

Estudio teórico experimental de una barra no prismática de sección rectangular no estrecha sometida a torsión pura aplicando el método de elementos finitos

Theoretical and experimental study of a neither narrow nor prismatic rectangular section bar subjected to pure torsion by finite elements method

R. Márquez*, R. Chacón
Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica, ULA
Mérida 5101, Venezuela
*ramimar1@hotmail.com

E. Gómez
DIALCA C.A
Mérida 5101, Venezuela

Resumen

En este trabajo se estudia la determinación de esfuerzos en una barra no prismática de sección rectangular no estrecha, empleando técnicas experimentales y el método de elementos finitos. Los resultados son comparados con el estado de esfuerzo teórico presente en una barra prismática de sección rectangular no estrecha.

Palabras claves: Torsión pura, barra no prismática y elementos finitos.

Abstract

In present work, by applying the finite elements method, the stresses in a rectangular section non narrow nor prismatic bar are determined. Results are compared with the theoretical stress state obtained for a rectangular section non narrow prismatic bar.

Key words: Pure torsion, non prismatic bar and finite elements.

1 Introducción

El estudio sobre las propiedades mecánicas de los materiales sometidos a distintos tipos de cargas ha sido siempre de gran importancia en ingeniería mecánica. Estas propiedades mecánicas se definen a través de los esfuerzos y las deformaciones; por esto, una correcta estimación de estas variables permite definir el comportamiento de los materiales.

En este trabajo se plantea obtener una referencia del comportamiento de los esfuerzos en las barras no prismáticas de sección rectangular no estrecha comparándolos con

las ecuaciones teóricas desarrolladas para barras prismáticas de sección rectangular no estrecha, mediante la aplicación de los métodos de elementos finitos y el método fotoelástico.

2 Hipótesis

El presente trabajo se basa en que las barras no prismáticas sometidas a torsión pura pueden ser tratadas como un conjunto de barras prismáticas, por lo tanto se pudieran aplicar las ecuaciones de barras prismáticas en las no prismáticas.

3 Basamento teórico

La solución para la determinación de los esfuerzos de corte fue formulada por primera vez por Saint-Venant mediante el método semi-inverso, llegándose a obtener expresiones para el cálculo del estado de esfuerzos de una barra prismática, teniendo su sección transversal cualquier configuración, sometida a un momento torsor puro. Esto se ilustra en la Fig. 1.

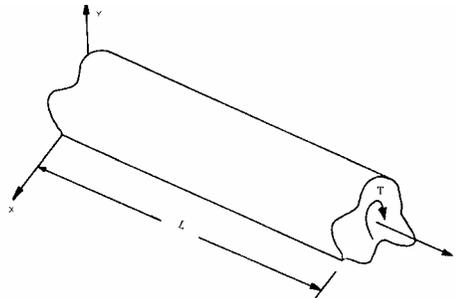


Fig. 1. Barra prismática de sección transversal cualquiera, sometida a un momento torsor puro

En el estudio de torsión de una barra prismática de sección arbitraria, Saint-Venant, para aplicar el método semi-inverso, estableció las siguientes hipótesis (Berrocal, 1998):

1. La deformación de cualquier sección recta es un giro alrededor del eje Z, acompañado de un alabeo, que es igual en todas las secciones

2. El ángulo θ girado por unidad de longitud es constante a lo largo de la barra.

El alabeo de cada sección, cuya existencia está experimentalmente probada, juega pues, un papel primordial en las ecuaciones de torsión, fundamentalmente en el giro de las secciones. En virtud de la primera hipótesis de ser el alabeo el mismo para todas las secciones, la componente μ del vector desplazamiento de un punto de la barra prismática

será independiente de z . Por tanto si llamamos ψ a la función alabeo, podemos decir:

$$\mu = \theta \psi (y, x) \quad (1)$$

$$v = -\rho \theta z \cos\beta = -\theta x z \quad (2)$$

$$w = \rho \theta x \sin\beta = \theta x y \quad (3)$$

Si consideramos una sección arbitraria de una barra prismática de sección rectangular no estrecha y siendo (b) el lado más largo de la sección rectangular y (a) el lado más angosto podemos establecer el estado de esfuerzos general para una sección cualquiera como (Marquez, 1985]:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\tau_{yz} = \frac{8G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \text{sen}(n\pi x/a) \quad (4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{8G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left[\frac{\text{senh}(n\pi y/a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \cos(n\pi x/a) \quad (5)$$

4 Método experimental.

En el caso de las barras no prismáticas tenemos que las

suposiciones planteadas por Saint-Venant deben cumplirse para cada una de las infinitas barras prismáticas que forma nuestro modelo (Fig. 2).

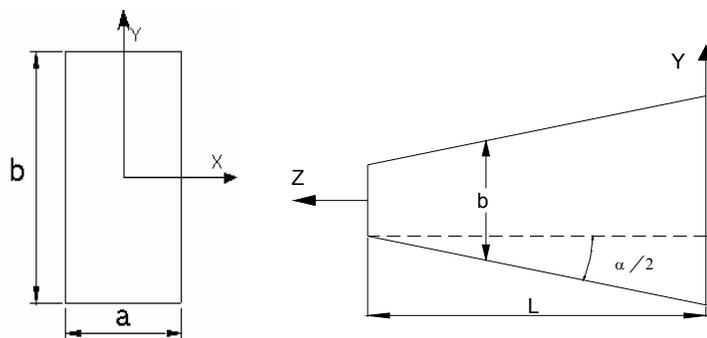


Fig. 2. Modelo y nomenclatura de la barra no prismática de sección transversal rectangular

Los valores de esfuerzo experimentales necesarios para cumplir el objetivo principal de este trabajo, se obtuvieron mediante el método fotoelástico. Se seleccionó una carga de trabajo adecuada con el propósito de obtener un buen

espectro isocromático y de esta manera medir sin dificultad los órdenes de franja en todos y cada uno de los puntos seleccionados (Frocht, 1950) (Fig. 3).

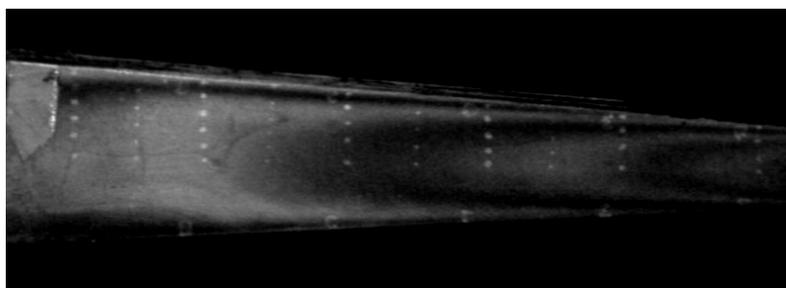


Fig. 3. Distribución de esfuerzos en el contorno de la barra no prismática. Mediante el método fotoelástico.

Dado que los comportamientos de los esfuerzos fueron los mismos para todas las secciones estudiadas en la probeta se tomó una sola sección para hacer el estudio comparativo de los diferentes esfuerzos que se presentan. Tomando

en cuenta que se encontrara lo más equidistante de los extremos de la probeta donde se aplicaron las cargas. La sección a estudiar es la de relación $b/a = 1.88$. (Fig. 4)

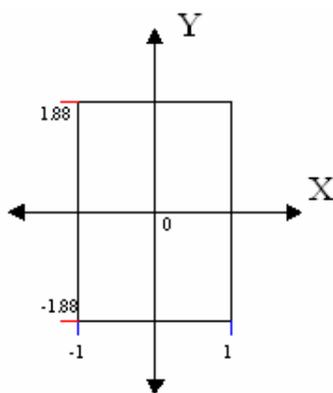


Fig. 4. Sección Transversal de la probeta con relación $b/a = 1.8$

Los valores de esfuerzos que arroja el método experimental se comparan tanto con el método de elementos finitos como con el método teórico, además de realizarse en elementos finitos el análisis de una probeta prismática a fin de comparar los resultados obtenidos (Fig.5).

Por otra parte se comprobó la convergencia del modelo en elementos finitos utilizando el valor de la energía de deformación y el error de forma energética como parámetros para determinar dicha convergencia (Vergara, 1998) (Figs. 6 y 7).

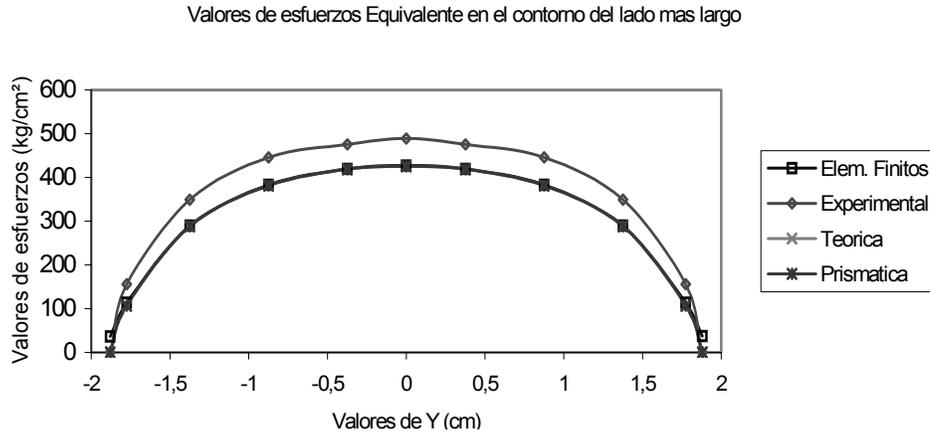


Fig. 5. Distribución de esfuerzos equivalente en el contorno por los tres métodos para la barra no prismática y para la barra prismática.

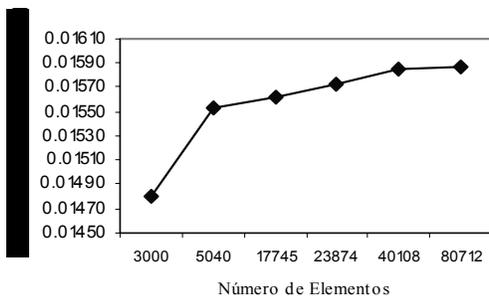


Fig. 6. Validación del modelo usando la energía de efectividad.

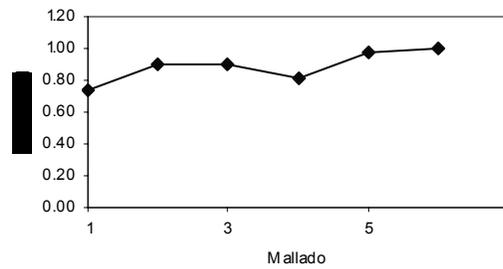


Fig. 7. Validación del modelo usando la deformación

De la Fig. 5, se observó que para los esfuerzos equivalentes del método teórico, el de elementos finitos y el modelo prismático no presentan diferencias considerables. Para los valores arrojados por el método experimental presentan una diferencia considerable con los otros dos métodos. Además se obtuvieron errores entre los métodos experimentales y los de elementos finitos en promedio del 1.5%. Entre estos dos métodos y el experimental los errores

fueron en promedio de un 15% y un valor de error máximo de 26%.

Para evaluar la dependencia de los valores de esfuerzo con respecto a la variación de pendiente de no prismaticidad (α) (Fig. 2) se aumentó y disminuyó dicha pendiente de la probeta, dejando el valor de carga en igual magnitud. Se pudo observar que para una relación de b/a dada los valores de esfuerzos τ_{xy} y τ_{xz} se mantienen constantes (ver Figs. 8 y 9).

Comportamiento de los esfuerzos (X=1.88)

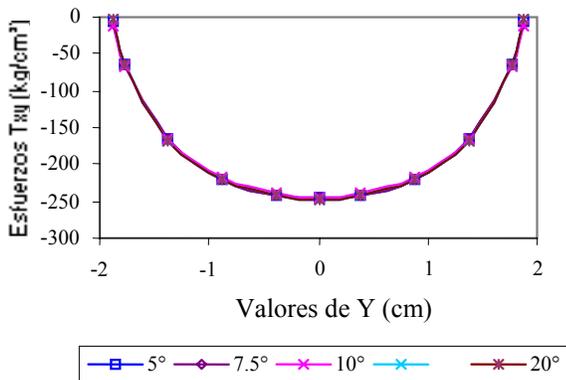


Fig. 8 Comportamiento de τ_{xy} en el contorno

Comportamiento de los esfuerzos (Y=-1.88)

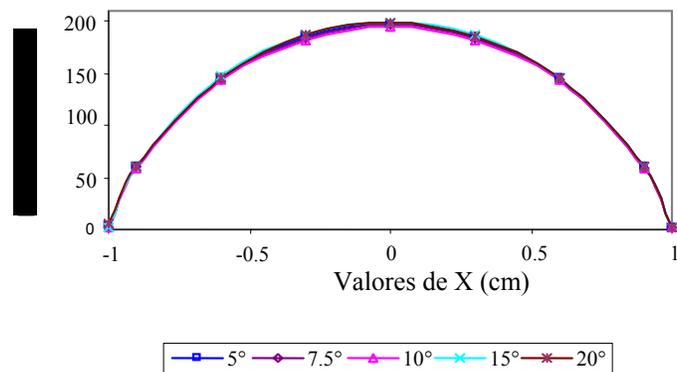
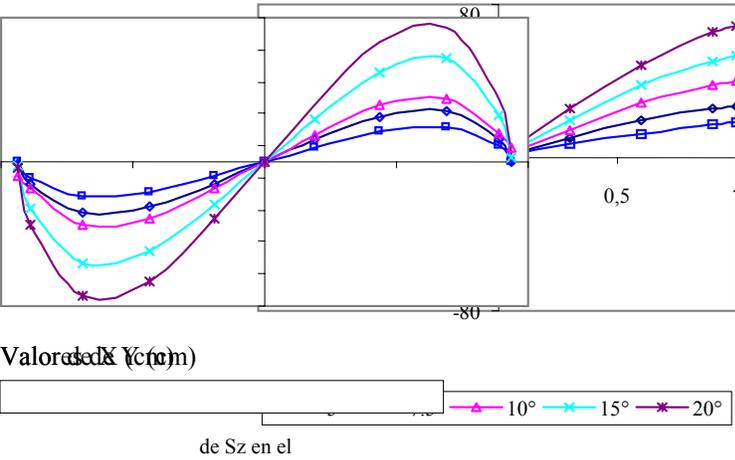


Fig. 9 Comportamiento de τ_{xz} en el contorno.

Además en la probeta no prismática aparecen tres nuevos esfuerzos los cuales dan origen a un nuevo estado de

esfuerzos para los puntos sobre cualquier sección rectangular perteneciente a la barra no prismática el cual es:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Comportamiento de los esfuerzos (X=-1)
Comportamiento de los esfuerzos (X=-1)

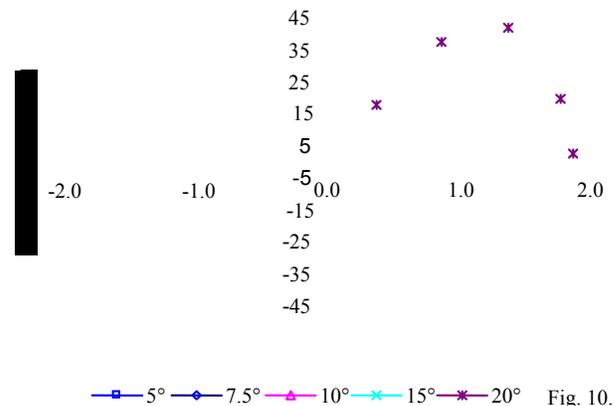


Fig. 10. Comportamiento de los esfuerzos (X=-1)
Fig. 11. Comportamiento de Sy en el contorno.

Comportamiento de los esfuerzos (Y=1.88)

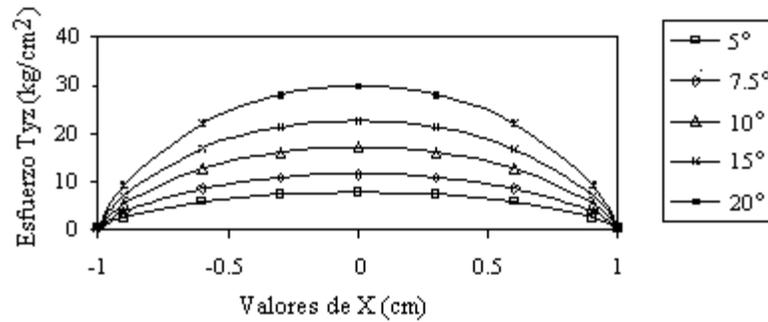


Fig. 12. Comportamiento de τ_{yz} en el contorno.

El comportamiento de estos esfuerzos (σ_x , σ_y , τ_{yz}) al variar el ángulo α (se trabajó con ángulos menores o iguales a 20°) se puede ver en las Figs. 10, 11 y 12 en las cuales se observa que los tres son directamente proporcionales respecto al cambio en la pendiente α .

cometer un error considerable dado que:

$$100 * \frac{\sigma_{equiv\ no\ prismati\ co}}{\sigma_{equiv\ prismatico}} \leq 3\%$$

5 Conclusiones

De los valores obtenidos en este trabajo se pudo comprobar que las ecuaciones teóricas para el cálculo de esfuerzos en barras prismáticas sometidas a torsión pueden ser aplicadas a barras no prismáticas de sección rectangular, sin

Los comportamientos de los esfuerzos τ_{xy} y τ_{xz} son los mismos para los dos modelos. Presentándose en las barras no prismáticas tres esfuerzos adicionales (σ_x , σ_y , τ_{yz}) los cuales dependen del ángulo de prismaticidad (α). Estos valores de esfuerzos se comportan directamente proporcionales a la variación del torsor aplicado.

Referencias

- Berrocal L, 1998, Elasticidad, Madrid, Tercera edición, McGraw Hill.
- Frocht MM, 1950, Fotoelasticidad, Argentina, Biblioteca Ediar de Ingeniería,
- Márquez JR, 1985, Estudio teórico experimental de barras prismáticas de sección rectangular sometidas a torsión pura. Universidad de Los Andes.
- Vergara M, 1998, Estudio del índice de efectividad en problemas estructurales en 2D y 3D usando un programa comercial de elementos finitos, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.