Detección robusta de fallas en sistemas lineales a tiempo discreto: un enfoque de control H_2-H_∞

Robust fault detection for discrete-time linear systems: an H_2-H_∞ control setting

Addison Ríos-Bolívar
Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, ULA,
Mérida 5101, Venezuela
ilich@ula.ve

Germain Garcia
LAAS-CNRS, 7 Avenue du Colonel Roche.
31077, Toulouse Cedex 4, France
garcia@laas.fr

Resumen

Se presenta un método para el diseño de filtros robustos para la detección y el diagnóstico de fallas en sistemas lineales a tiempo discreto. El método consiste en transformar el problema de detección robusta de fallas en un problema de control robusto, en la matriz de control es un parámetro de diseño. El filtro robusto se obtiene a través de la síntesis de controladores robustos basados en H_2 y H_∞ por realimentación dinámica de la salida. El controlador obtenido representa el filtro robusto de detección de fallas, se diseña utilizando una formulación basada en desigualdades matriciales lineales con la matriz de control como parámetro a seleccionar. El método garantiza la detección robusta de fallas aplicando toda la maquinaria conocida de control en H_2 y H_∞, incluyendo índices múltiples o mezclados de desempeños.

Palabras claves: Detección de fallas, sistemas a tiempo discreto, control robusto, detección en tiempo discreto, estimación robusta.

Abstract

This paper proposes an approach for robust fault detection filter design in discrete time linear systems. The approach consists of transforming the fault robust detection problem into an H_2-H_∞ robust control problem. In the robust control problem, the control matrix is a design parameter. The solution is obtained by convex optimization, where the machinery of linear matrix inequalities (LMI) can be used. The method allows the design of robust filters with multiple performance indexes and mixed objectives.

Key words: Fault detection, discrete-time systems, robust control, discrete time detection, robust estimation.

1 Introducción

Un elemento fundamental en un sistema de supervisión, monitoreo y diagnóstico de fallas es el Filtro de Detección y Diagnóstico de Fallas, filtro FDI, debe ser diseñado para operar en condiciones adversas debido a la presencia de señales externas desconocidas, de las incertidumbres y a los distintos regímenes de operación de los procesos. Dicho filtro debe ser capaz de producir señales residuales que permitan: 1) Determinar la presencia de fallas aún en condiciones adversas (Detección Robusta). 2) Orientar sobre el origen de la falla (Separación Robusta). En este contexto, algunos métodos han sido presentados para el caso de los sistemas lineales, fundamentalmente de tipo continuo: (Chen y Patton, 1999; Chen et al., 1996; Edelmayer et al., 1994; Mangoubi y Edelmayer, 2000; Patton y Hou, 1997; Niemann y Stoustrup, 1998; Ríos-Bolívar y García, 2001; Song y E.G. Collins, 2000; Zhong et al., 2003).

Debido a las condiciones adversas (perturbaciones, incertidumbres), el índice de desempeño del filtro robusto se establece a partir de una medida de robustez de la sensibilidad a fallas y de la sensibilidad respecto a las perturbaciones. La medida de sensibilidad de un filtro FDI se puede caracterizar como la relación del nivel de atenuación de la salida del filtro con respecto a las fallas al nivel de atenuación del filtro respecto a la perturbación:

$$S_2 = \frac{\left\|H_{e_z v}\right\|_2}{\left\|H_{e_z w}\right\|_2};\ \text{o}\ \ S_\infty = \frac{\left\|H_{e_z v}\right\|_\infty}{\left\|H_{e_z w}\right\|_\infty};$$

donde H_ es la función de transferencia, v_i son las fallas, w la perturbación y e_z la señal residual. Así, los métodos de diseño de filtros robustos deben procurar una excelente sensibilidad a fallas y en lo posible el rechazo a perturbaciones (Edelmayer et al., 1994).

Si bien los métodos han sido planteados en el marco de los sistemas a tiempo continuo, la extensión al caso de los sistemas a tiempo discreto es directa. Un análisis preliminar, en el caso de sistemas lineales a tiempo discreto se establece a partir del siguiente modelo de diagnóstico:

$$\Sigma_1 \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) + F_1 v(k), \\ z(k) = C_1 x(k) + D_{11} w(k) + F_3 v(k), \\ y(k) = C_2 x(k) + D_{21} w(k) + F_2 v(k), \end{cases} \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $z \in \mathbb{R}^m$ es la señal para cuantificar el desempeño, $y \in \mathbb{R}^p$ las señales de salida medidas; $w \in \mathcal{L}_2$ es la señal de perturbación y v es el vector de fallas desconocidas. Las matrices A, B_1, C_2, D_{11} y D_{21} tienen dimensiones adecuadas. F_1, F_2 son las matrices de distribución de fallas, las cuales se asumen conocidas. El término $F_1 v(k)$ representa las fallas de actuadores o de componentes, mientras que $F_2 v(k)$ y $F_3 v(k)$ denotan las fallas de sensores. Se asume que el par (C_2, A) es detectable. La componente de control u no tiene importancia en la formulación.

El problema de detección robusta de fallas consiste en generar una señal residual $e_z(k)$ que satisfaga

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(e_z(k)) &\le T_h \quad \text{si} \quad v(k) = 0, \\ \mathbf{F}(e_z(k)) &> T_h \quad \text{si} \quad v(k) \ne 0, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\mathbf{F}(e_z(k))$ es alguna medida del *tamaño* del residual, por ejemplo, una norma, y T_h es un valor umbral.

Así, sobre la base del modelo de diagnóstico es posible construir un filtro a partir del sistema dinámico siguiente:

$$\Sigma_2 \begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + B_2 u(k) + \mathbf{K} e_y(k), \\ \hat{z}(k) = C_1 \hat{x}(k), \\ \hat{y}(k) = C_2 \hat{x}(k), \end{cases} \tag{3}$$

donde $\mathbf{K}$ es la ganancia a seleccionar y $e_y(k) = y(k) - \hat{y}(k)$. Si se define $e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ y la señal residual $e_z(k) = z(k) - \hat{z}(k)$, entonces

$$\begin{aligned} e_x(k+1) &= (A - \mathbf{K}C_2)e_x(k) + (B_1 - \mathbf{K}D_{21})w(k) + (F_1 - \mathbf{K}F_2)v(k), \\ e_z(k) &= C_1 e_x(k) + D_{11} w(k) + F_3 v(k). \end{aligned} \tag{4}$$

Para efectos de la detección de fallas, es necesario diseñar $\mathbf{K}$ de tal manera que la sensibilidad de la señal residual e_z por efecto de la perturbación sea pequeña, mientras que debido a las fallas debe ser grande. Esto es, dado el sistema $\sum_1$ entonces el filtro $\sum_2$ permite la detección de fallas si:

1. El sistema dinámico (4) es asintóticamente estable.
2. La relación de ganancia *falla-ruido* $\mathcal{S} = \gamma_v / \gamma_w$ es grande, donde $\gamma_v > 0$, $\gamma_w > 0$, *y* $\left\|e_z(k)\right\|_2 < \gamma_w \left\|w(k)\right\|_2$, $\left\|H_{e_z v}\right\|_- > \gamma_v$.

Varios de los resultados en el diseño de filtros robustos de detección han sido presentados para sistemas continuos: en (Edelmayer et al., 1994), (Chen y Patton, 1999) y (Patton y Hou, 1997) se consideran fallas de actuadores y la solución se presenta en el contexto H_∞. En (Chen et al., 1996) se aborda el diseño del filtro basado en observadores de entrada desconocida, y se presentan condiciones de diseño difíciles de satisfacer. (Zhong et al., 2003) presenta un método basado en acoplamiento de modelos en H_∞, cuya solución se basa en optimización LMI.

De manera similar, (Wang et al., 2003) plantea un filtro robusto mediante un método iterativo de optimización LMI, bajo una fuerte condición en la estructura del modelo de diagnóstico. (Khosrowjerdi et al., 2003; Khosrowjerdi et al., 2004) considera el diseño simultáneo de filtro y control bajo una formulación de optimización H_2/ H_∞ mezclado. La característica general de estos métodos es la búsqueda de una adecuada detección, mediante el mejoramiento de la sensibilidad a las fallas, teniendo poca consideración con el problema de separación de las fallas, se plantea como un problema de filtrado múltiple.

El caso de diseño de filtros robustos para sistemas a tiempo discreto, (Ríos-Bolívar et al., 1999) considera el rechazo de perturbaciones mediante un observador generalizado. El método está restringido a unas condiciones sobre la distribución de las perturbaciones respecto a las fallas para garantizar la separabilidad. (Nobrega, 2000) considera el diseño de filtros basados en LMI. Se dan condiciones de síntesis basándose en restricciones de acoplamiento de rango de ciertas matrices, además, el error de estimación se formula a partir de las fallas, directamente, que dificulta la implementación. (Wang y Lam, 2002) presenta un método para el caso de perturbaciones estructuradas. El método se presenta como un problema de optimización no restringida basado en gradiente. Un cierto nivel de sensibilidad es alcanzado.

En este trabajo se propone la síntesis de filtros robustos mediante la solución de un problema de control óptimo-robusto en H_2/H_∞. El problema de control surge al transformar la detección robusta de fallas en un problema de síntesis de controladores robusto por realimentación dinámica de la salida, donde la matriz de control es un parámetro de diseño. La solución del problema de control se plantea en el marco de optimización convexa LMI.

Desde el punto de vista de implantación, se puede utilizar la infraestructura de los sistemas de control distribuido, SCADA o de servidores de aplicaciones dedicados que son típicos en automatización industrial.

La notación que se empleará es la estándar: para matrices y vectores $(\ )^T$ indica transposición. En las particiones de matrices simétricas $(o)^T$ denota cada uno de sus bloques simétricos. I es la matriz identidad de dimensión apropiada.

2 Formulación del problema

La formulación que se propone, entonces, es transformar el problema de detección robusta de fallas en un problema de control óptimo H_2/H_∞. El planteamiento sigue la estructura típica del diseño de filtros de detección basados en observadores de estados, con la novedad de incorporar una *señal de control* en la dinámica del estimador (Ríos-Bolívar and García, 2001; Ríos-Bolívar and García, 2003). Así, reconsideremos el filtro $\sum_2$:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k)+B_2u(k)+\mathbf{K}e_y(k)-\mathbf{B_e}\mathbf{u_e}(k)\\ \hat{z}(k) &= C_1\hat{x}(k),\\ \hat{y}(k) &= C_2\hat{x}(k),\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\mathbf{u_e}(k)$ representa una *señal de control* en pre-adelanto del filtro, $\mathbf{B_e}$ corresponde a la *matriz de control* con dimensión apropiada. Tanto la señal de control como la correspondiente matriz de control son parámetros de diseño.

En consecuencia, la dinámica del error de estimación corresponde a:

$$\begin{aligned}e_x(k+1) &= (A-\mathbf{K}C_2)e_x(k)+(B_1-\mathbf{K}D_{21})w(k)+(F_1-\mathbf{K}F_2)v(k)+\mathbf{B_e}\mathbf{u_e}(k)\\ e_z(k) &= C_1e_x(k)+D_{11}w(k)+F_3v(k),\\ e_y(k) &= C_2e_x(k)+D_{21}w(k)+F_2v(k)\end{aligned} \tag{6}$$

La detección robusta de fallas se alcanza si (6) es asintóticamente estable y se mantiene una alta sensibilidad a las fallas con respecto a las perturbaciones. Una primera evaluación permite distinguir que si $\mathbf{u_e}(k)=w(k)$ y $\mathbf{B_e}=-(B_1-\mathbf{K}D_{21})$, entonces se puede rechazar la perturbación, (con $D_{11}=0$). La matriz dinámica en (6) puede ser estructura de tal forma de permitir el diagnóstico de fallas.

Con el objeto de garantizar la detección robusta y el diagnóstico de fallas se deben diseñar **K,** $\mathbf{B_e}$ y $\mathbf{u_e}(k)$ tal que: a) El sistema dinámico (6) sea asintóticamente estable. b) La relación de ganancia *falla-ruido* $\mathcal{S}=\gamma_v/\gamma_w$ sea grande.

A partir de (6), el problema se puede reformular en un sentido de control por realimentación dinámica de la salida medida. Consideremos el *sistema dinámico de control* dado por:

$$\mathcal{F}_p\begin{cases}\varsigma(k+1)=\mathbf{A}_p\varsigma(k)+\mathbf{B}_pe_y(k)\\ \mathbf{u_e}(k)=\mathbf{C}_p\varsigma(k)+\mathbf{D}_pe_y(k),\end{cases} \tag{7}$$

donde las matrices de diseño $\mathbf{A}_p$, $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{C}_p$ y $\mathbf{D}_p$ son de dimensiones apropiadas.

En lazo cerrado:

$$\begin{aligned}e_x(k+1) &= (A-\mathbf{K}C_2+\mathbf{B_e}\mathbf{D}_pC_2)e_x(k)+\mathbf{B_e}\mathbf{C}_p\varsigma(k)+\\ &\quad (B_1-\mathbf{K}D_{21}+\mathbf{B_e}\mathbf{D}_pD_{21})w(k)+(F_1+\mathbf{B_e}\mathbf{D}_pF_2-\mathbf{K}F_2)v(k),\\ \varsigma(k+1) &= \mathbf{B}_pC_2e_x(k)+\mathbf{A}_p\varsigma(k)+\mathbf{B}_pD_{21}w(k)+\mathbf{B}_pF_2v(k),\\ e_z(k) &= C_1e_x(k)+D_{11}w(k)+F_3v(k).\end{aligned} \tag{8}$$

Problema: *Dado el modelo de diagnóstico (1), diseñar el controlador* $\mathcal{F}_p$*, para el filtro (5), con* $\mathbf{B_e}$ *como parámetro de diseño, tal que:*

1. El sistema en lazo cerrado (8) sea asintóticamente estable.

2. El efecto de la perturbación w sobre la señal residual e_z *sea mínimo, en algún sentido.*

Esta formulación representa la transformación del problema de detección robusta de fallas como un problema de control robusto. Un primer paso de diseño consiste en la selección de **K**, se puede orientar hacia la separación de fallas en el sentido que la matriz $(A-\mathbf{K}C_2)$ tenga una estructura particular, por ejemplo diagonal. Además, si **K** se selecciona, en base a la condición de separabilidad de fallas mostrada en (Massoumnia, 1986), de manera que $\mathrm{Im}(B_1-\mathbf{K}D_{21})\cap\mathrm{Im}(F_1-\mathbf{K}F_2)=\phi$, entonces, minimizando los efectos de la perturbación sobre la señal residual la relación de ganancia falla-ruido $\mathcal{S}$ será grande. La selección **K** constituye un primer filtrado.

A partir de la selección de **K**, sean $\tilde{A}=A-\mathbf{K}C_2$, $\tilde{B}=B_1-\mathbf{K}D_{21}$.

El desempeño requerido se alcanza con el diseño de $\mathcal{F}_p$, constituye un post-filtrado. El método tiene la ventaja de que se pueden aplicar las distintas técnicas de diseño de controladores por realimentación dinámica de la salida, incluyendo índices de desempeño múltiples o mezclados, es novedoso en filtros robustos para sistemas a tiempo discreto. Esto asegura un nivel de sensibilidad para la detección de fallas. El procedimiento de síntesis es sistemático.

La Fig. 1 muestra el diagrama de bloques de los elementos que constituyen el filtro.

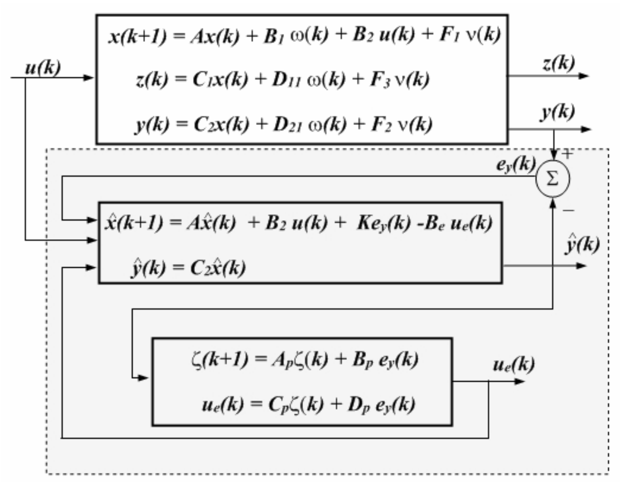

Fig. 1. Estructura del filtro de detección de fallas

Comentario 2.1 *La selección de* $\mathbf{B_e}$ *puede hacerse, en este momento, sobre la base de que el par* $(\tilde{A},\mathbf{B}_e)$ *sea estabilizable. Una segunda selección se orienta hacia las matrices de distribución de fallas, de manera de garantizar una alta sensibilidad a los modos de fallas (Ríos-Bolívar y García, 2001). Estos planteamientos pueden ser muy conservadores. Lo importante es seleccionar* $\mathbf{B_e}$ *sobre la base de la síntesis de* $\mathcal{F}_p$ *para ampliar la sensibilidad a las fallas (Ríos-Bolívar y García, 2003).*

3 Síntesis de $\mathcal{F}_p$ en H_2

Nos disponemos a diseñar $\mathcal{F}_\mathrm{p}$ en el marco de H_2 utilizando las técnicas de LMI. Consideremos el sistema en lazo cerrado (8) con respecto, solamente, a la perturbación y la señal residual.

Así, la matriz de transferencia está dada por: $H_{e_zw}(s)=\left[\begin{array}{c|c}\mathbb{A} & \mathbb{B}\\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{D}\end{array}\right]=\mathbb{C}(s\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}+\mathbb{D}$, donde:

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\tilde{\mathrm{A}}+\mathbf{B_e}\mathbf{D}_\mathrm{p}\mathrm{C}_2 & \mathbf{B_e}\mathbf{C}_\mathrm{p}\\ \mathbf{B}_\mathrm{p}\mathrm{C}_2 & \mathbf{A}_\mathrm{p}\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}\tilde{\mathrm{B}}+\mathbf{B_e}\mathbf{D}_\mathrm{p}\mathrm{D}_{21}\\ \mathbf{B}_\mathrm{p}\mathrm{D}_{21}\end{pmatrix},$$

$\mathbb{C}=(C_1 \quad 0),\quad \mathbb{D}=D_{11};$

Así, se debe diseñar $\mathbf{B_e}$ y el *controlador* $\mathcal{F}_p$ tal que $\left\|H_{e_zw}\right\|_2^2<\mu,\mu>0.$

El siguiente Lema es un resultado bien conocido, caracteriza completamente la norma H_2 como restricciones LMI (Oliveira et al., 1999).

Lema 3.1 *La desigualdad* $\left\|H_{e_zw}\right\|_2^2<\mu$ *se satisface si, y solamente si,* $\mathbb{D}=0$ *y existen matrices simétricas* $\mathbb{X},\mathbb{W}$ *tales que* $tr[\mathbb{W}]<\mu$ *y*

$$\begin{bmatrix}\mathbb{X} & \mathbb{A}\mathbb{X} & \mathbb{B}\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbb{X} & 0\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbb{I}\end{bmatrix}>0,\quad \begin{bmatrix}\mathbb{W} & \mathbb{C}\mathbb{X}\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbb{X}\end{bmatrix}>0, \tag{9}$$

es factible.

A partir del Lema 3.1 se establece el siguiente resultado:

Proposición 3.1 *Sea el modelo de diagnóstico (1). Dicho modelo admite un filtro de la forma* $\mathcal{F}_p$, *tal que* $\left\|H_{e_zw}\right\|_2^2<\mu$ *, si y solo si, existen matrices de orden n simétricas* $\mathbf{X}>0$ *y* $\mathbf{Y}>0$*; las matrices* $\mathbf{Q},\mathbf{L}\in\mathbb{R}^{nxn}$ *; las matrices* $\mathbf{F}\in\mathbb{R}^{nxp}$, $\mathbf{N}\in\mathbb{R}^{nxp}$*; y la matriz simétrica* $\mathbb{W}\in\mathbb{R}^{mxm}$ *tal que se satisfacen las siguientes LMI's:*

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbb{I} & \tilde{\mathrm{A}}\mathbf{X}+\mathbf{L} & \tilde{\mathrm{A}}+\mathbf{N}\mathrm{C}_2 & \tilde{\mathrm{B}}+\mathbf{N}\mathrm{D}_{21}\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbf{Y} & \mathbf{Q} & \mathbf{Y}\tilde{\mathrm{A}}+\mathbf{F}\mathrm{C}_2 & \mathbf{Y}\tilde{\mathrm{B}}+\mathbf{F}\mathrm{D}_{21}\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbf{X} & \mathbb{I} & 0\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbf{Y} & 0\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbb{I}\end{bmatrix}>0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{W} & \mathrm{C}_1\mathbf{X} & \mathrm{C}_1\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbf{X} & \mathbb{I}\\ (\mathrm{o})^\mathrm{T} & (\mathrm{o})^\mathrm{T} & \mathbf{Y}\end{bmatrix}>0, \tag{11}$$

$$tr[\mathbb{W}]<\mu,\quad \mathbb{D}=\mathrm{D}_{11}=0\,. \tag{12}$$

El controlador estabilizante está dado por

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}_\mathrm{p} & \mathbf{B}_\mathrm{p}\\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}\\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Q}-\mathbf{Y}\tilde{\mathrm{A}}\mathbf{X} & \mathbf{F}\\ \mathbf{L} & \mathbf{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} & 0\\ -\mathrm{C}_2\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} & \mathbb{I}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

donde $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{B_e}\mathbf{C}_p$, $\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{B_e}\mathbf{D}_p$. *Así,* $\mathbf{B_e}$ *se selecciona de manera que*

$$\mathbf{C}_p=\left(\mathbf{B_e}^T\mathbf{B_e}\right)^{-1}\mathbf{B_e}^T\hat{\mathbf{C}},\quad \mathbf{D}_p=\left(\mathbf{B_e}^T\mathbf{B_e}\right)^{-1}\mathbf{B_e}^T\hat{\mathbf{D}}.$$

$\mathbf{V}$ y $\mathbf{U}$ *son matrices no singulares que satisfacen* $\mathbf{YX}+\mathbf{VU}=\mathbb{I}$.

Prueba: La demostración se fundamenta en el procedimiento de linealización de las desigualdades matriciales mediante transformación congruente y cambios de variables (Scherer et al., 1997; Oliveira et al., 2002). En primer lugar se definen $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{B}_e\mathbf{C}_p$, $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{B}_e\mathbf{D}_p$. Sean las transformaciones matriciales

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{Y} \\ 0 & \mathbf{V}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{X} \end{pmatrix}.$$

Así, un primer resultado es que, de las transformaciones se deriva $\mathbf{YX} + \mathbf{VU} = \mathbb{I}$.

Para obtener desigualdades lineales, la primera desigualdad en (9) se multiplica por la derecha por $\mathcal{T} := \mathrm{diag}[\mathbb{T}, \mathbb{T}, \mathbb{I}]$ y por la izquierda por $\mathcal{T}^T$. La segunda desigualdad en (9) se multiplica por la derecha por $\mathcal{J} := \mathrm{diag}[\mathbb{I}, \mathbb{T}]$, y por la izquierda por $\mathcal{J}^T$. De allí surgen expresiones como: $\mathbb{T}^T\mathbb{X}\mathbb{T}, \mathbb{T}^T\mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{T}, \mathbb{T}^T\mathbb{B}$, y $\mathbb{C}\mathbb{X}\mathbb{T}$, donde

$$\mathbb{T}^T\mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \tilde{A}\mathbf{X} + \hat{\mathbf{D}}C_2\mathbf{X} + \hat{\mathbf{C}}\mathbf{U} & \tilde{A} + \hat{\mathbf{D}}C_2 \\ \mathbf{Y}\tilde{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{D}}C_2\mathbf{X} + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{U} + \mathbf{V}\mathbf{B}_pC_2\mathbf{X} + \mathbf{V}\mathbf{A}_p\mathbf{U} & \mathbf{Y}\tilde{A} + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{D}}C_2 + \mathbf{V}\mathbf{B}_pC_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbb{T}^T\mathbb{X}\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}^T\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{B}}_1 + \hat{\mathbf{D}}\mathrm{D}_{21} \\ \mathbf{Y}\tilde{\mathrm{B}}_1 + \mathbf{Y}\hat{\mathbf{D}}\mathrm{D}_{21} + \mathbf{V}\mathbf{B}_p\mathrm{D}_{21}, \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbb{C}\mathbb{X}\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_1\mathbf{X} & \mathrm{C}_1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Finalmente, la linealización de las desigualdades se obtiene a través del cambio de variables

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{N} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{Y} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Las relaciones que definen las matrices del controlador se obtienen devolviendo el cambio de variables dado por (17).

4 Síntesis de $\mathcal{F}_p$ en H_∞

Consideraremos el caso de diseñar $\mathbf{B_e}$ y el *controlador* $\mathcal{F}_p$ tal que $\left\|H_{e_z w}\right\|_\infty^2 < \gamma, \gamma > 0$. Así, es bien sabido que la norma H_∞ tiene una caracterización como restricciones LMI según el siguiente Lema (Oliveira *et al.*, 1999):

Lema 4.1 *La desigualdad* $\left\|H_{e_z w}\right\|_\infty^2 < \gamma$ *se satisface si, y solamente si, existe una matriz simétrica* $\mathbb{X}$*, tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{A}\mathbb{X} & \mathbb{B} & 0 \\ (\mathrm{o})^T & \mathbb{X} & 0 & \mathbb{X}\mathbb{C}^T \\ (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & \mathbb{I} & \mathbb{D}^T \\ (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & \gamma\mathbb{I} \end{bmatrix} > 0, \tag{18}$$

es factible.

Por lo tanto, se puede establecer el siguiente resultado:

Proposición 4.1 *Sea el modelo de diagnóstico (1). Dicho modelo admite un filtro de la forma* $\mathcal{F}_p$*, tal que* $\left\|H_{e_z w}\right\|_\infty^2 < \gamma$ *, si y solo si, existen matrices de orden n simétricas* $\mathbf{X} > 0$ *y* $\mathbf{Y} > 0$*; las matrices* $\mathbf{Q}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{nxn}$ *y las matrices* $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{nxp}$, $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{nxp}$, *tal que, se satisfaga la siguiente LMI:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbb{I} & \tilde{\mathrm{A}}\mathbf{X} + \mathbf{L} & \tilde{\mathrm{A}} + \mathbf{N}\mathrm{C}_2 & \tilde{\mathrm{B}} + \mathbf{N}\mathrm{D}_{21} & 0 \\ (\mathrm{o})^T & \mathbf{Y} & \mathbf{Q} & \mathbf{Y}\tilde{\mathrm{A}} + \mathbf{F}\mathrm{C}_2 & \mathbf{Y}\tilde{\mathrm{B}} + \mathbf{F}\mathrm{D}_{21} & 0 \\ (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & \mathbf{X} & \mathbb{I} & 0 & \mathbf{X}\mathrm{C}_1^T \\ (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & \mathbf{Y} & 0 & \mathrm{C}_1^T \\ (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & \mathbb{I} & \mathrm{D}_{11}^T \\ (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & (\mathrm{o})^T & \gamma\mathbb{I} \end{bmatrix} > 0, \tag{19}$$

El controlador estabilizante, $\mathcal{F}_p$*, está dado por*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{Y}\tilde{\mathrm{A}}\mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} & 0 \\ -\mathrm{C}_2\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

donde $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{B_e}\mathbf{C}_p$, $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{B_e}\mathbf{D}_p$. *Así,* $\mathbf{B_e}$ *se selecciona de manera que*

$$\mathbf{C}_p = \left(\mathbf{B_e}^T\mathbf{B_e}\right)^{-1}\mathbf{B_e}^T\hat{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{D}_p = \left(\mathbf{B_e}^T\mathbf{B_e}\right)^{-1}\mathbf{B_e}^T\hat{\mathbf{D}}.$$

$\mathbf{V}$ y $\mathbf{U}$ *son matrices no singulares que satisfacen* $\mathbf{YX} + \mathbf{VU} = \mathbb{I}$.

Prueba. De manera similar al caso H_2, la prueba se fundamenta en el procedimiento de linealización de las desigualdades matriciales mediante transformación congruente y cambios de variables.

Esto es, las desigualdades lineales se obtienen sustituyendo las matrices de lazo cerrado. Se aplica la transformación congruente basada, en este caso, en la matriz de transformación $\mathcal{T} := \mathrm{diag}[\mathbb{T}, \mathbb{T}, \mathbb{I}, \mathbb{I}]$. La desigualdad en (18) se multiplica por la derecha por $\mathcal{T}$ y por la izquierda por $\mathcal{T}^T$. La linealidad se recupera usando el cambio de variables (17). Las expresiones del controlador $\mathcal{F}_p$ se obtienen de las variables obtenidas invirtiendo el cambio de variables.

En ambos casos, H_2, H_∞; la detección de fallas se garantiza cuando se decrementan los efectos sobre la señal residual debido a las perturbaciones. Para ello se obtienen niveles de atenuación μ y γ, si además se establece que, (ver (6)): $\mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{B}}) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{F}_1 - \mathbf{K}\mathrm{F}_2) = \phi$, mediante una apropiada selección de $\mathbf{K}$; entonces siempre es posible alcanzar que $\mathbf{F}(e_z(k)) > T_h$ si $v(k) \neq 0$. Si la condición no se satisface, no es posible la detección robusta de fallas, y se puede recurrir a otras técnicas, por ejemplo, reconocimiento de patrones.

Por otro lado, siguiendo el procedimiento planteado, se pueden imponer criterios de desempeño mezclado H_2/H_∞ de acuerdo a la naturaleza de las señales de perturbación (Khosrowjerdi et al., 2003). Además, del diseño del *controlador* se pueden explorar múltiples objetivos con el fin de satisfacer varias especificaciones, según la naturaleza de las señales, tanto de perturbación como de las fallas. Adicionalmente, la síntesis del *controlador* puede hacerse en el marco de una parametrización extendida, resulta menos conservadora (Oliveira et al., 2002).

Esto representa una cierta generalidad de la propuesta de diseño que ha sido mostrada.

En el caso de sistemas con incertidumbres estructuradas, esto es

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+\Delta A(k))x(k)+B_1w(k)+(B_2+\Delta B(k))u(k)+F_1v(k), \\ y(k) &= (C_2+\Delta C(k))x(k)+D_{21}w(k)+F_2v(k), \end{aligned} \tag{21}$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \Delta A(k) & \Delta B(k) \\ \Delta C(k) & \Diamond \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} E(k)\begin{pmatrix} H_1 & \Delta H_2 \end{pmatrix},$$

para G_1, G_2, H_1, H_2 son matrices constantes conocidas y de dimensiones apropiadas. $E(k)$ es una función matricial desconocida pero acotada. Para esa estructura de la incertidumbre, el método presentado puede ser aplicado al definirse una nueva entrada de perturbación que involucra las incertidumbres y sus efectos (Wang et al., 2003).

5 Ejemplo numérico

5.1 Ejemplo 1

Sea el modelo discreto de un avión de despegue y aterrizaje vertical, definido por (Wang y Lam, 2002):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9813 & 0{,}0083 & -0{,}0454 & -0{,}2459 \\ 0{,}0117 & 0{,}5813 & -0{,}3898 & -1{,}6662 \\ 0{,}0457 & 0{,}1274 & 0{,}8230 & 0{,}4803 \\ 0{,}0117 & 0{,}0358 & 0{,}4433 & 1{,}1361 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2664 & 0{,}0365 \\ 1{,}7629 & -3{,}2664 \\ -2{,}3152 & 1{,}7209 \\ -0{,}6083 & 0{,}4660 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2 = C_1, \quad D_{21} = D_{11}.$$

Las matrices de distribución de las fallas corresponden a:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5328 & 0{,}0730 & 0 & 0 \\ 3{,}5258 & -6{,}5328 & 0 & 0 \\ -4{,}6304 & 3{,}4418 & 0 & 0 \\ -1{,}2166 & 0{,}9320 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}0125 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0125 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}0125 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0125 & 0{,}5 \end{pmatrix}, F_3 = F_2.$$

Para garantizar la detección de fallas, se selecciona:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9813 & -0{,}9917 & -1{,}0454 & -1{,}2459 \\ -0{,}9883 & 0{,}5813 & -0{,}3898 & -1{,}6662 \\ 0{,}0457 & -0{,}8726 & -0{,}1770 & -0{,}5197 \\ -0{,}9883 & 0{,}0358 & 0{,}4433 & 1{,}1361 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el problema de síntesis del *controlador* en H_∞, entonces:

$$A_p = \begin{pmatrix} 1{,}5111 & -0{,}0329 & -1{,}5261 & 0{,}0048 \\ 0{,}0944 & 0{,}0813 & -0{,}0967 & -0{,}0013 \\ -0{,}6946 & 0{,}0057 & 0{,}7054 & -0{,}0033 \\ -0{,}8578 & -0{,}0324 & 0{,}8568 & -0{,}0018 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_p = \begin{pmatrix} -1{,}51190 & 0{,}0381 & 1{,}5242 & -0{,}0092 \\ -0{,}0954 & -0{,}0823 & 0{,}0951 & 0{,}0006 \\ 0{,}6999 & -0{,}0089 & -0{,}7034 & 0{,}0062 \\ 0{,}8582 & 0{,}0331 & -0{,}8575 & -0{,}0013 \end{pmatrix}.$$

Tomando $\mathbf{B_e} = \mathbb{I}_{4x4}$, entonces

$$\mathbf{C}_p = \begin{pmatrix} 2{,}7582 & 0{,}8857 & -2{,}7731 & 1{,}1866 \\ 0{,}3982 & 0{,}3054 & -0{,}4005 & 0{,}2868 \\ -0{,}2843 & 0{,}3070 & 0{,}2951 & 0{,}3851 \\ -2{,}6325 & -1{,}3379 & 2{,}6315 & -1{,}6793 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_p = \begin{pmatrix} -3{,}7474 & 0{,}0472 & 3{,}7525 & 0{,}0549 \\ 0{,}5890 & -2{,}2658 & -0{,}5894 & 1{,}3787 \\ 0{,}2439 & 0{,}4311 & -0{,}2473 & 0{,}1375 \\ 3{,}6212 & 0{,}7577 & -3{,}6205 & 0{,}5437 \end{pmatrix};$$

El nivel de atenuación alcanzado corresponde a un $\gamma = 3{,}0206$.

A objeto de verificar que efectivamente la detección de fallas es posible, la Fig. 2 muestra el diagrama de valores singulares de las funciones de transferencia de la señal de residuo respecto a perturbación, falla de sensor y falla de actuador. Como se puede apreciar, la detección de falla es posible ya que los valores debido a las fallas superan los relativos a las perturbaciones.

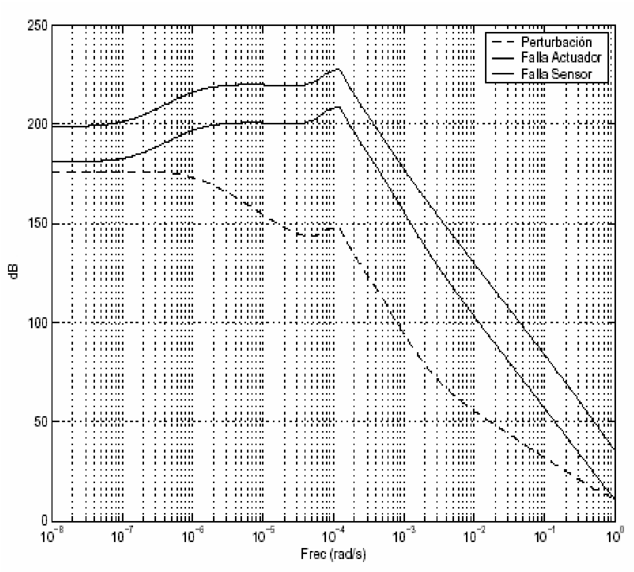

Fig. 2. Diagrama de valores singulares máximos

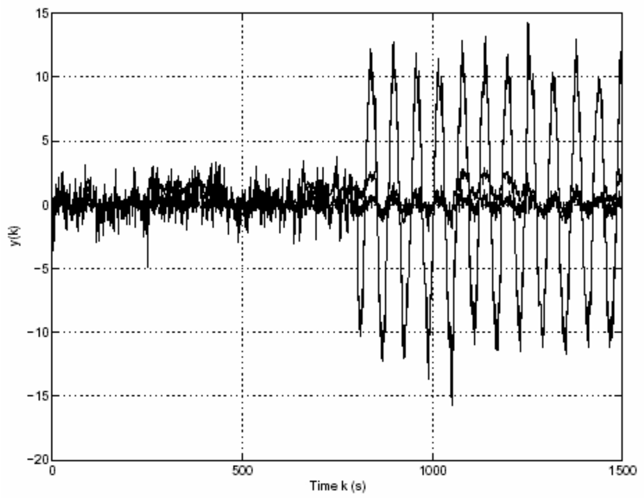

Fig. 3. Salida del sistema

La respuesta temporal considera los dos tipos de fallas. En primer lugar, una falla del actuador en k=250 s. La Fig. 3 muestra la salida y(k) de l modelo de diagnóstico.

Como se puede observar, a partir de la salida y(k) es imposible distinguir este tipo de falla. La presencia de la perturbación dificulta cualquier posibilidad.

Por el contrario, la Fig. 4 muestra la señal residual $e_z(k)$, que permite asegurar la presencia de fallas al mostrar el patrón de falla del actuador, corresponde a una señal tipo onda cuadrada que se inicia en el tiempo antes indicado.

La falla de sensor se presenta en k = 800s. Si bien, a partir de la salida se distingue la acción de este tipo de falla, la misma puede ser también producto de la perturbación. A los fines de garantizar la presencia de la falla, siguiendo la señal residual se puede observar la presencia de la falla de

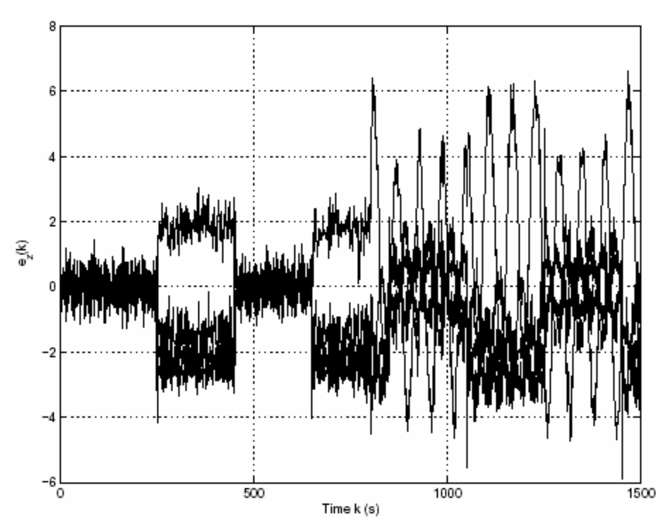

Fig. 4. Residuos $e_z(k)$

sensor a partir del tiempo indicado, en virtud de que se sigue el patrón de esta falla, corresponde a una señal sinusoidal.

5.2 Ejemplo 2

Considérese el modelo de diagnóstico a tiempo discreto utilizado en (Nobrega et al., 2000), donde

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}0000 & 0{,}0100 \\ -0{,}0100 & 0{,}9900 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}0010 \\ 0{,}0020 \end{pmatrix}, \; B_2 = 0, \; C_1 = (3 \quad 3),$$
$$D_{11} = 0{,}0500, \quad C_2 = C_1, \quad D_{21} = D_{11}.$$

Las matrices de distribución de fallas están dadas por

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0{,}0000 \\ 0{,}0100 \end{pmatrix}, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = F_2.$$

Utilizando la técnica propuesta en ese trabajo se obtiene un nivel de desempeño dado por $\gamma = 0{,}243$.

Aplicando el método que hemos propuesto se alcanza un nivel de atenuación definido por $\gamma = 0{,}0500$, mejorándose el desempeño del filtraje. Esto muestra la fortaleza del método.

Seleccionando $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0{,}0202 \\ 0{,}0397 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9394 & -0{,}0506 \\ -0{,}1291 & 0{,}8709 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = 0;$$

garantiza la detección de fallas.

Solucionando el problema de síntesis del controlador en H_∞, entonces:

$$\mathbf{A}_p = 1{,}0e+003\begin{pmatrix} -2{,}3337 & -2{,}3340 \\ 2{,}3337 & 2{,}3340 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_p\begin{pmatrix} 0{,}5288 \\ -0{,}5288 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{B_e} = \mathrm{I}_{2x2}$, entonces

$$\mathbf{C}_p = 1{,}0e+003\begin{pmatrix} -2{,}3347 & -2{,}3340 \\ 2{,}3338 & 2{,}3331 \end{pmatrix},\quad \mathbf{D}_p\begin{pmatrix} 0{,}5288 \\ -0{,}5289 \end{pmatrix}.$$

Así, el nivel de atenuación obtenido corresponde $\gamma = 0{,}0500$. Mientras que el nivel de sensibilidad a fallas está dado por $\gamma_v = 1{,}0896$, mismo que garantiza la detección robusta de fallas.

6 Conclusiones

A través de la transformación del problema de detección robusta de fallas en un problema de control robusto en H_2 - H_∞, se ha presentado un método de diseño de filtros de detección y diagnóstico en sistemas lineales a tiempo discreto. De una manera sistemática, el método consiste en incorporar una señal de *control* en pre-adelanto, se obtiene resolviendo un problema de optimización basado en LMI, donde la matriz de control es un parámetro de diseño. Esto garantiza un nivel de atenuación para las perturbaciones. Como el diseño está basado en síntesis de controladores robustos con optimización LMI, cualquiera de las técnicas conocidas puede ser aplicada, incluyendo las correspondientes a multi-objetivos o índices de desempeño mezclados. La técnica constituye una primera generalidad de los métodos de diseño de filtros robustos, a su vez, es menos conservadora que métodos conocidos.

Referencias

Chen J y Patton RJ, 1999, H_∞ formulation and solution for robust fault diagnosis, 14th IFAC World Congress, Vol. P. IFAC, Beijing, pp. 127-132.

Chen J, Patton RJ y. Zhang H, 1996, Design of unknown input observers and robust fault detection filters, Int. Journal of Control 63(5), pp.85-105.

Edelmayer A, Bokor J, y Keviczky L, 1994, An H_∞ filtering approach to robust detection of failures in dynamical systems, 33th IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, pp. 3037-3039.

Khosrowjerdi MJ, Ñikoukhah R, y Safari-Shad N, 2003, Fault detection in a mixed H_2/ H_∞ setting, Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawai, USA, pp. 1461-1466.

Khosrowjerdi MJ, Ñikoukhah R, y Safari-Shad N, 2004, A mixed H_2/ H_∞ approach to simultaneous fault detection and control, Automatica 40, pp. 261-267.

Mangoubi RS y Edelmayer A, 2000, Model based fault detection: The optimal past, the robust present and a few thoughts on the future, 4th IFAC SAFEPROCESS, Vol. 1. IFAC, Budapest, pp. 64-75.

Massoumnia MA, 1986, A geometric approach to the sysnthesis of failure detection filters, IEEE Trans. Automatic Control 31(9), pp.839-846.

Niemann H. y J Stoustrup, 1998, Multi objective design techniques applied to fault detection and isolation, American Control Conference, ACC, Philadelphia, pp. 4496-4500.

Nobrega EG, Abdalla MO, y Grigoriadis KM, 2000. LMI-based filter design for fault detection and isolation, 39th IEEE Cinference on Decision and Control, CDC, Sydney, pp. 4329-4334.

Oliveira MC, De JC, Geromel y J. Bernussou, 1999, An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems, 38th IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, pp. 3611-3616.

Oliveira MC, De JC, Geromel y J. Bernussou, 2002, Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, Int. J. Control 75(19), pp.666-679.

Patton RJ, y Hou M, 1997, H_∞ estimation and robust fault detection, European Control Conference ECC-97, Bruxelles, pp. THM-J4.

Ríos-Bolívar A. y García G, 2001, Robust filters for fault detection and diagnosis: An H_∞ optimization approach, 6th European Control Conference, Porto, Portugal, pp. 132-137.

Ríos-Bolívar A. y García G, 2003, FDI robusto y control basado en LMI, 4to Congreso de Automatización y Control, CAC'03, Mérida, Venezuela, pp. CD-ROM.

Ríos-Bolívar A, Szigeti F, García G. y Bernussou J, 1999, A fault detection and isolation filter for discrete-time linear systems with disturbances, Dynamic and Control Conference Dycons'99, Ottawa, Canada.

Scherer CP, Gahinet y Chilali, 1997, Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, IEEE Trans. Automatic Control, 42(7), pp.896-911.

Song T y Collins Jr. EG, 2000, Robust H_2 estimation with application to robust fault detection, J. of Guidance, Control, and Dynamics, 23(6), 1067-1071.

Wang H y Lam J, 2002, Robust fault detection for uncertain discrete-time systems, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 25(2), pp. 291-301.

Wang H, Wang J, Liu J y Lam J, 2003, Iterative LMI approach for robust fault detection observer design, Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawai, USA, pp. 1974-1979.

Zhong M, Ding SX, Lam J. y Wang H, 2003, An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems, Automática 39, 543-550. 12.