

# Desarrollo de un algoritmo para generar redes apolonias

## An algorithm to generate Apollonian networks

Moreno Meccia, Jorge A.\* y Cosenza, Mario G.

Grupo de Caos y Sistemas Complejos,

Centro de Física Fundamental,

Facultad de Ciencias,

Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela

\*morenojorge@ula.ve

### Resumen

Las redes apolonias han sido objeto de mucha atención recientemente, debido a que en ellas coexisten varias propiedades que se encuentran en otros modelos relevantes de redes complejas y en diversos sistemas reales: ellas son redes de pequeño mundo y libres de escala, además de poseer propiedades jerárquicas y geometría fractal. En el presente trabajo presentamos un algoritmo propio, conceptualmente simple y computacionalmente eficiente, para generar redes apolonias. Nuestro algoritmo se basa en un método de correlación de etiquetas entre los nodos de la red, que permite obtener la tabla de vecinos para cualquier nivel de construcción. Este algoritmo está implementado de una manera que permite la investigación de procesos dinámicos sobre redes apolonias y, en particular, estudiar la influencia de las propiedades topológicas de estas redes en los comportamientos colectivos emergentes.

**Palabras Clave:** Redes apolonias, redes complejas, algoritmos, grafos.

### Abstract

Recently, Apollonian networks have received much attention because they simultaneously exhibit several properties found in other different networks; they are small worlds, scale-free, hierarchical, and possess fractal geometry. In this work we present an original algorithm, conceptually simple and computationally efficient, for generating Apollonian networks. Our algorithm is based on a method of correlation between the labels of the nodes in the network; this allows us to obtain the table of neighbors at any level of construction. The algorithm is implemented in such a way that facilitates the investigation of diverse dynamical processes on Apollonian networks and, in particular, it allows to study the influence of the topological properties of these networks on the emergent collective behaviors.

**Keywords:** Apollonian networks, complex networks, algorithms, graphs.

## 1 Introducción.

En años recientes la comunidad científica se ha interesado en el estudio de diversos sistemas reales (naturales o artificiales) que pueden ser representados como redes, mediante las interconexiones entre sus elementos, siendo estas de carácter físico, biológico, social, tecnológico o de información. Estudios empíricos han mostrado que la mayoría de estas redes poseen propiedades en común, independientemente de su naturaleza, dando lugar al concepto de *redes complejas*. Por nombrar algunos ejemplos, se tienen las redes de amistades, redes de propagación de epidemias, redes predador-presa entre especies, redes de neuronas, redes de interacción de proteínas, redes de factores primos, redes de rutas aéreas, redes de suministro eléctrico, Internet y la World Wide Web (Dorogovtsev *et al.*, 2002; Albert *et al.*, 2002; Newman, 2003).

Las redes complejas no pueden ser descritas ni por

redes regulares ni por redes aleatorias, ya que poseen propiedades topológicas no triviales, entre las que destacan: una *longitud característica* pequeña, un alto *coeficiente de agrupamiento*, una *distribución de grado* con ley de potencia (Newman, 2002). Por esta razón, paralelamente al estudio de redes se han desarrollado numerosos modelos de grafos que permiten explicar de algún modo la emergencia de propiedades de las redes complejas a partir de simples reglas en la dinámica de las conexiones entre los nodos, buscando descubrir los principios y algoritmos que pudieran gobernar sus comportamientos y topologías. Han sido de crucial importancia los modelos de redes de pequeño mundo (Watts *et al.*, 1998), redes libre de escala (Barabási *et al.*, 1999) y redes deterministas (Dorogovtsev *et al.*, 2002b; Lind *et al.*, 2004). En particular, las redes apolonias, introducidas por Andrade *et al.* (2005) y también por Doye y Massen (2005), presentan varias propiedades de estos modelos al mismo tiempo, por lo que han recibido mu-

cha atención desde su aparición (Pellegrini *et al.*, 2007; Schwämmle *et al.*, 2007; Xu *et al.*, 2008; Araújo *et al.*, 2010).

## 2 Redes apolonias.

La topología de la red apolonia se basa en la figura geométrica del fractal de Apolonio (de donde proviene su nombre), en el que tres círculos idénticos se tocan unos a otros, y el espacio vacío que queda entre ellos es llenado por otro círculo que toca a estos tres, dejando de nuevo otros espacios similares pero mucho más pequeños, los cuales son llenados nuevamente de la misma manera, tal y como se muestra en la Fig. 1.

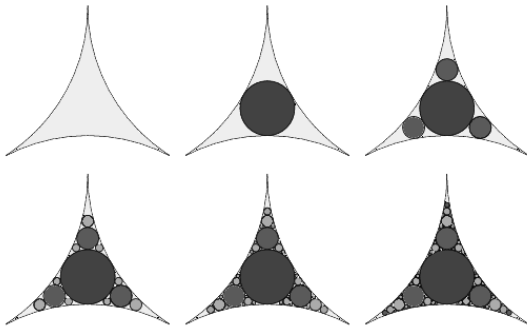


Fig. 1. Obtención del fractal de Apolonio a través del empaquetamiento de círculos. Aquellos círculos pertenecientes al mismo nivel o generación están pintados con el mismo tono.

Conectando los centros de los círculos que se tocan se obtiene una red que físicamente corresponde a la red de fuerzas o red de contacto de dicho empaquetamiento de círculos. Las redes resultantes de este procedimiento son las llamadas redes apolonias, donde cada círculo representa un nodo en la red, quedando enlazados aquellos nodos cuyos círculos correspondientes sean tangentes entre sí (Andrade *et al.*, 2005), obteniéndose un grafo como el mostrado en la Fig. 2.

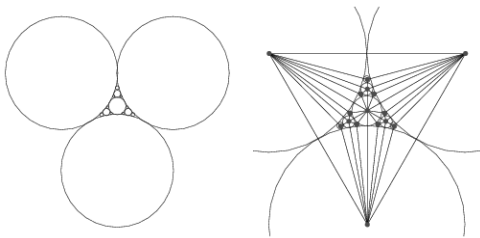


Fig. 2. Esquema de red apolonia. Los centros de los círculos (nodos) son representados con puntos, y los contactos entre círculos (enlaces) con líneas.

Para el estudio y uso de estas redes debe considerarse un número finito de generaciones de círculos que son añadidos. Por otro lado, el número de nodos incluidos

deben ir completando exactamente los niveles de la red, según las reglas del empaquetamiento de círculos. Se denomina *nivel de construcción*  $L$  al número de niveles o generaciones de nodos que se incluyen en la red. Este parámetro define la topología de la red, en cuanto al número de nodos y enlaces existentes.

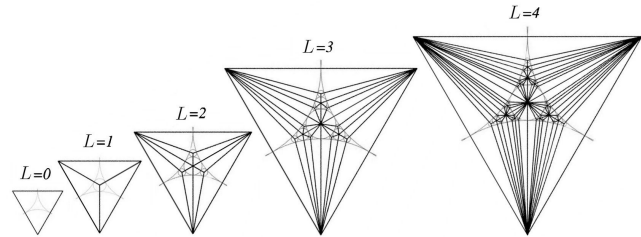


Fig. 3. Redes apolonias para los primeros cinco niveles de construcción  $L$ .

La Fig. 3 muestra la topología correspondiente a una red apolonia para cada nivel de construcción  $L$ . A medida que se agregan más niveles no sólo se crean nuevos nodos sino también nuevos enlaces con los nodos ya existentes. El nivel cero de la red consiste en los tres círculos iniciales (a los que llamaremos *nodos externos*); al añadir el nodo central la red estará en el nivel de construcción uno ( $L = 1$ ); en el nivel de construcción dos ( $L = 2$ ) se incluyen los tres nodos de la próxima generación, y así sucesivamente. El número total de nodos existentes en una red apolonia a un nivel de construcción  $L$  vendrá dado por (Andrade *et al.*, 2005):

$$N_L = 3 + \frac{3^L - 1}{2} = \frac{3^L + 5}{2}. \quad (1)$$

## 3 Algoritmo para generar redes apolonias.

En esta sección se presenta nuestro algoritmo para generar redes apolonias de dimensión dos, que consiste en la obtención de la *tabla de vecinos* (lista de adyacencia) correspondiente a su topología, la cual contiene toda la información sobre los nodos y los enlaces existentes entre ellos. Para lograr este objetivo definimos previamente un método para identificar y etiquetar todos los nodos de la red, que permite y facilita el proceso de encontrar los vecinos de cada uno de ellos y de este modo establecer los enlaces correspondientes. Este algoritmo es general para cualquier nivel de construcción de la red.

### 3.1 Numeración y etiquetado de los nodos.

Usualmente, para el estudio, tratamiento y construcción de grafos, resulta muy útil recurrir a la asignación de etiquetas numéricas o alfanuméricas a los nodos y/o enlaces presentes en los grafos. Zhang *et al.* (2008) pro-

ponen una forma de etiquetar los nodos en redes apolonias. Sin embargo, este procedimiento está orientado hacia la obtención de las distancias mínimas entre los nodos, y no resulta sencilla la identificación de los vecinos de dichos nodos. Dado que las redes apolonias poseen una estructura base de árbol ternario (Fig. 4-a), adaptaremos la forma utilizada por Cosenza y Tucci (2001) para etiquetar y numerar nodos en árboles, al caso de las redes apolonias. Con esta finalidad se definen tres líneas de referencia numeradas, que se usan como guía para la formación de las etiquetas, como se ilustra en la Fig. 4-b. Este patrón se repite autosimilarmente en cada uno de los siguientes niveles.

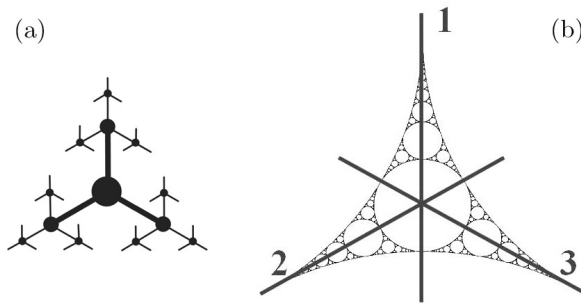


Fig. 4. (a) Árbol ternario como base en las redes apolonias. (b) Líneas de referencia para el etiquetado de los nodos.

Podemos establecer un parentesco figurativo entre nodos, basado en la topología de árbol. Diremos que cada elemento de la red posee un padre (vecino del nivel anterior al que pertenece) y tres hijos (vecinos del siguiente nivel). Así mismo se puede extender la idea con todos los niveles anteriores (abuelo y demás ancestros) y niveles siguientes (nietos y demás descendientes). Se inicia el proceso de etiquetado con el nodo central, al cual se le asignará la etiqueta "0". De aquí en adelante, las siguientes generaciones "arrastran" las etiquetas de sus padres, añadiendo un último dígito según corresponda con las líneas de referencia, de modo que los nodos heredan las etiquetas de sus antecesores. De esta manera, las etiquetas de los nodos irán adquiriendo más dígitos a medida que pertenezcan a niveles superiores, siendo las más largas aquellas del último nivel. Este proceso se ilustra en la Fig. 5. Este esquema permite que, partiendo de la etiqueta de un nodo cualquiera, podamos obtener las etiquetas de sus ancestros, simplemente eliminando un dígito por cada generación anterior. Igualmente, las etiquetas de los descendientes de un nodo podrán obtenerse añadiendo al final un dígito por cada generación siguiente. Los tres nodos externos pertenecientes al nivel inicial poseerán etiquetas especiales denotadas por "-1", "-2" y "-3" según estén ubicados sobre las líneas de referencia.

Las etiquetas podrán representarse con un arreglo  $V_i$ , que posee  $l_i$  dígitos; número equivalente al nivel o generación donde se encuentre el nodo  $i$  (los niveles se

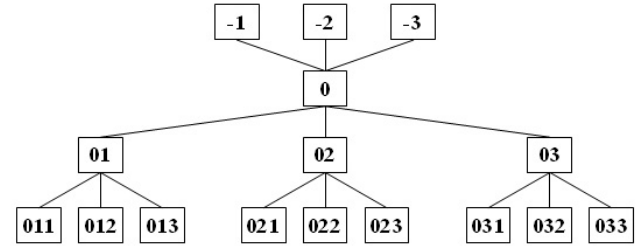


Fig. 5. Esquema del etiquetado de nodos en redes apolonias correspondiente a los primeros niveles.

enumeran partiendo de cero para el nivel inicial). Cada dígito de una etiqueta podrá tomar solamente los valores "1", "2" o "3", a excepción del primer dígito que será siempre "0" para todos los nodos. Para referirnos al dígito de una etiqueta que se encuentra en la posición  $p$  del arreglo utilizaremos la nomenclatura  $V_i[p]$ ; mientras que para referirnos a la cadena de los primeros  $p$  dígitos de la etiqueta se utilizará la notación  $V_i\{1..p\}$ . Esta forma de etiquetar los nodos no sólo contiene información sobre la traza generacional de cada uno de ellos, sino también de su ubicación espacial en la red, por lo que será muy útil al momento de encontrar la vecindad de todos los nodos.

Existe una necesidad matemática y computacional, que obliga a que los nodos, además de poseer etiquetas, se encuentren enumerados, es decir, que a cada uno de ellos le corresponda un número natural único, con el que serán representados. De este modo, la red podrá recorrerse con un índice  $i : 0, 1, 2, \dots, N_L - 1$ . Se requiere entonces que exista una relación entre la etiqueta y el índice de los nodos, de manera que pueda obtenerse uno a partir del otro unívocamente. Haremos uso de la notación  $i = \text{Num}(V_i)$ , para referirnos a la función que permite obtener el índice  $i$  de un nodo a partir de su etiqueta  $V_i$ . Los tres nodos externos serán los primeros en numerarse con los índices 0, 1 y 2, respectivamente para "-1", "-2" y "-3". Para el resto de los nodos, la función  $\text{Num}(V_i)$  consistirá en tomar la etiqueta  $V_i$  como una representación numérica en sistema de base tres, donde el dígito final (derecha) es el menos significativo, y obtener el equivalente decimal; el número resultante más la adición de tres unidades (correspondientes a los nodos externos) será el índice del nodo con dicha etiqueta. Aunque el dígito "0" siempre está en la posición más significativa ( $V[1]$ ), no contribuye con el cálculo de los índices por anular siempre su producto, pero si juega un papel en la obtención de vecinos de los nodos.

### 3.2 Obtención de la tabla de vecinos o lista de adyacencia.

Como se dijo anteriormente, una vez ubicados e identificados los nodos en la red, se procede a establecer los

enlaces que corresponden entre ellos, haciendo uso de sus etiquetas. Es necesario recalcar que ningún par de círculos pertenecientes a una misma generación se encuentran en contacto, por lo que ningún par de nodos del mismo nivel en la red estarán enlazados. Por otro lado, cada nodo tendrá sólo tres vecinos de niveles anteriores al suyo (que denominaremos *vecinos mayores*), correspondientes a los tres círculos con los que cada elemento es tangente en el momento de su inserción; el resto de sus vecinos pertenecerán a niveles posteriores. Tomando en cuenta esta información podemos simplificar el problema: hallando exclusivamente los tres vecinos mayores de cada nodo es posible establecer todos los enlaces existentes en la red. A medida que los nodos de los últimos niveles se enlazan con sus vecinos mayores, se van completando las listas de vecinos de los primeros nodos. Así, al recorrer toda la red se habrán creado todas las conexiones correspondientes con el nivel de construcción elegido. De esta manera, la obtención de la tabla de vecinos para una red apolonia se puede resumir en la obtención de los tres vecinos mayores para todos sus nodos. En lo que sigue, presentaremos una fórmula general que permite hallar los vecinos mayores de los nodos, estructurada en un algoritmo que permitirá crear la tabla de vecinos para cualquier nivel de construcción de la red.

Los tres nodos del nivel inicial son casos particulares que no poseen vecinos mayores, sino tienen en cambio dos vecinos hermanos, siendo estos los otros dos del mismo nivel. Por otro lado, estos tres nodos son los vecinos mayores del nodo central. Para el resto de los nodos, los vecinos superiores están conformados por tres de sus ancestros. Sin embargo, no se puede determinar de manera directa a qué generaciones pertenecen tales vecinos, ya que pudieran pertenecer a cualquiera de los niveles anteriores, incluyendo el nivel cero. Con este fin se hace uso de las etiquetas de los nodos. Si los vecinos mayores de un nodo son a la vez ancestros de él, quiere decir que sus etiquetas pueden obtenerse de la suya propia.

A partir del tercer nivel, los nodos tendrán como primer vecino mayor a su propio padre (“vecino padre”). Es decir, para todo nodo  $i \geq 4$ , se obtendrá el índice correspondiente a la etiqueta  $V_i\{1..l_i - 1\}$  y se asignará como su primer vecino. Luego, se debe determinar cuáles otros de sus ancestros están en contacto con él. En el empaquetamiento de círculos de Apolonio, aquellos elementos que repiten la línea de descendencia que su padre, quedarán ubicados espacialmente en dirección opuesta al respectivo abuelo, por lo que no entran en contacto con este último. Así mismo sucede con ancestros anteriores. Esto se refleja en la repetición de dígitos en las etiquetas de los nodos. De este modo, un nodo será vecino de uno de sus ancestros, si el dígito del hijo de ese ancestro, no se encuentra en ninguna de las posiciones siguientes de la etiqueta de dicho nodo (incluyendo al dígito final). En términos generales, el ancestro cuya etiqueta sea  $V_i\{1..p\}$  (con  $p < l_i$ ) será vecino de  $i$  si

$V_i[p+1] \neq V_i[k]$ , para  $k = p+2, p+3, \dots, l_i - 1, l_i$ . En la búsqueda se repite este proceso tomando uno a uno, y en orden ascendente, los ancestros del nodo (partiendo del respectivo abuelo) hasta conseguir los dos vecinos restantes. Para obtener los índices de estos vecinos se utiliza la función  $\text{Num}(V_i\{1..p\})$ . Este procedimiento permite hallar los “vecinos internos” de un nodo, es decir, aquellos que puedan derivarse de su propia etiqueta, donde podrá estar incluido el nodo central más no aquellos del nivel inicial, por lo que no necesariamente se obtienen los tres vecinos mayores.

Si se llega al final de la cadena y no se han hallado los tres vecinos, quiere decir que los faltantes serán “vecinos externos”, es decir, nodos del nivel cero. En caso que falte sólo un vecino mayor, éste será el nodo externo posicionado sobre la línea de referencia cuyo número sea diferente a los dos primeros dígitos significativos de la cadena del nodo, siendo estos  $V_i[2]$  y  $V_i[3]$  (ya que  $V_i[1]$  corresponde al dígito “0”). El último caso es cuando siguen faltando dos vecinos mayores luego de recorrer toda la etiqueta, y estos serán los dos nodos externos cuyos números no coincidan con el primer dígito significativo de la etiqueta, es decir, con  $V_i[2]$ . Este último caso comprende a todos aquellos nodos ubicados justo sobre las líneas de referencias principales, cuyas etiquetas constan de un mismo número repetido en todos sus dígitos (salvo el cero “0” en  $V_i[1]$ ). Los índices de los vecinos externos pueden obtenerse directamente restando una unidad a los números de las líneas de referencia correspondientes a dichos nodos. Si los tres vecinos mayores del nodo fueron encontrados dentro de la cadena de etiqueta en la primera fase, entonces ningún vecino externo es buscado.

Este proceso es resumido en el algoritmo –TablaVecinos( $L$ )–, presentado en la Fig. 6, en el cual, en primer lugar se establecen los enlaces correspondientes a los nodos de los dos primeros niveles de la red, cuyos índices son 0, 1, 2, 3. Para el resto de los nodos, se encuentra los tres vecinos mayores del nodo  $i$  a partir de su etiqueta  $V_i$ , y se obtienen sus índices respectivos  $m_j$ , con  $j = 1, 2, 3$ . Para el caso de los vecinos externos, se obtiene el número de línea  $e$  correspondiente a cada uno, mediante operaciones aritméticas con los primeros dígitos de la etiqueta del nodo. La función  $\text{Enlace}(i, m_j)$  crea los enlaces entre el nodo  $i$  y sus vecinos mayores  $m_j$  obtenidos previamente. En el caso de redes apolonia simétricas es necesario que los enlaces entre los nodos sean bidireccionales. El parámetro  $L$  define el número de nodos  $N_L$  que se crearán en la red, siguiendo la expresión de la Ecuación 1.

#### 4 Conclusiones.

Hemos desarrollado un algoritmo propio y conceptualmente simple para generar redes apolonia a cualquier

**TablaVecinos(L)**

```

# nodos externos (nivel 0):
Enlace(0, 1)
Enlace(0, 2)
Enlace(1, 2)
# nodo central (nivel 1):
Enlace(3, 0)
Enlace(3, 1)
Enlace(3, 2)
# resto de los nodos:
For  $i \leftarrow 4$  to  $N_L$ 
   $p \leftarrow l_i - 1$ 
   $m_1 \leftarrow \text{Num}(V_i\{1..p\})$  # vecino padre
   $j \leftarrow 1$ 
  While ( $j < 3$ ) & ( $p > 1$ ) # vecinos internos
     $p \leftarrow p - 1$ 
     $k \leftarrow p + 2$ 
    While ( $k \leq l_i$ ) & ( $V_i[p+1] \neq V_i[k]$ )
       $k \leftarrow k + 1$ 
    If ( $k > l_i$ )
       $j \leftarrow j + 1$ 
       $m_j \leftarrow \text{Num}(V_i\{1..p\})$ 
  If ( $j < 3$ ) # vecinos externos
    If ( $j = 2$ )
       $e \leftarrow 6 - (V_i[2] + V_i[3])$ 
       $m_3 \leftarrow e - 1$ 
    If ( $j = 1$ )
       $e \leftarrow V_i[2] - 1$ ; If ( $e < 1$ ):  $e \leftarrow 3$ 
       $m_2 \leftarrow e - 1$ 
       $e \leftarrow V_i[2] + 1$ ; If ( $e > 3$ ):  $e \leftarrow 1$ 
       $m_3 \leftarrow e - 1$ 
  Enlace( $i, m_1$ )
  Enlace( $i, m_2$ )
  Enlace( $i, m_3$ )

```

Fig. 6. Algoritmo para creación de la tabla de vecinos de una red apolonia con nivel de construcción  $L$ .

nivel de construcción. Nos hemos enfocado en el diseño de etiquetas que permiten identificar y ubicar a los nodos de la red, basándonos en las características geométricas del fractal de Apolonio. Este etiquetado nos permitió definir un método para establecer los enlaces existentes entre ellos, y así crear la tabla de vecinos para cualquier nivel de construcción de la red. Ya que nuestro algoritmo fué planteado en términos generales, puede ser utilizado como sustrato para realizar procesos dinámicos de cualquier tipo y estudiar fenómenos críticos.

Las redes apolonias pueden modelar perfectamente algunos sistemas específicos, tales como medios granulares y medios porosos, sistemas de carreteras y de suministro eléctrico, pero más aún, pueden representar a los sistemas reales de manera general, ya que ellas

presentan varias características simultáneas que suelen encontrarse en una gran variedad de redes de toda naturaleza. Una aplicación importante de este tipo de redes puede ser el estudio de los efectos que pueda causar en el comportamiento de diversos modelos dinámicos debido a las propiedades de su topología, tales como sincronización, transiciones de fase, formación de patrones, transporte, caos espaciotemporal, etc.

**Agradecimientos**

Este trabajo fue realizado con el apoyo del Consejo de Desarrollo, Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, mediante el proyecto No. C-1692-10-05-B. También agradecemos al Profesor Kay Tucci por su colaboración e importantes sugerencias.

**Referencias**

- Albert R y Barabási AL, 2002, Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 74, No. 1, pp. 47-97.
- Andrade Jr JS, Herrmann HJ, Andrade RFS y Da Silva LR, 2005, Apollonian Networks: Simultaneously scale-free, smallworld, euclidean, space filling, and with matching graphs, *Physical Review Letters*, Vol. 94, No. 1, pp. 018702.
- Araújo NAM, Andrade RFS y Herrmann HJ, 2010, q-state Potts model on the Apollonian network, *Physical Review E*, Vol. 82, No. 4, pp. 046109.
- Barabási AL y Albert R, 1999, Emergence of scaling in complex networks, *Science*, Vol. 286, No. 5439, pp. 509-512.
- Cosenza MG y Tucci K, 2001, Pattern formation on trees, *Physical Review E*, Vol. 64, No. 2, pp. 026208.
- Dorogovtsev SN y Mendes JFF, 2002, Evolution of networks, *Advances in Physics*, Vol. 51, No. 4, pp. 1079-1187.
- Dorogovtsev SN, Goltsev AV y Mendes JFF, 2002b, Pseudofractal scale-free web, *Physical Review E*, Vol. 65, No. 6, pp. 066122.
- Doye JPK y Massen CP, 2005, Self-similar disk packings as model spatial scale-free networks, *Physical Review E*, Vol. 71, No. 1, pp. 016128.
- Lind PG, Gallas JAC y Herrmann HJ, 2004, Coherence in scale-free networks of chaotic maps, *Physical Review E*, Vol. 70, No. 5, pp. 056207.
- Newman MEJ, 2002, The structure and function of networks, *Computer Physics Communications*, Vol. 147, No. 1-2, pp. 40-45.
- Newman MEJ, 2003, The structure and function of complex networks, *SIAM Review*, Vol. 45, No. 4, pp. 167-256.
- Pellegrini GL, De Arcangelis L, Herrmann HJ y Perrone-

Capano C, 2007, Activity-dependent neural network model on scale-free networks, *Physical Review E*, Vol. 76, No. 1, pp. 016107.

Schwämmle V, González MC, Moreira AA, Andrade Jr JS y Herrmann HJ, 2007, Different topologies for a herding model of opinion, *Physical Review E*, Vol. 75, No. 6, pp. 066108.

Watts DJ y Strogatz SH, 1998, Collective dynamics of “small-world” networks, *Nature*, Vol. 393, No. 6684, pp. 440-442.

Xu XP, Li W y Liu F, 2008, Coherent transport on Apollonian networks and continuous-time quantum

walks, *Physical Review E*, Vol. 78, No. 5, pp. 052103.

Zhang Z, Comellas F, Fertin G, Raspaud A, Rong L y Zhou S, 2008, Vertex labeling and routing in expanded apollonian networks, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 41 No. 3, pp. 035004.

**Recibido:** 28 de marzo de 2011

**Revisado:** 20 de septiembre de 2011