

# Determinación de los factores geométricos para el cálculo a flexión de los engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos con perfil de evolvente y trocoide

## Determination of geometric factors for the calculation bending of spur gears with asymmetric teeth of involute profile and trochoid

\*Cárdenas, Javier;<sup>1,3</sup>; Moya, Jorge;<sup>2</sup> y Hernández, Daniel<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Mecánica. Universidad Politécnica Territorial del Estado Aragua "Federico Brito Figueroa". Aragua, Venezuela

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería Mecánica. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Villa Clara. Cuba

<sup>3</sup>Centro de Estudios - CAD/CAM. Holguín. Facultad de Ingeniería. Universidad de Holguín "Oscar Lucero Moya". Cuba  
\*cardenasoja@gmail.com

### Resumen

*A partir de la síntesis de la rueda dentada cilíndrica recta con diente asimétrico de perfil evolvente y trocoide, para estimar los factores geométricos de forma (YF) y de resistencia (J) se adopta un método de cálculo directo, basado en la lectura computacional de las dimensiones transversales del diente virtual en las zonas de interés, identificadas por valores límites de acuerdo a las características del perfil. Simultáneamente se efectúan los cálculos necesarios para conseguir YFi en cada paso del procedimiento, seleccionando el menor como YF. Con los valores críticos de altura, sección, concentradores de esfuerzo y radio de curvatura se estima J. El modelo se verifica utilizando herramientas CAD/CAE.*

**Palabras clave:** Engrane recto asimétrico, factores geométricos, resistencia a la flexión, CAD/CAE.

### Abstract

*From the synthesis spur gears with asymmetric teeth of involute profile and trochoid to estimate the form geometry factor (YF) and bending strength (J) a direct calculation method is used. The above method is based on virtual transverse dimensions computational reading in specific sectors. All of them we identified by limit values corresponding to the profile characteristics. The measures and calculus are simultaneously performed to get YFi in each procedure step where at the same time is selected the lowest YF value. A mathematical procedure is described to determine the geometry factor J, based on critical values of height, section, stress concentrations and curvature radius. The model was tested using CAD/CAE tools.*

**Key words:** Asymmetric spur gear, geometry factors, bending strength, CAD/CAE.

### 1 Introducción

Desde 1998 se conoce que una solución viable para mejorar la capacidad portante del engrane es la creación de ruedas dentadas con perfil asimétrico, como plantean (Litvin y col., 2000), (Kapelevich y Kleiss, 2002), quienes afirman que este tipo de engrane presenta cualidades como mayor capacidad de carga, reducción de costos, extensión de vida útil, reducción de tamaño, peso, ruido y vibración, alta eficiencia de transmisión, aumento de la confiabilidad.

Para utilizar cualquiera de las expresiones analíticas

tradicionales en el cálculo de la resistencia a flexión de los dientes de los engranes asimétricos o simétricos, es imprescindible conocer el factor de Lewis o factor geométrico de forma YF, que origina al factor geométrico de resistencia Jal tomar en cuenta la concentración de esfuerzos generados por los cambios de curvatura del perfil en la base del diente.

En el caso específico de los engranajes asimétricos, por lo reciente de su estudio y utilización, existen pocos datos en la literatura. Para engranajes simétricos estos parámetros se calculan a través de diferentes procedimientos ya

normados (AGMA 908-B89, 1989), (ISO 6336-3, 1996), en los estándares actuales no se han establecido procedimientos de estimación para los engranes de dientes asimétricos.

Para la determinación de los esfuerzos por flexión en la base del diente con perfil de evolvente y trocoide de los engranes cilíndricos rectos asimétricos, al escoger el método de elementos finitos, es necesario conocer el dominio del objeto de estudio.

En los trabajos publicados se observan dos tendencias en cuanto a la creación del dominio, una que parte de la generación geométrica del diente, con el método conocido como diseño directo *Direct Design Gear*, autores representativos (Kapelevich y Shekhtman, 2003), (Deng y col., 2003), (Senthil Kumar y col., 2007), (Flavia y col., 2007). Otra tendencia se basa en la teoría general de la cinemática presente en el proceso de generación del engrane, autores representativos (Litvin y Fuentes, 2004), (Cavdar y col., 2005), (Yang, 2005).

**2 Coeficiente de asimetría, modelo matemático y generación CAD del diente**

El diente asimétrico está compuesto por dos perfiles denominados ataque y respaldo, correspondientes respectivamente a los ángulos de presión menor y mayor. Los perfiles se relacionan por el coeficiente de asimetría *c*, definido como la razón entre los ángulos de presión de los perfiles evolventes de respaldo y ataque (normalmente mayor contra menor)

$$c = \text{Ang\_Perfil}_{mayor} / \text{Ang\_Perfil}_{menor} = \phi h_r / \phi h_a \tag{1}$$

Está satisfactoriamente determinado que en la construcción de engranes por generación los perfiles del diente tienen una cara de función evolvente, ecuaciones paramétricas, y un flanco de función trocoide, ecuaciones. Se inician en su intersección y finalizan, la evolvente en la cabeza del diente y la trocoide en el círculo de fondo, como han establecido (Buckingham, 1949), (Dudley, 1973), (Fuentes, 1995), (Hernández, 2006).

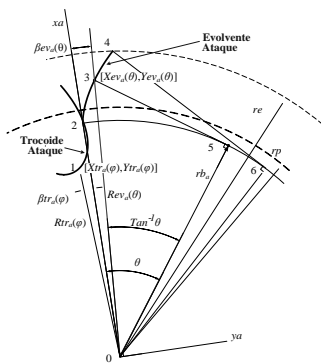


Fig. 1 Ángulos polares perfil ataque  $\beta_{ev_a}(\theta) = inv_a\theta$  y  $\beta_{tr_a}(\varphi) = inv_a\varphi$

**Evolvente.** Es el lugar geométrico del perfil generado por la parte recta de la herramienta de tallado por encima de

un radio  $rp \cos(\phi h)$ , es una evolvente de circunferencia, cuyas ecuaciones paramétricas son el radio de base de esa circunferencia se conoce como radio básico  $rb$  del engrane. La función evolvente, está en función del parámetro  $\theta$  (ángulo entre el origen de la evolvente y un punto de la circunferencia de base), como se muestra para el caso del perfil de ataque en la fig. 1

$$Rev(\theta) = rb\sqrt{1+\theta^2} \tag{2}$$

$$\beta_{ev}(\theta) = \theta - \tan^{-1}(\theta) \tag{3}$$

**Trocoide.** Es el lugar geométrico de los puntos del radio de acuerdo de la cabeza de la herramienta sobre la rueda generada, razón por la cual se considera como parámetro al ángulo  $\varphi$ , formado por la recta que une un punto cualquiera del acuerdo de la herramienta y el centro de la circunferencia de acuerdo con su horizontal fig. 2, además se tienen como variables intervinientes en su generación a

*ro, rf, rp, h<sub>ao</sub>, x:*

*ro:* Radio de salida de trocoide

$$ro = rp + m \left[ x - h_{ao} + rf (1 - \text{Sen}(\phi h_a)) \right]$$

*rf:* Radio de finalización de herramienta

*rp:* Radio primitivo

*h<sub>ao</sub>:* Altura de adendo de herramienta

*x:* Coeficiente de corrección

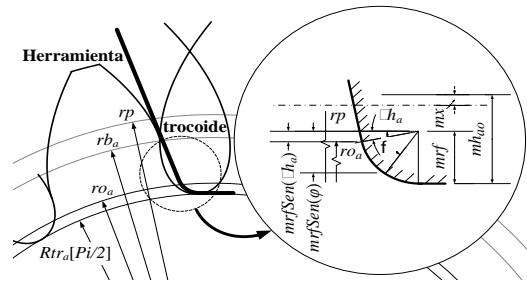


Fig. 2. Parámetro  $\varphi$

La función trocoide está descrita por las ecuaciones paramétricas, fig. 1 y 2.

$$Rtr(\varphi) = \text{Sqrt} \left[ \left[ ro - rf (\text{Sen}\varphi - \text{Sen}\phi h) \right]^2 + \left[ \frac{rp - ro + rf (\text{Sen}\varphi - \text{Sen}\phi h)}{\text{Tan}\varphi} \right]^2 \right] \tag{4}$$

$$\beta_{tr}(\varphi) = \text{Tan}^{-1} \left[ \frac{rp - ro + rf (\text{Sen}\varphi - \text{Sen}\phi h)}{\text{Tan}\varphi [ ro - rf (\text{Sen}\varphi - \text{Sen}\phi h) ]} + \frac{ro \text{Tan}\phi h}{rp} - \phi h - \frac{rp - ro - rf \text{Sen}\phi h}{rp \text{Tan}\varphi} - \frac{rf \text{Cos}\phi h}{rp} \right] \tag{5}$$

En este trabajo, la síntesis del engrane cilíndrico recto

asimétrico o dominio (fig. 3), se obtiene a partir de la generación y unión de las diferentes funciones representativas de los flancos y caras, trocoides, evolventes, sector circular de cabeza, incluyendo la distancia entre dientes, que en su totalidad representan el perfil total del diente del engrane en estudio, el método utilizado lo establecen (Cárdenas y col., 2010).

El modelo (fig. 4) es general para cualquier número admisible de dientes, módulo, adendo, dedendo, ángulo de presión de la cara de ataque, coeficiente de asimetría, radio de finalización de herramienta, coeficiente de corrección.

Luego discretizan las funciones componentes del perfil. La data, puntos (x,y) fig. 5, se exporta en archivos tipo texto y se procede a 1) captura, 2) regeneración mediante curvas B-Splines y 3) unión y extrusión, (generando el modelo CAD usando macros desarrolladas en ambiente VBASIC de Mechanical Desktop 6.0®, (fig.6a).

Se exporta el modelo CAD con archivo de intercambio tipo STEP. Mediante la utilización de la aplicación SolidWorks2010® se regenera el modelo que será utilizado como diente virtual (fig.6b), a ser ensayado con la herramienta CAE (SolidSimulation), del SolidWorks2010®

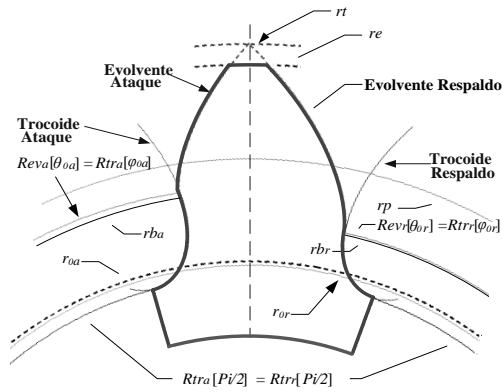


Fig. 3. Diente asimétrico

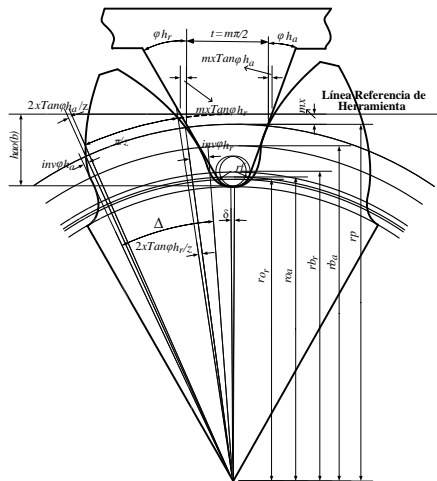


Fig.4. Modelo geométrico del diente y herramienta

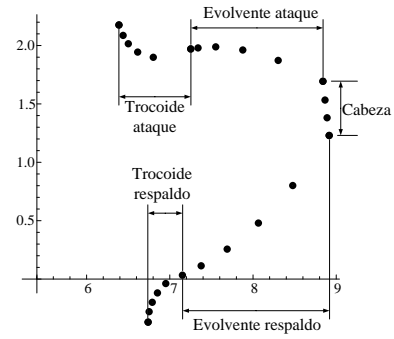


Fig. 5. Modelo discretizado

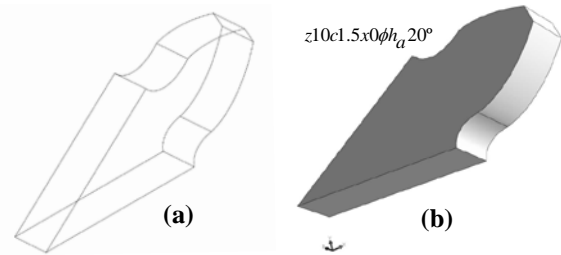


Fig.6. a) Modelo generado, b) Modelo en SolidWorks

### 3 Factor de forma YF para dientes asimétricos

El modo de cálculo se basa en la propuesta efectuada por (Moya y col., 2007), quienes a partir de la geometría del diente asimétrico (fig. 7) y un análisis de los esfuerzos producidos en la base del diente asimétrico (fig. 8), deducen la ecuación que define al factor geométrico de forma YF. Incorporan para efectos de cálculo el algoritmo desarrollado por (González y col., 2002).

$$YF_a = \frac{\left(\frac{Sc}{m}\right)^2 \cos(\phi_{h_a})}{6 \left[ \frac{\cos(\phi_{Ln_a}) hcr_a}{m} - \frac{e \text{Sen}(\phi_{Ln_a})}{m} \right]} \quad (6)$$

#### 3.1 Descripción de variables intervinientes

Radio de la intersección  $r_a^{Ln}$  de la carga normal  $Ln_a$  (lado de ataque) con el eje de la punta del diente. Es la distancia medida desde el centro de la rueda dentada a la intersección de la dirección de la carga con el eje radial  $rt$  de la punta del diente,  $l_{02}$  (fig. 7)

$$r_a^{Ln} = r_{b_a} / \cos(\phi_a^{Ln}) \quad (7)$$

Altura crítica lado de ataque ( $h_a^{cr}$ ). Es la distancia en-

tre el radio de la intersección de la dirección de la carga en la cabeza, con el radio de la punta del diente  $ri_a^{Ln}$ , menos la altura de la sección crítica  $ys$  (fig. 8).

$$h_a^{cr} = ri_a^{Ln} - ys \tag{8}$$

**Sección crítica ( $Sc$ ).** Suma de las secciones medias críticas de los lados de respaldo y ataque, (fig. 8).

$$Sc = Sc_a^m + Sc_r^m \tag{9}$$

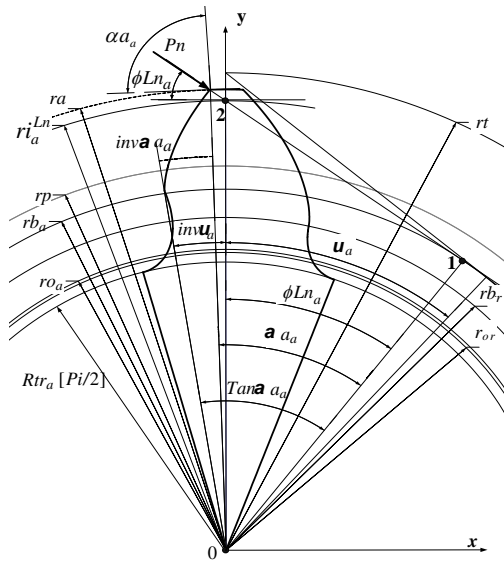


Fig. 7. Geometría del diente

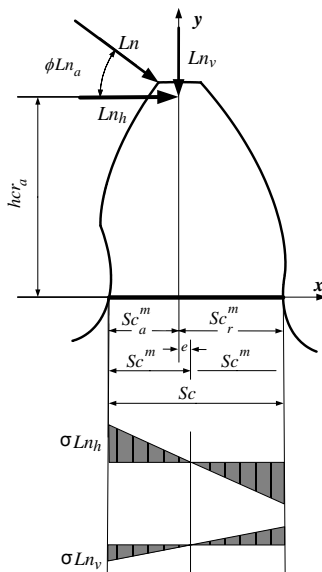


Fig. 8. Diagrama de esfuerzos

**Excentricidad ( $e$ ).** Representa el brazo de momento de la componente vertical de la carga normal. Debido a la asimetría (fig. 8) la componente vertical de la carga normal  $Ln_v$  se encuentra desplazada un valor  $e$  del centro de la sección crítica  $Sc_m$ , lo cual origina esfuerzos de compresión que contrarrestan a los de tracción de la componente horizontal  $Ln_h$ .

$$e = Sc_r^m - Sc / 2 \tag{10}$$

**Angulo de la carga normal en la punta ( $\phi Ln_a$ ).** Es el ángulo de la dirección de la carga normal respecto a la horizontal en el diente virtual. Por perpendicularidad común de las líneas  $l_{01}$  y  $l_{02}$  con la horizontal y la línea  $l_{21}$  (fig. 7) se consigue su expresión, mostrada en.

$$\phi Ln_a = \text{Tan}(\alpha_a) - \text{inv}v_a \tag{11}$$

### 3.2 Procedimiento de estimación de YF

Se usa un modo de cálculo directo (producto de las dimensiones del modelo generado), se utiliza la ec, basándose en la sucesiva estimación del espesor crítico  $Sc$  y la altura crítica  $h_a^{cr}$  de un diente, en la zona limitada por las cotas denominadas límites superior y  $L_s$  y límite inferior y  $L_i$  (fig. 9).

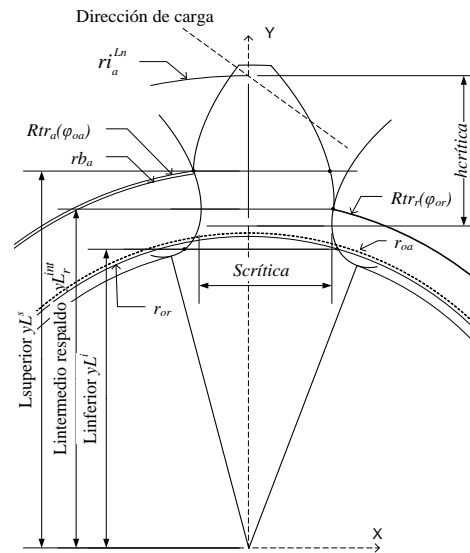


Fig. 9. Límites Zona de estudio

**Límite superior  $yL^s$ .** Es la ordenada en el diente virtual (fig. 9) de la intersección de la evolvente y la trocoide del lado de ataque, se escoge ya que debido a la asimetría, el radio de la intersección entre la evolvente y la trocoide en el lado de ataque es mayor que en el respaldo,

$Rtr_a(\varphi o_a) \geq Rtr_r(\varphi o_r)$ . Respecto al eje vertical el ángulo de la intersección es la diferencia entre el ángulo polar de la punta  $invv_a = Tan(v_a) - v_a$  (fig. 7) y el ángulo polar de la trocoide  $\beta tr_a(\varphi o_a)$  en la intersección con la evolvente, en dicho punto los ángulos paramétricos son  $\{\theta o_a, \varphi o_a\}$ .

$$yL^s = Rtr_a(\varphi o_a) \text{Cos} [invv_a - \beta tr_a(\varphi o_a)] \quad (12)$$

Ángulo del límite superior en lado de respaldo  $\theta L_r^s$ . El límite superior del respaldo es igual al del ataque y  $L_s$ , fig. 9. Se estima el ángulo del límite superior de la evolvente del respaldo al resolver la ecuación y se asigna a  $\theta L_r^s$  mediante la ecuación.

$$yL^s = Rev_r(\theta_i) \text{Cos} [invv_r - \beta ev_r(\theta_i)] \quad (13)$$

$$\theta L_r^s = \theta_i \quad (14)$$

Límite intermedio del lado de respaldo  $yL_r^{int}$ . El radio de la intersección de la evolvente con la trocoide del respaldo en los ángulos paramétricos  $\{\theta o_r, \varphi o_r\}$ , define la ordenada del límite intermedio del respaldo  $yL_r^{int}$ , fig. 9.

$$yL_r^{int} = Rev_r(\theta o_r) \text{Cos} [invv_r - \beta ev_r(\theta o_r)] \quad (15)$$

Límite inferior  $yL^i$ . Este límite será en general el inferior del lado de respaldo  $yL^i = yL_r^i$  ya que debido a la relación de asimetría siempre  $ror \leq roa$ . El límite inferior del lado de respaldo  $yL_r^i$ , es la altura del radio de salida de la trocoide del respaldo  $ror$ . La solución de la ec., produce el ángulo  $\varphi ir$ , ángulo del límite inferior del respaldo  $\varphi L_r^i$  que se utiliza para estimar  $yL_r^i$ , fig. 9.

$$ro_r = rp + m \{x - b + rf [1 - \text{Sin}(\phi h_r)]\} \quad (16)$$

$$ro_r = Rtr_r(\varphi i_r) \quad (17)$$

$$\varphi L_r^i = \varphi i_r \quad (18)$$

$$yL^i = yL_r^i = Rtr_r(\varphi L_r^i) \text{Cos} [\beta tr_r(\varphi L_r^i)] \quad (19)$$

Ángulo del límite inferior del ataque  $\varphi L_a^i$ . Con la solución de la ec., se consigue el ángulo  $\varphi i_a$  de la trocoide del ataque en el punto donde su componente vertical se hace igual a  $yLi$ , dicho ángulo es  $\varphi L_a^i$ .

$$yL^i = Rtr_a(\varphi i_a) \text{Cos} [\beta tr_a(\varphi i_a)] \quad (20)$$

$$\varphi L_a^i = \varphi i_a \quad (21)$$

Espesor medio del ataque en límite superior  $xs_a^m$ . Resultado del valor de la abscisa de la trocoide del perfil de ataque, calculada para la altura en el límite superior. Espesor medio del ataque en límite superior  $xs_a^m$ . Resultado del valor de la abscisa de la trocoide del perfil de ataque, calculada para la altura en el límite superior. Espesor medio del ataque en límite superior  $xs_a^m$ . Resultado del valor de la abscisa de la trocoide del perfil de ataque, calculada para la altura en el límite superior.

$$xs_a^m = yL^s \text{Tan} [invv_a - \beta tr_a(\varphi o_a)] \quad (22)$$

Alturas y espesores instantáneos en la trocoide del perfil de ataque  $ysf_a(\varphi_a)$ ,  $xsf_a(\varphi_a)$ . Las funciones de altura y espesor se crean para la trocoide del ataque.

$$ysf_a(\varphi_a) = Rtr_a(\varphi_a) \text{Cos} [invv_a - \beta tr_a(\varphi_a)] \quad (23)$$

$$xsf_a(\varphi_a) = Rtr_a(\varphi_a) \text{Sin} [invv_a - \beta tr_a(\varphi_a)] \quad (24)$$

Alturas y espesores instantáneos en el perfil de respaldo. Existe la posibilidad que el límite superior el perfil del lado de respaldo se encuentre en la evolvente o la trocoide, por tanto se prevé dicha situación al efectuar una comparación entre el límite superior  $yL_s$  y el límite intermedio del respaldo  $yL_r^{int}$ , según sea el resultado se escoge la evolvente o la trocoide para definir la función del espesor medio para el ataque.

Si  $ysf_a(\varphi_a) > yL_r^{int}$ , el espesor medio del respaldo es:

$$ysf_a(\varphi_a) = Rev_r(\theta i_r) \text{Cos} [invv_r - \beta ev_r(\theta i_r)], \theta_r = \theta i_r$$

$$xsf_r(\theta_r) = Rev_r(\theta_r) Sen[inv\nu_r - \beta ev_r(\theta_r)] \tag{25}$$

Si  $ysf_a(\varphi_a) \leq yL_r^{int}$ , el espesor medio del respaldo es:  
 $ysf_a(\varphi_a) = Rtr_r(\varphi_r) Cos[inv\nu_r - \beta tr_r(\varphi_r)]$ , .....  $\varphi_r = \varphi_i$

$$xsf_r(\varphi_r) = Rtr_r(\varphi_r) Sen[inv\nu_r - \beta tr_r(\varphi_r)] \tag{26}$$

Una vez definidas las funciones y límites de las zonas de recorrido, se procede a discretizar desde el límite superior al inferior del perfil, según ni número de divisiones. El paso  $\phi$  se define como  $inc\phi$ .

$$inc\phi = (\phi L_a^i - \phi a) / ni \tag{27}$$

Para cada valor  $inc\phi$  calcula YFi, se almacena en un arreglo y se extrae posteriormente el valor mínimo de los YFi almacenados, dicho valor representa la solución YF. La tabla 1 indica los valores numéricos de YF en función del número de dientes z y coeficiente de asimetría c, así como la fig. 10.

Tabla 1. Factor de forma YF según z y c

Z	c1,0	c1,1	c1,2	c1,3	c1,4	c1,5
10	0,22207	0,23416	0,24704	0,26085	0,27569	0,29172
12	0,25401	0,26736	0,28161	0,29685	0,31324	0,33089
14	0,27869	0,29301	0,30825	0,32458	0,34207	0,36094
15	0,28905	0,30374	0,31942	0,33616	0,35413	0,37347
17	0,30676	0,32210	0,33845	0,35592	0,37464	0,39481
20	0,32771	0,34380	0,36093	0,37922	0,39882	0,41990
21	0,33358	0,34987	0,36720	0,38572	0,40555	0,42689
26	0,35703	0,37409	0,39225	0,41161	0,43237	0,45465
30	0,37085	0,38835	0,40695	0,42682	0,44807	0,47042
35	0,38420	0,40209	0,42112	0,44142	0,46304	0,48498
40	0,39456	0,41276	0,43210	0,45273	0,47425	0,49592
50	0,40966	0,42826	0,44804	0,46888	0,48999	0,51136
55	0,41534	0,43409	0,45402	0,47477	0,49576	0,51708
60	0,42015	0,43903	0,45908	0,47970	0,50060	0,52209
70	0,42789	0,44696	0,46705	0,48750	0,50847	0,53042
80	0,43385	0,45305	0,47307	0,49348	0,51474	0,53705
90	0,43857	0,45787	0,47779	0,49834	0,51984	0,54244
100	0,44242	0,46176	0,48167	0,50237	0,52405	0,54689
135	0,45165	0,47102	0,49116	0,51223	0,53438	0,55777

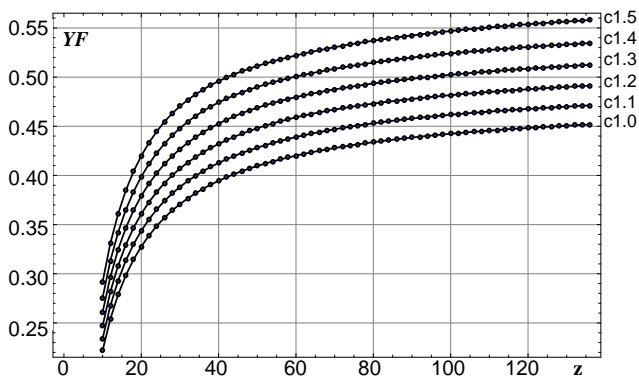


Fig. 11 Diagrama factor de forma YF : f(z,c)

En la fig. 11 se describe el algoritmo del procedimiento descrito para obtener el factor de forma YF.

```

// Definición de funciones y parámetros de referencia
 $\phi nLa = \tan[\alpha a 0] - inv\nu a$ 
 $riLa = rba / \cos[\phi nLa]$ 
// Ataque
 $yLs = Rtra[\phi a] \cos[inv\nu a - \beta tra[\phi a]]$ 
 $xsam = yLs \tan[inv\nu a - \beta tra[\phi a]]$ 
 $ysf[\phi a] := Rtra[\phi a] \cos[inv\nu a - \beta tra[\phi a]]$ 
 $xsamf[\phi a] := Rtra[\phi a] \sin[inv\nu a - \beta tra[\phi a]]$ 
// Respaldo
// thetaLimiteSuperior para el respaldo
// encontrar  $\theta Lsr$  como la raíz en la condición
 $yLs = Revr[\theta i] \cos[inv\nu r - \beta evr[\theta i]]$ ;  $\theta Lsr = \theta i$ 
 $xsrevm[\theta r] := Revr[\theta r] \sin[inv\nu r - \beta evr[\theta r]]$ 
// Limite intermedio, intersección tr con evr
 $Lintr = Revr[\theta or] \cos[inv\nu r - \beta evr[\theta or]]$ 
 $xstrm[\phi r] := Rtrr[\phi r] \cos[inv\nu r - \beta trr[\phi r]]$ 
// Limite inferior del respaldo en r para radio de salida en la base del
diente rOr
// Límite inferior del ataque en la condición
 $rOr = Rtra[\phi i]$ ;  $\phi Lia = \phi i$ 
// Límite inferior para el respaldo en la condición
 $rOr = Rtrr[\phi ir]$ ;  $\phi Lir = \phi ir$ 
// Definir paso de Phi, inicio de contador i, paso incremental n
 $n = \text{entero}$ ;  $i = 1$ ;  $incPhi = (\phi Lia - \phi a) / n$ 
Hacer para  $inPhi = \phi a$  hasta  $\phi Lia$ , con paso  $incPhi$ 
 $Scma = xsamf[inPhi]$ ,  $ys = ysf[inPhi]$ 
// Cálculo de los ángulos  $\theta$  (evolvente) y  $\phi$  (evolvente)
Si  $ys \geq yOr$  entonces
// encontrar  $\theta i$  como la raíz en la condición
 $ys = Revr[\theta i] \cos[inv\nu r - \beta evr[\theta i]]$ ;  $\theta sr = \theta i$ 
 $Scmr = xsrevm[\theta sr]$ 
Sino
// encontrar  $\phi i$  como la raíz en la condición
 $ys = Rtrr[\phi i] \cos[inv\nu r - \beta trr[\phi i]]$ ;  $\phi sr = \phi i$ 
 $Scmr = ys \tan[inv\nu r - \beta trr[\phi sr]]$ 
Fin Si
 $Sc = Scma + Scmr$ 
 $hcra = riLa - ys$ 
 $e = Scma - Sc / 2$ 
 $YF = [(Sc/m)^2 \cos[\phi a] / [(6/m)(hcra \cos[\phi nLa] - e \sin[\phi nLa])]$ 
// Guardar data necesaria
 $arregloSc[i] = Sc$ ;  $arregloys[i] = ys$ ;  $arregloScmr[i] = Scmr$ ;
 $arregloScma[i] = Scma$ ;  $arregloYFcc[i] = YFcc$ 
 $arreglohcr[i] = hcra$ ;  $arregloe[i] = e$ ;  $arreglophiLa[i] = phiLa$ ;
 $arregloriLa[i] = riLa$ ;  $arregloincPhi[i] = incPhi$ 
 $imax = i$ ;  $i++$ 
Fin Hacer
 $YF = \min[arregloYF[i]]$ 

```

Fig. 11. Algoritmo de cálculo del factor de forma YF

### 4 Factor geométrico de resistencia a la flexión J

Se toma para el cálculo del factor geométrico de resistencia J, la expresión de AGMA 908-B89, ec..

$$J = YF C_\psi / K f m_N \tag{28}$$

Donde los valores de las variables se fijan para el ángulo de hélice  $\psi = 0$ , coeficiente de hélice  $C_\psi = 1$  y el fac-

tor de distribución de carga  $m_N = 1$ , entonces  $J$  depende de  $YF$  y del factor de concentración de esfuerzos  $K_f$  a la altura de la sección crítica.

**Factor de concentración de esfuerzos  $K_f$ .** Se utiliza el factor de concentración de esfuerzos  $K_f$ , producto de los estudios foto elásticos de (Dolan y Broghamer, 1942).

$$K_f = H + (wfc/rfc)^L (wfc/hfc)^M \tag{29}$$

Donde  $wfc, rfc$  y  $hfc$  son el espesor, radio de curvatura y altura crítica en ese punto de la trocoide del lado del perfil de ataque. Excepto  $rfc$ , son valores conocidos, utilizados para la estimación de  $YF$ .

**Radio de curvatura crítico  $r_{fc}$ .** El radio de curvatura crítico  $r_{fc}$  se estima con, se evalúa para el valor del parámetro  $\phi_{sol}$ , correspondiente a la posición del arreglo donde el factor de forma  $YF$  es mínimo, lo cual permite calcular las derivadas necesarias.

$$rfc = \left[ \left( \frac{dYtr_a}{d\phi_{sol}} \right)^2 + \left( \frac{dXtr_a}{d\phi_{sol}} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} / Abs \left[ \frac{dXtr_a}{d\phi_{sol}} \frac{d^2Ytr_a}{d\phi_{sol}^2} - \frac{d^2Xtr_a}{d\phi_{sol}^2} \frac{dYtr_a}{d\phi_{sol}} \right] \tag{30}$$

Parámetros  $H, L, M$ . Según indican Dolan y Broghamer se tiene  $H, L$  y  $M$  en.

$$\begin{aligned} H &= 0.331 - 0.436\phi h_a \\ L &= 0.324 - 0.492\phi h_a \\ M &= 0.261 + 0.545\phi h_a \end{aligned} \tag{31}$$

Efectuados los cálculos de las ecuaciones y, se sustituye en y sucesivamente en, obteniendo finalmente los valores de  $J$ , que se muestran en la tabla 2 y en la fig. 12. En este caso módulo 1 y dimensiones normalizadas  $a/m=1, b/m=1.25, rf/m=0.25$ .

Tabla 2 Factor de resistencia a flexión  $J$  según  $z$  y  $c$

Z	c1,0	c1,1	c1,2	c1,3	c1,4	c1,5
10	0,18793	0,19614	0,20445	0,21328	0,22306	0,23311
12	0,20657	0,21519	0,22433	0,23356	0,24386	0,25433
14	0,22088	0,22937	0,23880	0,24881	0,25888	0,26961
15	0,22637	0,23542	0,24500	0,25456	0,26531	0,27614
17	0,23648	0,24518	0,25494	0,26464	0,27557	0,28654
20	0,24726	0,25671	0,26667	0,27653	0,28767	0,29878
21	0,25060	0,25950	0,26949	0,28006	0,29054	0,30242
26	0,26239	0,27208	0,28158	0,29231	0,30368	0,31576
30	0,26948	0,27859	0,28886	0,29971	0,31036	0,32592
35	0,27535	0,28520	0,29557	0,30571	0,31891	0,33571
40	0,28039	0,28963	0,30003	0,31099	0,32701	0,34451
50	0,28644	0,29644	0,30620	0,32052	0,33818	0,35689
55	0,28923	0,29863	0,30842	0,32448	0,34259	0,35889
60	0,29098	0,30043	0,31177	0,32814	0,34550	0,35918
70	0,29365	0,30320	0,31690	0,33386	0,34691	0,35933
80	0,29498	0,30458	0,32052	0,33474	0,34669	0,35911
90	0,29641	0,30675	0,32283	0,33433	0,34626	0,35867
100	0,29697	0,30920	0,32235	0,33381	0,34571	0,35811
135	0,29831	0,30940	0,32036	0,33170	0,34350	0,35582

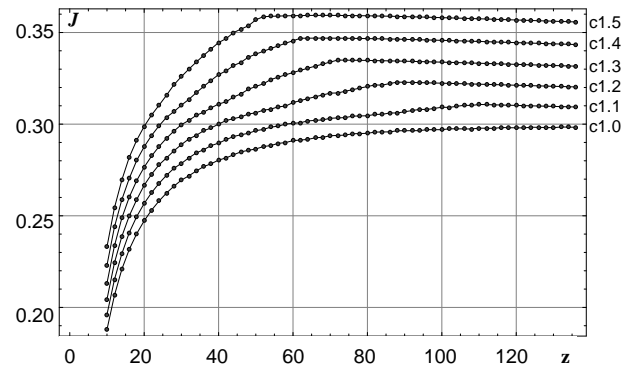


Fig.12. Factor de resistencia  $J : f(z, c)$

Adicionalmente se presentan las ecuaciones de regresión del factor  $J$  en función del número de dientes y el coeficiente de asimetría.

Para ser más preciso en el valor de este factor, se establecieron tres expresiones y de acuerdo al rango de número de dientes  $10 \leq z \leq 20, 21 \leq z \leq 54$  y  $55 \leq z \leq 135$ .

Para  $10 \leq z \leq 20$ , con  $R^2 = 0.997$ , confianza de 98.63% y un error absoluto de 0.002271

$$J = -0.10365 + 0.0230983 c + 0.0571001 c^2 + 0.0303886 z - 0.000633229 z^2 \tag{32}$$

Para  $21 \leq z \leq 54$ , con  $R^2 = 0.987$ , confianza de 98.86% y un error absoluto de 0.007854

$$J = 0.198554 - 0.09944 c + 0.08864 c^2 + 0.00354674 z - 0.0000300667 z^2 \tag{33}$$

Para  $55 \leq z \leq 135$ , con  $R^2=0.999$ , confianza de 99.31% y un error absoluto de 0.006184

$$J = 0.212511 + 0.105481 c + 0.0409919 c^2 + 0.0012735 z - 4.34743 \times 10^{-6} z^2 \tag{34}$$

## 5 Verificación

### 5.1 Verificación por observación directa de JAGMA vs. JModelo con $c=1$ .

En la tabla de la norma AGMA 908-B89 pp. 30, para perfiles simétricos  $c=1$ , con igual adendo ( $x_1=x_2=0$ ), ángulo de hélice  $\psi=0$ , carga en la punta, factor de profundidad 2.25m, radio de finalización de herramienta 0.25m, se toman los valores {0.24, 0.25, 0.26, 0.28, 0.29} del factor  $J$  correspondientes a los números de dientes  $z$  {21, 26, 35, 55, 135}. Se contrastan los valores JAGMA contra los valores

obtenidos JModelo con c=1 (fig. 13).

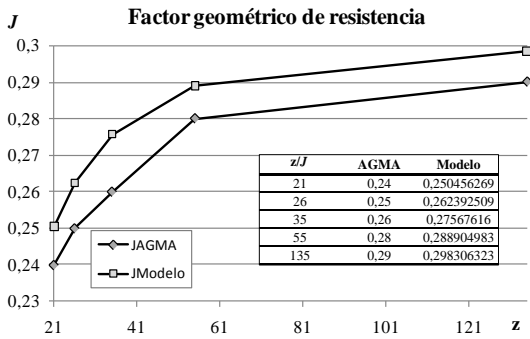


Fig. 13. Valores de JAGMA vs. JModelo

Se observa que para igual z, JAGMA es menor que JModelo, en una relación promedio de 4.29%

5.2 Verificación con herramienta CAE, mediante contraste de esfuerzos de flexión en la base según JModelo y JAGMA contra referencia.

Si se establece un valor arbitrario referencial de esfuerzo debido a la flexión en la base del diente y a partir de la misma se calcula la carga normal aplicada en la cabeza Ln, para los valores de J (AGMA y Modelo) y se utilizan posteriormente en un análisis estático lineal con una herramienta CAE (en este trabajo, SolidSimulation2010®), el esfuerzo máximo en la sección crítica de la base del diente, debe ser el arbitrario tomado inicialmente.

Los resultados de esfuerzo que más se aproximen al inicial arbitrario representan un mejor valor del coeficiente Utilizado. Se escoge como material de construcción al acero aleado SS mostrado en la tabla 3.

Se designa el valor medio de SY (310.21 MPa) como el esfuerzo de tracción máximo en la base del diente por el lado del ataque,  $\sigma = SY/2$ , b, m y el ángulo  $\phi Ln$  son constantes.

Tabla 3. Propiedades del acero SS (SolidSimulation2010)

Nombre de propiedad	Valor	Unidades
Módulo elástico	2.1e+05	MPa
Coefficiente de Poisson	0.28	NA
Módulo cortante	7.9e+04	MPa
Densidad	7700	kg/m^3
Límite de tracción	7.238e+002	MPa
Límite elástico	6.204e+002	MPa

Con los valores de las componentes de la carga normal  $Lnh = LnCos(\phi Ln) = \sigma FmJ$  y  $Lnv = LnhTan(\phi Ln)$ , se construye la tabla 4, donde se muestran los valores usados y los resultados de los esfuerzos de tracción debido a la flexión en la base del diente del lado del ataque para las fuerzas aplicadas, según JModelo y JAGMA.

Tabla 4. Comparación del modelo con AGMA

Variables	unidad	Z				
		21	26	35	55	135
F (ancho cara)	mm	4	4	4	4	4
m (módulo)	mm/diente	1	1	1	1	1
J modelo	--	0,251	0,262	0,275	0,289	0,298
Jagma	--	0,24	0,25	0,26	0,28	0,29
$\phi Ln$	$\phi$	29,16	27,76	26,10	24,16	21,84
s referencia (Sy/2)	MPa	310,21	310,21	310,21	310,21	310,21
Lnh Modelo	N	311,45	325,10	341,23	358,60	369,77
Lnh Modelo	N	173,81	171,12	167,19	160,85	148,22
Lnh Agma	N	297,80	310,21	322,62	347,44	359,84
Lnv Agma	N	166,19	163,28	158,07	155,84	144,24
s (MEF)Modelo	MPa	323,11	312,64	306,5	306,2	312,28
s (MEF)Agma	MPa	309,19	298,33	292,5	291,98	302,07

Los estudios efectuados fueron de tipo estático lineales, con malla sólida estándar de alta calidad, basada en curvatura, elementos tetraédricos parabólicos. En el caso c15z14 (c=1.5, z=14) fig. 14, se tiene un tamaño máximo de elemento de 0.219715 mm y tamaño mín. de elemento 1/3 del máximo. En general se tomó el mismo criterio, la herramienta ofrece la alternativa del tamaño del elemento promedio, ajustado al volumen del dominio, tras diferentes mallados y ejecuciones, se escogió un refinamiento de 80% el tamaño máximo y 33% el mínimo, que ofrece estabilidad en los resultados.

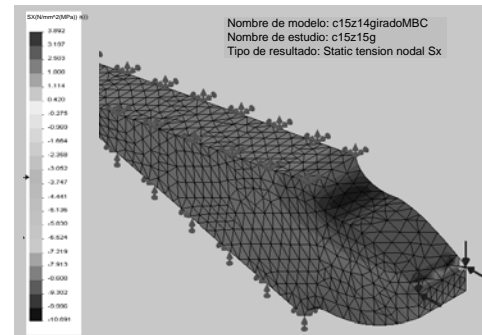


Fig. 14. Caso z=14, c=1.5

De la tabla 4, el promedio de los esfuerzos máximos-porflexión(MEF) son  $\bar{\sigma}Modelo=312.15(MPa)$  y  $\bar{\sigma}AGMA = 298.81(MPa)$  valores que indican una mejor aproximación relativa a la referencia SY/2 con los valores de carga normal estimados con JModelo (0.624%), respecto a los JAGMA (-3.67%), descripción gráfica en fig. 15.

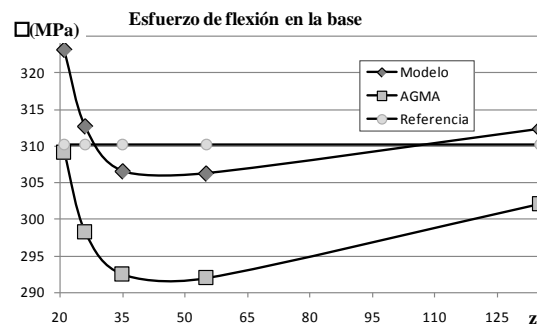


Fig.15. Comparación gráfica de modelos



5.3 Verificación con herramienta CAE, mediante contraste de esfuerzos de flexión en la base según ISO y Modelo

Se hace uso de los resultados de  $\sigma_{ISO}$  aportados por (González y col., 2002, tabla 2, pag. 65), donde los parámetros del engrane son  $\phi_h=20^\circ$ ,  $h_a/m=1$ ,  $r_f/m=0,3$ , carga lineal 200(N/mm), se estima  $\sigma_{Modelo}$  y  $\sigma_{MEF}$  como se muestra para los diferentes casos en la tabla 5 y fig. 16.

Tabla 5. Comparación del modelo con AGMA

m	z	f Ln(°)	s ISO (MPa)	s Modelo(MPa)	s MEF (MPa)
2	14	32,40	329,50	347,94	367,62
2	17	30,70	315,70	340,29	342,82
2	20	29,50	307,90	335,43	335,25
2	25	28,00	299,50	330,57	327,19
5	14	32,40	132,90	139,18	142,5
5	17	30,70	127,50	136,12	136,38
5	20	29,50	124,30	134,17	132,56
5	25	28,00	121,50	132,23	126,98
8	14	32,40	83,40	86,98	89,463
8	17	30,70	78,90	85,07	85,901
8	20	29,50	77,90	83,86	83,012
8	25	28,00	76,00	82,64	78,265

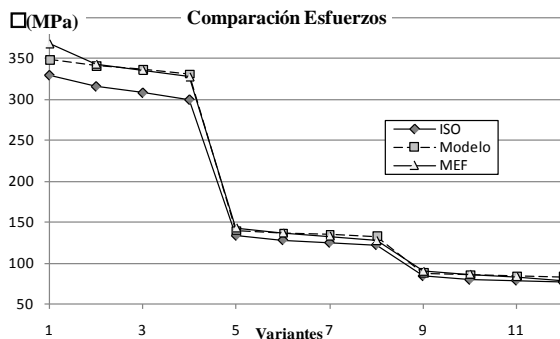


Fig.16. Comparación gráfica  $\sigma_{ISO}$ , Modelo, MEF

Se observa en las tres variantes de módulo m: {2, 5, 8} una mejor aproximación de la raíz del error medio cuadrático (REMC) de  $\sigma_{Modelo}$  6.28 (MPa) frente a  $\sigma_{ISO}$  18.46(MPa), o en términos absolutos  $\sigma_{Modelo}$ (2.82%) y  $\sigma_{ISO}$ (7.14%) respecto al esfuerzo estimado con el MEF.

Lo cual indica que al utilizar el factor geométrico de resistencia  $J_{Modelo}$  se consiguen mejores estimaciones del esfuerzo en la base, al tomar como referencia los resultados del MEF.

5.4 Verificación por contraste de esfuerzos de flexión en la base según  $J_{Modelo}$  y CAE.

Se generan los dientes virtuales, para  $z = \{14, 16, 18, 26, 35, 55, 135\}$ ,  $x=0.0$ ,  $c=\{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$  y los datos considerados en el epígrafe 5.1, el espesor y carga por unidad de longitud es unitario.

Esta verificación se realiza por comparación de los esfuerzos de tracción debidos a la flexión en la base del diente ec., obtenidos según el modelo propuesto, contra los resul-

tados producidos por la herramienta CAE, los cuales se toman como referencia.

$$\sigma = LnCos(\phi Ln) / (FmJ_{Modelo}) \tag{35}$$

Los resultados del análisis entre los valores del esfuerzo por flexión en la base y los del modelo se indican en la fig. 17, el factor de correlación R es de 0.956347 entre  $\sigma_{Modelo}$  y  $\sigma_{CAE}$ , los valores promedio de las desviaciones relativas  $(\sigma_{Modelo}-\sigma_{CAE})/\sigma_{CAE}$ , resultan en -3.93%.

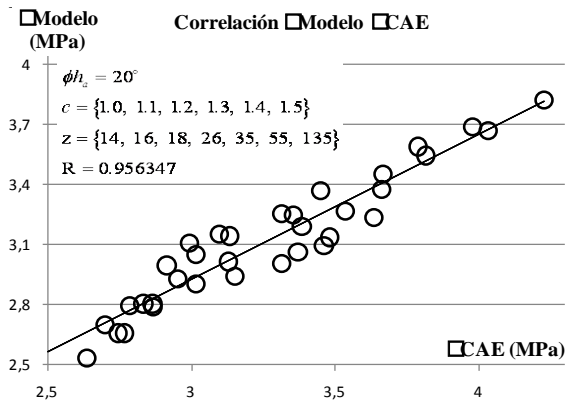


Fig. 17. Esfuerzos modelo contra CAE

5.5 Comparación con resultados en estudios de engranes asimétricos

5.5.1. En la tabla 1, pag. 840 de (Senthil y col., 2008), el esfuerzo máximo por flexión es  $\sigma_{Senthil}=29.98$ (MPa), los parámetros utilizados son  $c=1.52$ ,  $z=16$ ,  $m=1$ ,  $Ln=10N/mm$ ,  $F=1$ (mm),  $x/m=0.21$ ,  $\phi_h=20^\circ$ . Se utilizan dichos valores como los datos iniciales en el modelo descrito en este trabajo, se consigue  $\sigma_{Modelo}=29.549$ (MPa). La diferencia relativa a  $\sigma_{Senthil}$ , es -1.44%.

5.5.2. En la tabla 1, pag. 44 de (Fetvaci e Imrak, 2008), se toman los resultados  $\sigma_{Fetvaci}\{158.732, 150.332, 144.928\}$ (MPa) para  $c\{0.75, 0.9, 1\}$ , con  $z=24$ ,  $m=2.5$ ,  $Ln=100$ (N/mm),  $F=1$ (mm),  $\phi_h=20^\circ$ . Se utiliza el modelo de este trabajo, calculando el esfuerzo por flexión máximo en la base del diente asimétrico con los parámetros de Fetvaci, resulta  $\sigma_{Modelo}\{150.721, 143.304, 138.803\}$ (MPa).

La diferencia relativa a  $\sigma_{Fetvaci}$  es  $\{-5.05, -4.67, -4.23\}\%$ , en este caso el ángulo de presión del perfil de respaldo es menor que el de ataque.

6 Usos de J, consecuencias de la asimetría

Disminución de peso y tamaño. Con los resultados de  $J_{Modelo}$  (tabla 2, fig. 12), se evalúa el esfuerzo de tracción máximo debido a la flexión para los casos considerados, se

crea el diagrama mostrado en la fig. 18.

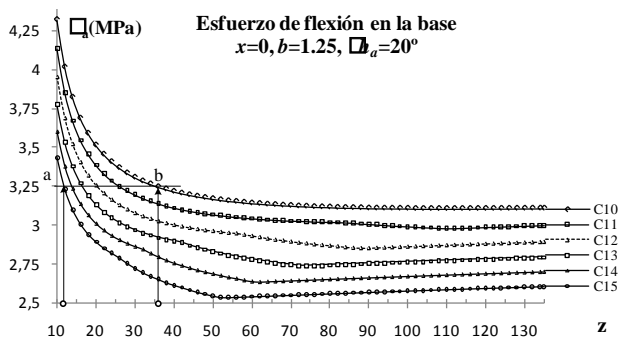


Fig. 18. Esfuerzos con módulo, carga y espesor unitarios

A mayor coeficiente de asimetría, el esfuerzo por flexión en la base por el lado del ataque, es menor para igual número de dientes, lo cual evidencia la utilidad que ofrece el aumento de asimetría para transmitir potencia con engranes de menor número de dientes.

Si se fija como el esfuerzo de flexión máximo, un valor por ejemplo de 3.25 (MPa), puede observarse en la figura 18 la disminución de z a medida que aumenta c, línea lba, la relación de dientes entre el punto b (c=1, z=36) y el punto a (c=1.5, z=12), es  $z_b / z_a = 36 / 12 = 3$ .

El diámetro primitivo varía proporcionalmente con z, como la distancia entre centros es la suma de los radios primitivos rp1 (piñón) y rp2 (rueda), al asumir una relación de transmisión de 1, para las ruedas acopladas con la misma capacidad portante, la transmisión (piñón rueda) puede ser 3 veces más pequeña, simplemente al modificar la asimetría de 1 a 1.5 veces. La consecuencia inmediata es la disminución de volumen y peso en la transmisión.

Cálculo analítico de esfuerzos máximos por flexión  $\sigma_a$ , en la base del diente. Por otra parte, con la lectura de  $\sigma_a$  de la fig. 18, puede estimarse el esfuerzo máximo  $\sigma'$  en la base para otros valores de módulo m', espesor de cara F' y carga normal Ln' (cuando se cumple  $x=0$ ,  $a/m=1$ ,  $b/m=1.25$ ,  $rf/m=0.25$ ), basándose en la ec.

$$\sigma' = (Ln'/m'F')\sigma \quad (36)$$

De se obtienen  $\sigma' = (Ln'/m'F')(Cos(\phi Ln)/JModelo)$

y  $Cos(\phi Ln)/JModelo = \sigma mF/Ln$ , además en la construcción del diagrama de "Esfuerzo de flexión en la base" (fig. 18),  $m=1$ (mm/diente),  $F=1$ (mm),  $Ln=1$ (N/mm), al sustituir  $en\sigma'$ , se obtiene la ec.

## 7 Conclusiones

Se establece un nuevo procedimiento de estimación de

los valores de YF y J para cualquier caso de geometría de engranes cilíndricos rectos con perfil de evolvente y trocoide, asimétricos, basado en la medición directa de las alturas y secciones críticas del diente.

Para el estudio de los engranes asimétricos, todos los parámetros geométricos pueden obtenerse con los programas de modelado desarrollados en Wolfram Mathematica. Para obtener el modelo 2D e implícitamente el modelo 3D, puede utilizarse los programas desarrollados en VBasic para Mechanical Desktop, que permiten la rápida representación de los engranes asimétricos. Para el análisis con el MEF, la herramienta SolidSimulation, brinda un buen entorno por la ventaja de edición inmediata entre el modelo CAD y el análisis por elementos finitos.

Se aportan valores tabulados y gráficos de YF y J para casos de asimetría entre 1.0 y 1.5 y número de dientes entre 10 y 135, así como ecuaciones aproximadas de fácil utilización del factor geométrico de resistencia J.

Para igual número de dientes, J<sub>A</sub> es menor que J<sub>Modelo</sub>, en 4.29% promedio, en el caso c=1.

Existe mejor acercamiento a los esfuerzos de tracción debidos a la flexión en la base del diente de los valores calculados con J<sub>Modelo</sub>(0.624%) respecto a J<sub>A</sub> (3.67%).

En la comparación de resultados entre los esfuerzos estimados según ISO y los del modelo, contra los resultados del MEF, el promedio de la raíz de los errores cuadráticos absolutos es menor para el modelo (2.82%) ante ISO (7.14%), lo cual reafirma la buena aproximación del factor geométrico de resistencia J<sub>del modelo</sub>, utilizado para el cálculo de las cargas en el análisis por el MEF.

Mediante el aumento del coeficiente de asimetría, en igualdad de condiciones de carga normal, se puede reducir el tamaño del engrane utilizado hasta 3 veces con variación de asimetría desde c=1.0 hasta c=1.5.

Para engranes con módulos, espesores, cargas en la punta diferentes de 1 y con  $x=0$ ,  $a/m=1$ ,  $b/m=1.25$ ,  $rf/m=0.25$ , se ofrece una herramienta de estimación del esfuerzo máximo  $\sigma'$  en la base, basada en la lectura gráfica de  $\sigma$ .

Los esfuerzos en la base del diente asimétrico determinados con los valores del coeficiente geométrico de resistencia del modelo, presentan una buena correlación (R=0.9563) respecto a los obtenidos por el MEF, indica que los mismos son representativos y confiables en las estimaciones analíticas de los esfuerzos a flexión en la base del diente cilíndrico, recto, asimétrico con perfil de evolvente trocoide. Las desviaciones relativas promedio en los casos seleccionados respecto a los resultados con el MEF, son de -3.93%.

En las comparaciones con otros autores, con estudios asimétricos, se consigue una diferencia relativa de los esfuerzos por flexión en la base entre -1.44% y -5.03%, respecto a los resultados de los mismos.

Tabla 6. Nomenclatura

a, b	Adendo, dedodiente (mm)
c	Coefficiente de asimetría
$C_{\psi}$	Coefficiente de hélice
e	Excentricidad (mm)
F	Espesor de engrane (mm)
$h_a^{cr}$	Altura crítica ataque (mm)
$h_{ao}$	Altura de adendo de herramienta (mm)
$inv\psi_{a/r}$	Angulo polar de punta (ataque/respaldo)
J	Factor geométrico de resistencia
$K_f$	Factor concentración de esfuerzos
$L_n$	Carga normal en cabeza de diente (N)
$m_N$	Factor de distribución de carga
ro	Radio de salida de la trocoide (mm)
$Rb_{a/r}$	Radio básico (ataque/respaldo) (mm)
re	Radio de cabeza del diente (mm)
$R^2$	Coefficiente de determinación
$Rev_{a/r}[\theta]$	Radio polar evolvente(ataque/respaldo)(mm)
$ri_a^{Ln}$	Radio intersección carga/eje medio (mm)
$Rtr_{a/r}[\varphi]$	Radio polar trocoide(ataque/respaldo) (mm)
rf	Radio de finalización de herramienta (mm)
rp	Radio de paso de la rueda dentada (mm)
rt	Radio de la punta del diente (mm)
Sc	Sección crítica (mm <sup>2</sup> )
$Sc_a^m$	Sección crítica media ataque (mm <sup>2</sup> )
$Sc_r^m$	Sección crítica media respaldo (mm <sup>2</sup> )
x	Coefficiente de corrección (mm)
YF	Factor geométrico de forma
ys	Altura sección crítica (mm)
$\alpha_a$	Angulo de cabeza, lado de ataque
$\varphi$	Angulo paramétrico de la trocoide
$\theta$	Angulo paramétrico de la evolvente
$\psi_{a/r}$	Angulo de punta (ataque, respaldo)
$\beta ev_{a/r}[\theta]$	Angulo polar evolvente(ataque/respaldo)
$\phi h_{a/r}$	Angulo de presión (ataque/respaldo)
$\phi Ln_a$	Angulo de carga normal en lado ataque
$\beta tr_{a/r}[\varphi]$	Angulo polar trocoide(ataque/respaldo)

**Referencias**

AGMA 908-B89, 1989, Information sheet, geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth, USA.

Buckingham Earle, 1949, Analytical Mechanics of Gears, Dover Publications Inc., New York.

Cárdenas J, Hernández D, Moya J, 2010, Generación de ruedas dentadas asimétricas de perfil evolvente trocoide, VI Seminario Euro Latinoamericano de Sistemas de Ingeniería, 15 Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura, CUJAE La Habana, Cuba.

Cavdar K, Karpát F, Babalik F, 2005, Computer aided analysis of bending strength of involute spur gears with asymmetric profile, ASME J. Mech. Des. 127, pp. 477–484.

Deng G, Tsutomu N, Katsumi I, 2003, Bending load capacity enhancement using an asymmetric tooth profile, JSME Int. J. 46, pp. 1171–1176.

Dolan T and Broghamer Edward L, 1942, A photoelastic study of stresses in gear tooth fillets, University of Illinois, Engineering Experiment Station Bulletin N° 31, Series No. 335A.

Dudley D, 1973, Diseño, manufactura y aplicación de engranajes, Manual de engranajes, 1ra. ed. Español, Edit. Continental, S. A., México.

Fetvacı C and Imrak E, 2008, Mathematical model of a spur gear with asymmetric involute teeth and its cutting simulation. Mechanics Based Design of Structures and Machines, Taylor & Francis Group, 36: 34–46, 2008.

Flavia C, Tisan V, Dascalescu A, 2007, Modelling of the asymmetric gears using applications in Matlab and Autolisp, Annals of the North University of Baia Mare, Fascicle of Management and Technological Engineering, Volume VI (XVI), Romania.

Fuentes A, 1995, Modelo de cálculo a flexión de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente, Tesis Doctoral UNED, España.

González R, Fernández F, García M, 2002, El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes, Revista Ingeniería Mecánica No 1 ISPJAE Ciudad de la Habana Cuba, pp. 55-67.

Hernández D, 2006, Método para el diseño de engranes cilíndricos con dientes rectos de perfil de evolvente basado en el indicador del grado de socavado, Tesis Doctoral Universidad de Holguín, Cuba.

ISO 6336-3, 1996, Calculation of load capacity of spur and helical gears -Part 3: Calculation of tooth bending strength. Geneve, Switzerland.

Kapelevich L, Kleiss E, 2002, Direct gear design for spur and helical involute gears, Gear Technol. (9/10), pp. 29–35.

Kapelevich Alexander, Shekhtman, Yuriy V, 2003, Direct gear design: bending stress minimization, Gear Technol. (September/October), pp. 44–47.

Litvin L, Lian Q, Kapelevich A, 2000, Asymmetric modified gear drives: reduction of noise localization of contact simulation of meshing and stress analysis, Elsevier Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 188, pp. 363–390.

Litvin Faydor, Fuentes A, 2004, Gear geometry and applied theory, Cambridge University Press. New York, second edition.

Moya J, Velásquez A, Goytisoalo A, Machado. S, 2007, Determinación del factor de forma para engranajes de dientes rectos asimétricos, 8° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Cusco, Perú.

Senthil V, Muni V, Muthuveerappan G, 2008, Optimization of asymmetric spur gear drives to improve the bending load capacity, Elsevier, ScienceDirect, Mechanism and Machine Theory 43, pp. 829–858.

Yang Shyue Cheng, 2005, Mathematical model of a helical gear with asymmetric involute teeth and its analysis, Int. J. Adv. Manufact. Technol. 26, pp. 448–456.

**Recibido:** 09 de junio de 2010  
**Revisado:** 23 de septiembre de 2011

