

Programa de Simulación para Engranajes de Dientes Rectos por Elementos Finitos

Software for the straight tooth gear simulation with finite elements method

Chacón, Rubén*; Vergara, Mary y Díaz, Miguel

Escuela de Mecánica. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. ULA
Mérida, Venezuela
ccaste@dit.upm.es*

Andueza, Luís

Escuela de Diseño Industrial. Facultad de Arquitectura y Diseño. Universidad de Los Andes. ULA
Mérida, Venezuela

Resumen

Este trabajo presenta una herramienta computacional, de código abierto y bajo licencia GNU/GPL que permite modelar un par de engranajes de dientes rectos (EDR) en su punto de contacto de máximo esfuerzo; para ello se utiliza el lenguaje de programación LISP y se sigue la geometría definida por la Asociación Americana de Manufactura de Engranajes (AGMA). El programa dibuja los engranajes en dos dimensiones, para que luego sean utilizados con cualquier programa de cálculo por medio del método de elementos finitos (MEF). Una vez culminado el programa se realiza una prueba de esfuerzos utilizando MEF y se compara con la teoría de Hertz y con el método de la AGMA para el cálculo de engranajes. Los resultados obtenidos son casi exactos, lo que indica que el modelado realizado por el programa es confiable y puede ser utilizado para cálculos por MEF.

Palabras clave Código abierto, engranajes de diente recto, método de elementos finitos, software.

Abstract

This paper presents an open source computational software, under the GNU/GPL license, that allows to model a couple of straight tooth gear (STG) in its maximum stress contact point; the LISP programming language is used and the American Gear Manufacturing Association (AGMA) geometry definition. The software draws the gears in two dimensions, to be used then with any software that uses finite elements method (FEM). Once the software is finished a test it is done using the FEM, and the results are compared with the Hertz theory and the AGMA method for the gears analysis. The results are almost the same, indicating that the modeling done with the software it is reliable and could be use with FEM analysis.

Key words: Open Source, straight tooth gears, finite elements method, software

1 Introducción

Hoy en día los programas computacionales han logrado una mejora significativa en la calidad de la educación impartida en las universidades, tanto a nivel mundial, como aquí en Venezuela. Específicamente en el área de la ingeniería mecánica, existen hoy en día una serie de herramientas y/o programas que ayudan a los estudiantes a obtener una educación más completa y acorde con la situación in-

dustrial actual. Se puede encontrar entre esos programas, algunos que permiten el modelado de piezas, específicamente de engranajes; sin embargo, muchos de estos programas computacionales son de licencia privativa, es decir, que se tiene que comprar su licencia para que pueda ser utilizado. Estos programas al ser privativos vienen para ser utilizados bajo condiciones que no permiten su modificación o adaptación bajo ninguna razón o precepto.

Por esta razón se plantea la necesidad de la elabora-

ción de una herramienta computacional que permita el modelado de engranajes, en principio se trabajará con engranajes de dientes rectos y en dos dimensiones, para luego ir ampliando las posibilidades del mismo y también pasar a la tercera dimensión. El programa que se propone será gratis y de código abierto, bajo las premisas de las licencias GNU/GPLv3, buscando con esto favorecer principalmente a las universidades en su parte académica y de investigación. Este tipo de licenciamiento, GNU/GPLv3, permite que el programa realizado pueda ser utilizado por otras persona sin ningún tipo de restricción, esto quiere decir que el usuario puede modificar el programa y volverlo a distribuir, siempre y cuando lo haga bajo el mismo tipo de licenciamiento (GNU, 2007). En general los programas de código abierto deben seguir cuatro libertades fundamentales, que se describen a continuación: Libertad 0: Utilizar el software para cualquier propósito. Libertad 1: Libertad de estudiar cómo trabaja el programa, y adaptarlo a las necesidades del usuario, el acceso al código fuente es una condición previa a esto. Libertad 2: Distribuir copias a terceros, o hacerlas públicas de cualquier manera, con lo que se puede ayudar a los demás investigadores. Libertad 3: Permitir modificar el programa y hacer públicas las mejoras a los demás, de modo que toda la comunidad se pueda beneficiar de ellas. El acceso al código fuente es un requisito previo para esto. (GNU, 2007).

2 Programa

Para el programa a realizar en el presente trabajo se utilizan engranajes de dientes rectos, regidos por las normas AGMA (AGMA, 1996) (American Gear Manufacturers Association) para el tamaño, forma, materiales y procesos de fabricación. El perfil de dientes utilizado es el de involuta, que posee las características de los perfiles conjugados que permite el cumplimiento de la ley fundamental de los engranajes. Con éste propósito se ha desarrollado un código de programación en AutoLisp que genera engranajes de dientes rectos con perfil evolvente de altura de diente completa. Se selecciona este tipo de perfil porque posee las características de los perfiles conjugados permitiendo el cumplimiento de la ley fundamental de los engranajes siendo de vital importancia para el desarrollo de un modelo que emule las condiciones de trabajo real del engranaje. Este programa se realiza de manera que se pueda controlar a conveniencia la geometría del diente, y se tienen como datos de entrada las variables de diseño: paso diametral, diámetro primitivo, ángulo de presión y número de divisiones que se desean en el perfil.

El programa modela en dos dimensiones un par de dientes en contacto, y lo hace en su punto de contacto más crítico. Esto se debe a que se dibuja bajo las condiciones de carga más severa, y esta condición se tiene cuando un solo par de dientes asume toda la carga. Dean desarrolla un procedimiento para determinar el punto donde un solo engrane recibe toda la carga (Dean, 1974).

Como se muestra en la Fig. 1, el contacto comienza en el punto A y termina en el punto C. Esta distancia se conoce como a línea de acción o de presión. El punto B es el punto más alto de contacto de un solo par de dientes. En los intervalos AD y BC dos pares de dientes comparten la carga, mientras que en el intervalo DB un solo par acarrea la carga.

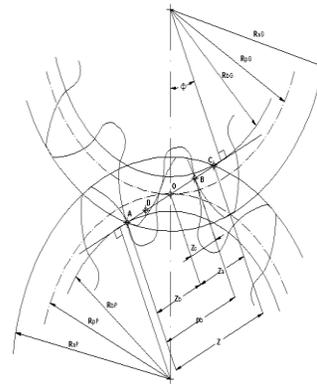


Fig. 1 Punto de contacto crítico en un par de dientes

La herramienta computacional tiene un diagrama de flujo bastante sencillo como se puede observar en la Fig. 2, consiste en solicitar los datos necesarios para poder dibujar el diente, que en este caso serán Paso diametral en pulgadas, diámetro primitivo en pulgadas, ángulo de presión en grados y finalmente el número de divisiones que se quieren en el diente. Una vez que se tienen los datos, se calcula la geometría del diente utilizando la ecuación de perfil evolvente. Se procede a dividir la geometría calculada según el número de divisiones introducido al principio. Se calcula la posición de contacto según el procedimiento de Dean. Finalmente se genera la geometría de los dos dientes en contacto y se muestra en pantalla y termina el programa. Una vez culminado el programa, el usuario tendrá la potestad de guardar el archivo según el formato que requiera para realizar los cálculos con la ayuda de otro software.

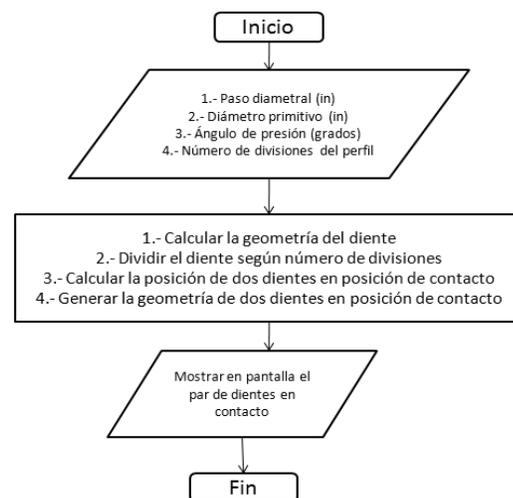


Fig. 2 Diagrama de flujo de la herramienta computacional

3 Prueba y Condiciones de Frontera

Una vez realizado el programa, y para verificar que el modelado realizado por el software sirve para los propósitos establecidos, se hace una comparación entre un modelado realizado con el programa, que luego se lleva al software Ansys, para realizar un análisis de esfuerzos por medio del método de elementos finitos; con los análisis por medio de la teoría de la AGMA para el cálculo de engranajes; y con la teoría de Hertz para el cálculo de esfuerzos en dos dimensiones, para cilindros en contacto (Hertz, 1985).

El material utilizado para el estudio es acero SAE 8620, con esfuerzo de fluencia $\sigma_Y = 86 \times 10^3$ lbf/pulg², módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ lbf/pulg² y relación de Poisson $\nu = 0,3$. Wang y Howard, dicen que las condiciones de frontera y cargas en modelado por elementos finitos de estructuras en 2D deben hacerse minuciosamente de manera que puedan simular condiciones de operación real. Se toma el punto más crítico de funcionamiento que es cuando un solo par de dientes recibe toda la carga (Wang y Howard, 2006). Para encontrar dicho punto se utiliza el procedimiento desarrollado por Dean (Dean, 1974)

Finalmente se desarrolla un modelo de elementos finitos que aprovecha la simetría de la geometría del engranaje y utiliza solamente el 5% del modelo, es decir la veintava parte de los engranajes superior e inferior. Luego el modelo se restringe como muestran en la Fig. 3, siguiendo los planteamientos de Filiz y Eyercioglou (Filiz; Eyercioglou, 1995).

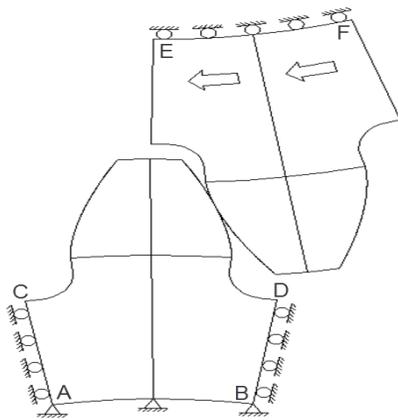


Fig. 3 Condiciones de frontera del MEF

Para fines del cálculo numérico se utilizaron como valores para el par de engranajes: Diámetros primitivos iguales y de valor $d_1 = d_2 = 5,0$ pulg. Número de dientes $N = 20$, Paso diametral $P_d = 4$, Ancho $b = 1,0$ pulg y Diámetro del agujero para el eje $D_e = 3,5$ pulg. La carga transmitida por los engranajes consiste en un torque de $T = 10000$ Lbf.pulg.

4 Metodología de Discretización

El procedimiento de discretización con el que se ha lo-

grado la convergencia de resultados en la simulación, consiste en dividir en cuatro áreas cada diente del par de engranajes (ver Fig. 3). Luego se han creado tres modelos de discretización empleando las herramientas de mallado libre que ofrece el programa de simulación Ansys, permitiendo lograr un refinado controlado que se adapta a la cantidad de puntos generados sobre el perfil evolvente. La Fig. 4 muestra los modelos de mallado desarrollados y la tabla 1 muestra los números de elementos y la cantidad de nodos utilizados por cada modelo.

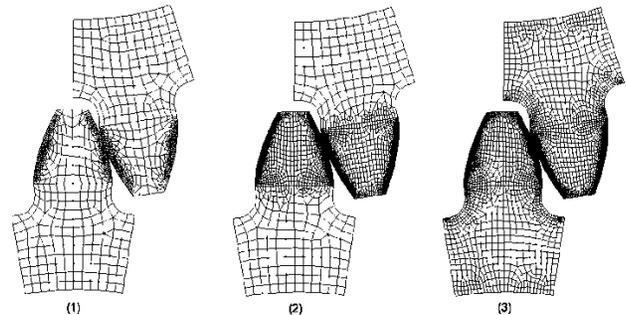


Fig. 4 Modelos de discretización en el MEF

Tabla 1 Número de elementos y nodos por modelo

Modelo	Nº nodos	Nodos sobre evolvente	Nodos de aplicación de carga
1	4176	121	25
2	18522	361	25
3	24540	401	61

5 Mecánica de contacto (Contacto de cilindros de Hertz en dos dimensiones)

Uno de los problema de contacto planteados por Hertz consiste en la determinación de los esfuerzos de contacto para el contacto sin fricción de dos cilindros largos sobre una línea paralela a sus ejes. Cuando dos cilindros se colocan en contacto, su huella será rectangular y se genera una distribución de presión formada por un prisma semielíptico de semiancho "a". Las expresiones obtenidas por Hertz (Pope, 2000) para el cálculo de la longitud de contacto "a" y la presión de contacto máxima (P_o) son las siguientes:

$$a = 2 \sqrt{\frac{PR}{\pi E^*}} \quad (1)$$

$$P_o = \sqrt{\frac{PE^*}{\pi R}} \quad (2)$$

En donde P es la carga normal transmitida y E^* es una

constante que toma en cuenta el módulo de elasticidad y la relación de Poisson del par de engranajes. La distribución de presión en la zona de contacto se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$p(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3)$$

La ecuación fundamental de la AGMA para la determinación del esfuerzo por contacto en los dientes es:

$$\sigma_C = Cp \cdot \left(\frac{W_t}{F \cdot D_p I} \frac{C_a \cdot C_m}{C_V} C_S \cdot C_f \right)^{1/2} \quad (4)$$

Donde, “ σ_C ” es el esfuerzo por contacto superficial, “ W_t ” la componente tangencial de la carga real transmitida e “ I ” el factor geométrico. También es denominado como factor geométrico de resistencia a la picadura por la AGMA, toma en cuenta el radio de curvatura de los dientes de los engranajes y el ángulo de presión. Las constantes “ C ” consideran factor de aplicación de carga (C_a), de distribución de carga (C_m), factores dinámico (C_v), el factor de tamaño (C_s) y el factor de condiciones de la superficie (C_f). En el presente estudio se toman igual a uno. CP es el coeficiente elástico y Toma en consideración las diferencias de los materiales de piñón y rueda. Según la Norma Agma 2001- B88, para acero con relación de Poisson $\nu = 0,3$ y módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6 \text{MPa}$, se tiene que $CP = 2300$.

6 Resultados

Finalmente se realizan cálculos utilizando la teoría de esfuerzos debido a contacto de Hertz, (Pope, 2000) y con la teoría de la AGMA, para ser comparados con los resultados obtenidos de las simulaciones de los modelos propuestos. En la Figura 5 se presenta una comparación del esfuerzo σ_Z a lo largo perfil evolvente, obtenido con el modelo 3 (FEM 3), los esfuerzos según Hertz y los esfuerzos según la AGMA. Puede verificarse que el modelo 3 presenta una tendencia similar a las curvas teóricas, con valores máximos de esfuerzos en los puntos más bajos en el que un solo par de dientes asumen toda la carga. Una comparación de la distribución de presión en la línea de contacto ($z=0$) entre los tres modelos propuestos y la teoría se presenta en la Figura. 6. La curva teórica se obtiene empleando la teoría de Hertz con los parámetros geométricos del punto estudiado. La distribución del modelo 3 es la que presenta mayor similitud a la curva de Hertz, con un valor máximo de 5% inferior al valor teórico.

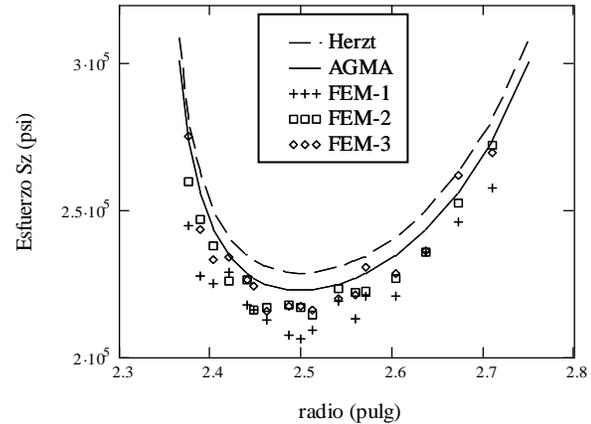


Fig. 5 Comparación de esfuerzos a lo largo del perfil evolvente

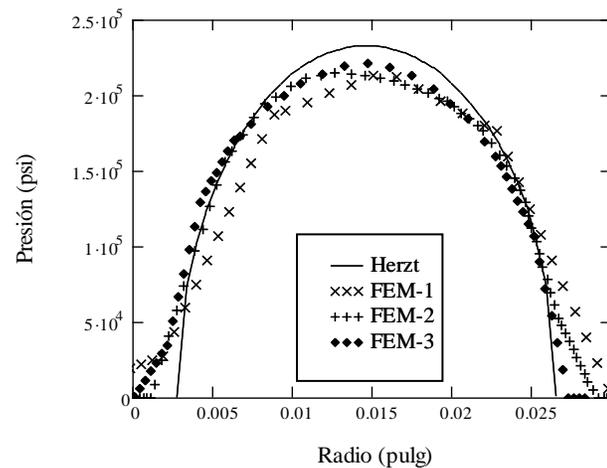


Fig. 6 Comparación de esfuerzos a lo largo del perfil evolvente

En la tabla 2 se muestran los resultados del esfuerzo de corte máximo que se alcanza en la zona de contacto para el modelo 3 y el modelo teórico; verificándose que τ_{MAX} es apenas 3.6% inferior al valor teórico según Hertz y que este se logra debajo de la superficie a una distancia $z \cong 0.60^a$.

Tabla 2 Esfuerzo de corte máximo en la zona de contacto

	a (pulg)	z (pulg)	σ_{MAX} (psi)	z/a	σ_{MAX}/P_o
Modelo 3	1.35e-2	8.14e-3	67428.0	0.60	0.29
Teórico	1.16e-2	9.07e-3	69922.6	0.78	0.30
% Variación	16.6%	10.3%	3.6%	23.1%	3.6%

7 Análisis y Discusión de los Resultados

Los esfuerzos de contacto obtenidos con los modelos realizados por medio de MEF y los esfuerzos según las teoría de Hertz y la AGMA son muy similares, presentando una tendencia a incrementarse de forma exponencial hacia los extremos del perfil evolvente (fig 5) y con un valor mínimo en el punto primitivo. No obstante el MEF desarrollado muestra la equivalencia de tendencias y resultados obtenidos, y se solo se mostraron diferencias del orden de 5.0% con respecto a la teoría de Hertz y del 2.6% respecto de los valores de la AGMA.

Los esfuerzos principales σ_2 y σ_3 son máximos para ($z=0$) y disminuyen rápidamente con la profundidad dentro del material y al alejarse de la línea central de simetría. El esfuerzo cortante máximo se alcanza debajo de la superficie en $z \approx 0.6a$, que difiere sensiblemente de la teoría de Hertz que dice que se alcanza en $z \approx 0.78a$. Estos resultados proponen que factores geométricos del perfil evolvente como el radio de curvatura variable y las condiciones de deslizamiento propias del funcionamiento de los engranes representan factores importantes en la determinación del punto de ocurrencia de los esfuerzos cortantes. No obstante, el valor del esfuerzo de corte máximo es aproximadamente $\tau_{MAX} \approx 0.3P_0$ que concuerda con la teoría de Hertz, lo que permite que sea considerado como criterio de punto de fluencia para el contacto

8 Conclusiones

Primeramente se ha mostrado la capacidad del MEF para la simulación del contacto mecánico en EDR, presentando estimaciones de la presión de contacto y estados de esfuerzos con resultados y tendencia similares a los obtenidos según la teoría de contacto Hertz y la AGMA. Esto demuestra que el programa realizado permite realizar un modelado adecuado para ser utilizado en programas que utilizan MEF. También se muestra que se puede utilizar el programa para realizar investigaciones en el área de diseño de engranajes de diente recto en dos dimensiones.

Finalmente se puede decir que se muestra un programa que cumple las funciones para el que fue diseñado; además trabaja bajo licencia GNU/GPLv3 por lo que es de libre uso y modificación por parte de cualquier persona, contribuyendo esto con la mejora del mismo, y por lo tanto con la educación e investigación universitaria en esta área.

Referencias

AGMA Standard 220.02, 1966, Strength of Spur Gear Teeth, American Manufactures Association, Alexandria, Virginia.
Dean P, 1974, Geometry and Theory of Gears, Gear Manufacture and Performance, The American Society of Metals.
Filiz I y Eyercioglou, O, 1995, Evaluation of Gear Tooth Stress by Finite Element Method, Journal Engineer for In-

dustry, Vol. 117 No. 2, pp. 232-239.

GNU Operating System, 2007. Se encuentra en: <http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>. Fecha de consulta:

Hertz H, 1985, Über die Berührung fester Elastischer Körper”, Gessamelte Werke, Vol. 1, Leipzig, pp.155.

Pope J, 2000, Soluciones Prácticas para el Ingeniero Mecánico, McGraw-Hill.

Wang J y Howard I, 2006, Error Analysis of Finite Element Modeling of Involute Spur Gears, Journal of Mechanical Design. Vol. 128 No. 1, pp. 90-97.

Recibido: 27 de abril de 2010

Revisado: 31 de enero de 2011

