petri Nets, En W. Reising, G, Rozenberg (Eds.), Lectures on Petri Nets II, [LNCS 1492], pp.237-292, Springer-Verlag, Germany.

Jensen K, 2000, Petri Nets 2000: Practical Use of High-level Petri Nets, Proceedings of the 21st International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Aarhus, Denmark.

Jiménez E, 2004, Técnicas de Automatización Avanzadas en Procesos Industriales, Tesis de Doctorado, Universidad de la Rioja, España.

Kiepuszewski B, 2003, Expressiveness and Suitability of Languages for Control Flow Modeling in Workflows, Tesis de Doctorado, Queensland University of Technology, Australia.

Larsen KG, Nilsen M y Thiagarajan PS, 2000, Petri Nets 2000: Timed and Hybrid Automata, Proceedings of the 21st International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Aarhus, Denmark.

Manson PR, 1988, Petri net theory: a survey, Technical Report UCAM-CL-TR-139, Computer Laboratory, University of Cambridge, UK.

Mortensen KO, 2000, Petri Nets 2000: Tool Demonstrations, Proceedings of the 21st International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Aarhus, Denmark.

Murata T, 1989, Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 4, pp. 541-580.

Peterson JL, 1981, Petri Net Theory and The Modeling of Systems, Prentice-Hall, Inc, USA.

Petri CA, 1962, Kommunikation mit Automaten, Bonn:

Institut für Instrumentelle Mathematik, Schriften des IIM Nr. 2, también traducido al inglés, Communication with Automata, 2nd Edition, New York: Griffiss Air Force Base, Technical Report RADC-TR-65-377, Vol.1, Suppl. 1, 1966.
Petri Nets World, (http://www,informatik,uni-hamburg,de /TGI/PetriNets/)
Pezzé M y Shatz SM, 2000, Petri Nets 2000: Software Engineering and Petri Nets, Proceedings of the 21st International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Aarhus, Denmark.
Reijers HA, 2002, Design and control of workflow processes: business process management for the service industry, Tesis de Doctorado, Eindhoven University of Technology, The Nederlands.
Rivera C, 2000, Utilización de redes de Petri para la elaboración de una interfaz de usuario, Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.
Valk R, 2003, Essential Features of Petri Nets, En C. Girault y R. Valk (Eds.), Petri Nets for Systems Engineering, A Guide to Modeling, Verification, and Applications, pp. 9-28, Springer-Verlag, Germany.
Winskel G, 1986, Petri nets, algebras and morphisms, Technical Report UCAM-CL-TR-79, Computer Laboratory, University of Cambridge, UK.