

El calculo variacional en la estabilidad de taludes

Variational calculation of banks stability

S.H. Rojas G* y N.R. Ucar
Facultad de Ingeniería. ULA,
Mérida, 5101, Venezuela
pgmsilvi@ing.ula.ve

Resumen

En este artículo, se desarrolla un método numérico, que permite resolver el problema de análisis de estabilidad de taludes, el cual está basado en el concepto de equilibrio límite, el cálculo variacional y la ley de resistencia del corte de Mohr-Coulomb. Una función para el esfuerzo σ_n es derivado para todas las dovelas. Además, las fuerzas sísmicas, cargas puntuales y distribuidas son tomadas en cuenta. Este tópico es muy relevante, ya que se hace una definición matemática, a fin de permitirle al ingeniero geotécnico, tener una visión diferente del estudio de estabilidad de taludes. La contribución de este estudio es el uso de las herramientas existentes de los análisis numéricos. Finalmente los resultados del programa elaborado que aplica para este método con el uso del computador son presentados.

Palabras Claves: Factor d seguridad, estabilidad d taludes, análisis d estabilidad, análisis numérico.

Abstract

In this article, we develop a numeric method that lets solve the stability analysis, which is based on the limiting equilibrium concept, the variation calculus and Mohr-Coulomb shear strength law. A function to the σ_n stress is derived to all slices. Furthermore, the sismic forces, punctual and distributed loads, are taken into account. This topic is very relevant, since we make a mathematical statement in order to let the geomechanic engineer have a different vision of the slope stability study. The contribution of this study is the use of the existing tools of the numeric analysis. Finally the results of the elaborated program that applies for this method by computer use are presented.

Key Words: Security Factor, banks stability, stability analysis, numeric analysis

1 Introducción

Esta investigación es una generalización y extensión del análisis de Lechchinsky y Huang (1992) quienes utilizan la técnica del cálculo variacional con la finalidad de encontrar el mínimo factor de seguridad, para una determinada superficie de deslizamiento y la distribución de esfuerzos normales.

Una vez que el mínimo factor de seguridad u la función de los esfuerzos normales han sido determinado, el problema se vuelve estáticamente determinado. Se puede entonces subdividir la masa potencialmente deslizante en dovelas sin recurrir a suposiciones.

Las fuerzas interna entre dovelas son controladas por la ecuación matemática de la distribución de esfuerzos, por consiguiente esta ecuación está restringida a funciones razonables que determinan las fuerzas que se generan entre dovelas. Esto hace que la aplicación del método variacional

tenga tanta validez como algunos otros métodos rigurosos tales como Janbu (1954), Morgenstern y Price (1965), con la ventaja de que su aplicación se vuelve tan simple como el método de Bishop (1955), con la diferencia que el mismo no satisface todas las ecuaciones de equilibrio.

La determinación de la función de esfuerzos normales, hace que la evaluación de las fuerzas internas entre dovelas no son necesarias para obtener el mínimo factor de seguridad y por consiguiente, esto hace que el método sea mucho más atractivo.

El método presentado es válido para el caso de suelos homogéneos, con una determinada presión de poros, cargas externas y fuerzas sísmicas.

El procedimiento de cálculo variacional puede parecer un proceso de minimización difícil y por lo tanto posiblemente intimidada al usuario, sin embargo el mínimo factor de seguridad es logrado matemáticamente con gran rapidez, al compararse con procedimientos más laboriosos tales como

el de Janbu (1954), Morgenstern y Price (1965) o Spencer (1967).

2 Formulación Matemática del Problema

La figura No. 1 representa el problema planteado en el cálculo del factor de seguridad, observándose todos los parámetros involucrados, en la cual $y_f(x)$ 0 superficie de falla, $y_t(x)$ = superficie del talud, $h_n(x)$ = nivel freático, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ = líneas de estratificación.

La figura No. 2, muestra las diferentes fuerzas que pueden actuar en la cara del talud $y_f(x)$ y en la superficie potencial de falla $y_f(x)$ en un diferencial Δl_i , y donde σ'_i = esfuerzo efectivo normal, τ_i = esfuerzo tangencial movilizad, C_i = cohesión del material, ΔW_i = peso de la masa de suelo en una longitud Δl_i , μ_i = presión de poros, γ_i = peso unitario promedio, α_i = ángulo de inclinación de la base de la dovela con la horizontal, Δx_i = proyección horizontal de la base de la dovela, $q_x(x)$ = carga horizontal distribuida, $q_y(x)$ = carga vertical distribuida, P_x, P_y = cargas externas puntuales en dirección horizontal y vertical, x_p, y_p = puntos de aplicación de las cargas puntuales, k_h, k_v = coeficientes sísmicos horizontal y vertical.

Al integrar dentro del entorno de la superficie potencial de deslizamiento y teniendo en cuenta la dirección horizontal, vertical y la condición de momento en el punto "O" resultan las tres ecuaciones de equilibrio:

- Sumatoria de fuerzas horizontales:

$$\int_{x_B}^{x_A} \{c + (\sigma - \mu)\psi - FS[\sigma \cdot y'_f + k_h \gamma (y_t - y_f)]\} dx + \int_{x_{15}}^{x_{20}} (FS \cdot q_x \cdot y'_t) dx - FS \cdot P_x = 0 \quad (1)$$

- Sumatoria de fuerzas verticales:

$$\int_{x_B}^{x_A} \{[c + (\sigma - \mu)\psi] y'_f - FS[\sigma \cdot \gamma (y_t - y_f)(1 + k_v)]\} dx$$

$$G = \int_{x_B}^{x_A} \left\{ \left[\begin{aligned} & [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS[\sigma \cdot y'_f + k_h \cdot \gamma (y_t - y_f) - q_x \cdot y'_t] \\ & + \lambda_1 \{y'_f [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS[\gamma (y_t - y_f)(1 + k_v) + q_y - \sigma]\} \\ & + \lambda_2 \left\{ (y_f - x \cdot y'_f) [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS \left[\begin{aligned} & \sigma (y_f \cdot y'_f + x) - q_x \cdot y_t \cdot y'_t - q_y \cdot x \\ & - \gamma (y_t - y_f)(1 + k_v)x + 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma (y_t^2 - y_f^2) \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \right\} dx + FS[\lambda_2 (P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) - \lambda_1 \cdot P_y - P_x] \left(\frac{dx}{dx} \right) \quad (5)$$

$$- \int_{x_5}^{x_{10}} (FS \cdot q_y) dx - FS \cdot P_y = 0 \quad (2)$$

- Sumatoria de momentos:

$$\int_{x_B}^{x_A} \{[c + (\sigma - \mu)\psi] (y_f - x y'_f) - FS \cdot \sigma (y_f \cdot y'_f + x)\} dx + FS \left[\int_{x_B}^{x_A} \gamma (y_t - y_f) (1 + k_v) x - 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma (y_t^2 - y_f^2) \right] + \int_{x_{15}}^{x_{20}} FS (q_x \cdot y_t \cdot y'_t) dx + \int_{x_5}^{x_{10}} FS (q_y \cdot x) dx + FS (P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) = 0 \quad (3)$$

En la expresión $y'_f = \alpha$ = pendiente de la superficie de falla y ψ = tangente del ángulo de fricción interno de la masa de suelo.

Los subíndices ($i = 5, i = 10, i = 15, i = 20$) corresponden a puntos arbitrarios en la cara del talud; los subíndices "A" y "B" representan la intersección de la superficie potencial de falla $y_f(x)$ con la superficie del talud $y_t(x)$; y'_t = pendiente del talud.

Baker y Gaber (1978), demuestran que la solución del problema formulado se puede obtener a través del funcional auxiliar G, sujeto a satisfacer las ecuaciones de equilibrio (1,2,3) y el cual se expresa como:

$$G = H + \lambda_1 \cdot V + \lambda_2 \cdot M \quad (4)$$

donde:

H = suma de fuerzas horizontales

V = suma de fuerzas verticales

M = suma de momentos

λ_1, λ_2 = multiplicadores de Lagrange

Sustituyendo las ecuaciones 1,2,3 en la ecuación 4 se tiene:

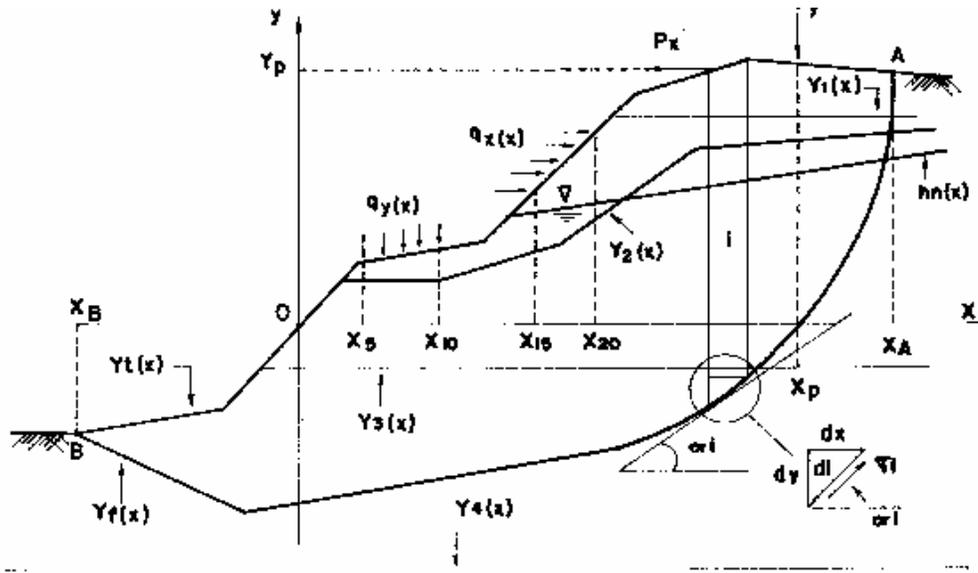


Figura N°.1.- Definición del problema básico.

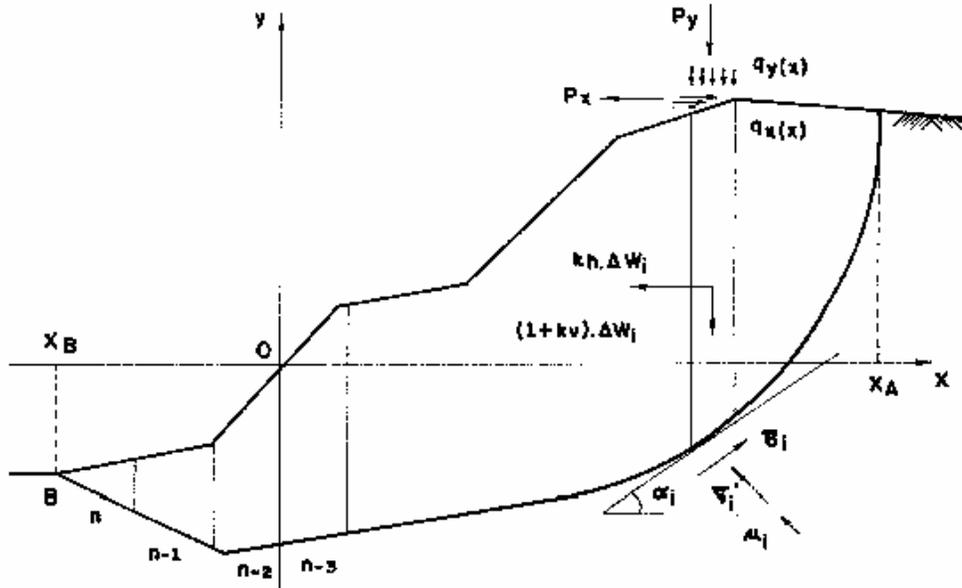


Figura N°.2. Esfuerzos en un punto de la superficie de falla

La ecuación 4, se puede escribir de la forma:

$$G = \int g dx \tag{6}$$

donde g viene dada por la siguiente expresión:

$$g = \left\{ \begin{aligned} & \left[c + (\sigma - \mu)\psi \right] - FS \left[\sigma \cdot y'_f + k_h \cdot \gamma (y_t - y_f) - q_x \cdot y'_t \right] \\ & + \lambda_1 \left\{ y'_f \left[c + (\sigma - \mu)\psi \right] - FS \left[\gamma (y_t - y_f) (1 + k_v) + q_y - \sigma \right] \right\} \\ & + \lambda_2 \left\{ (y_f - x \cdot y'_f) \left[c + (\sigma - \mu)\psi \right] - FS \left[\begin{aligned} & \sigma (y_f \cdot y'_f + x) - q_x \cdot y_t \cdot y'_t - q_y \cdot x \\ & - \gamma (y_t - y_f) (1 + k_v) x + 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma (y_t^2 - y_f^2) \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \\ + FS \left[\lambda_2 (P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) - \lambda_1 \cdot P_y - P_x \right] \left(\frac{1}{dx} \right) \tag{7}$$

La función $y_t(x)$ y $\sigma(x)$ que satisface las tres ecuaciones de equilibrio (1), (2), (3), tienen que satisfacer la ecuación diferencial de Euler que se expresa de la forma:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial y}{\partial \sigma} = 0 \tag{8.1}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'_f} \right) - \frac{\partial y}{\partial y_f} = 0 \tag{8.2}$$

Leshchinsky y Huang (1992)¹, aplicando la ecuación (8.2), obtuvieron la expresión:

$$\begin{aligned} & \left[(x_{oi} - x_c)\psi_i + (y_{foi} - y_c)FS \right] \sigma'_i + 2\psi_i (y_{foi} + y_c) \\ & + 2c_i - (x_{oi} - x_c) \left[\psi_i \cdot \mu'_i + (1 + k_v)\gamma_i \cdot FS \right] \\ & + FS \cdot k_h \cdot \gamma_{oi} (y_{foi} + y_c) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

La ecuación 9, es aplicada a “n” dovelas de la figura No. 2, donde x_{oi} , y_{foi} = abscisa y ordenada en el centro de cada dovela en la superficie potencial de falla.

σ'_i = variación del esfuerzo normal en la dirección “x”
 μ'_i = variación de la presión de poros

$$x_c = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad y_c = \frac{1}{\lambda_2}$$

Leshchinsky y Huang (1992), proponen que μ'_i y σ'_i se calcule a partir de las siguientes expresiones:

$$\mu'_i = \frac{\Delta \mu_i}{\Delta x_i} \tag{10}$$

donde $\Delta \mu_i$ = variación de la presión de poros en el ancho Δx_i de la dovela. Si $i \leq (n-1)$ aplicar:

$$\sigma'_i = \frac{h_1^2 \cdot \sigma_{i-1} + (h_{i-1}^2 - h_1^2)\sigma_i - h_{i-1}^2 \cdot \sigma_{i+1}}{h_i \cdot h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \tag{11}$$

donde:

$$h_i = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}{2} \tag{12}$$

$$h_{i-1} = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}{2} \tag{13}$$

Para $i = 1$, se tiene:

$$h_0 = \frac{\Delta x_i}{2} \quad \sigma_{i-1} = \sigma_0$$

Siendo:

σ_0 = esfuerzo en el extremo superior de la intersección de la superficie del talud $y_t(x)$ con la superficie potencial de falla $y_f(x)$.

Sustituyendo la ecuación (11) en la ecuación (9), resulta:

$$\frac{a_i}{b_i} h_{i-1} \cdot \sigma_{i+1} - \left[\frac{a_i}{b_i} (h_{i-1}^2 - h_i^2) + 2\psi \right] \sigma_i - \frac{a_i}{b_i} h_i^2 \cdot \sigma_{i-1} + 2\psi_i \cdot \mu_i + (x_{0i} - x_c) [\psi_i \cdot \mu'_i + (1 + k_v) \gamma_i \cdot FS] - 2c_i - FS \cdot k_h \cdot \gamma_i (y_{f0i} + y_c) = 0 \quad (14)$$

donde:

$$a_i = [(x_{0i} - x_c)\psi_i + (y_{f0i} - y_c)FS] \quad (15)$$

$$b_i = h_i \cdot h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) \quad (16)$$

Cuando $i = n$, Leshchinsky y Huang (1992), propone que σ'_n se calcule a partir de la siguiente ecuación:

$$\sigma'_n = 4 \frac{(\sigma_{n-1} - \sigma_n)}{\Delta x_{n-1} - \Delta x_n} - \sigma'_{n-1} \quad (17)$$

Sin embargo, cuando el ancho de dovela es el mismo ($\Delta x_{n-1} = \Delta x_n$) resulta una indeterminación, además si el problema se resuelve de forma matricial, haciendo ($\Delta x_{n-1} \neq \Delta x_n$), el miembro correspondiente a esta posición genera un valor exageradamente alto y el cual se compensa con el cálculo global.

Este trabajo presenta un método que permite encontrar

$$\sigma'_n = \frac{\sigma_{n-3}}{(x_{0(n-3)} - x_{0(n-2)})(x_{0(n-3)} - x_{0(n-1)})(x_{0(n-3)} - x_{0n})} (x_{0n} - x_{0(n-2)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) + \frac{\sigma_{n-2}}{(x_{0(n-2)} - x_{0(n-3)})(x_{0(n-2)} - x_{0(n-1)})(x_{0(n-2)} - x_{0n})} (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) + \frac{\sigma_{n-1}}{(x_{0(n-1)} - x_{0(n-3)})(x_{0(n-1)} - x_{0(n-2)})(x_{0(n-1)} - x_{0n})} (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)}) + \frac{\sigma_n}{(x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)})(x_{0n} - x_{0(n-1)})} \left\{ \left[(x_{0n} - x_{0(n-2)} + (x_{0n} - x_{0(n-3)})) (x_{0n} - x_{0(n-3)}) \right] + (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)}) \right\} \quad (19)$$

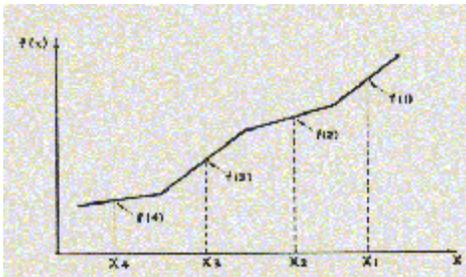


Figura No. 3. Función $f(x)$ de Lagrange a objeto de conocer la variación de $\sigma(x)$ en la última dovela

el valor de σ'_n , aplicando el polinomio de interpolación de Lagrange el cual a continuación se explica.

3 Método Numérico para Encontrar la Expresión de σ_n

Considerando la superficie representada en la figura No. 3 la cual muestra el valor de la función $f(x)$ en puntos específicos.

Aplicando un polinomio de Lagrange de tercer grado, a los puntos representados en la figura No. 3 se tiene:

$$f_3(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} f_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} f_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} f_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} f_4 \quad (18)$$

Derivando la ecuación (18) y evaluando dicha función derivada para la última dovela indicada en la figura No. 2, resulta:

Llevando a cabo el cambio de variable para la ecuación (19), se tiene:

$$\sigma'_n = \frac{bl_1}{al_1} \sigma_{n-3} + \frac{bl_2}{al_2} \sigma_{n-2} + \frac{bl_3}{al_3} \sigma_{n-1} + \frac{bl_{14}}{al_4} \sigma_n \quad (20)$$

Donde:

$$al_1 = (x_{0(n-3)} - x_{0(n-2)})(x_{0(n-3)} - x_{0(n-1)})(x_{0(n-3)} - x_{0n}) \quad (20.1)$$

$$bl_1 = (x_{0n} - x_{0(n-2)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) \quad (20.2)$$

$$al_2 = (x_{0(n-2)} - x_{0(n-3)})(x_{0(n-2)} - x_{0(n-1)})(x_{0(n-2)} - x_{0n}) \quad (20.3)$$

$$bl_2 = (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) \quad (20.4)$$

$$al_3 = (x_{0(n-1)} - x_{0(n-3)})(x_{0(n-1)} - x_{0(n-2)})(x_{0(n-1)} - x_{0n}) \quad (20.5)$$

$$bl_3 = (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)}) \quad (20.6)$$

$$al_4 = (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-1)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) \quad (20.7)$$

$$bl_1 = [(x_{0n} - x_{0(n-2)})(x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) + (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)})] \quad (20.8)$$

Reemplazando la ecuación (20) en la ecuación (9) y agrupando términos, para la última dovela se tiene:

$$a_n \left\{ \frac{bl_1}{al_1} \sigma_{n-3} + \frac{bl_2}{al_2} \sigma_{n-2} + \frac{bl_3}{al_3} \sigma_{n-1} \right\} + \left\{ a_n \frac{bl_4}{al_4} + 2\psi_n \right\} \sigma_n - 2\psi_n \cdot \mu_n + 2c_n - (x_{0n} - x_c) \cdot [\psi_n \cdot \mu'_n + (1 + k_v)\gamma_n \cdot FS] + FS \cdot k_h \cdot \gamma_n (y_{f0n} + y_c) = 0 \quad (21)$$

Donde:

$$a_n = (x_{0n} - x_c)\psi_n + (y_{f0n} - y_c)FS \quad (21.1)$$

Método Iterativo de Newton

La solución al problema formulado consiste en resolver el conjunto de ecuaciones no lineales dadas por las expresiones de equilibrio (1), (2) y (3) en combinación con

$$M_{\left(\begin{smallmatrix} x_c, y_c, FS, \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \end{smallmatrix} \right)} = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{l} [c_i + (\sigma_1 - \mu_i)](y_{foi} - x_{oi} \cdot y'_{fi}) \\ - FS \left[\begin{array}{l} \sigma_i (y_{foi} \cdot y'_{fi} + x_{oi}) - \gamma_i (y_{ti} - y_{foi})(1 + k_v)x_{oi} \\ - q_x \cdot y_{ti} \cdot y'_{ti} + 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma_i (y_{ti}^2 - y_{foi}^2) - q_y \cdot x_{oi} \end{array} \right] \Delta x_i \end{array} \right\} + FS(P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) \quad (25)$$

La ecuación (14) se puede escribir como:

las ecuaciones (14) y (20), donde las incógnitas son (x_c, y_c, FS) y los esfuerzos normales σ_1 en un punto determinado de la superficie potencial de falla.

El planteamiento de Newton, es obtener la convergencia de dos funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$, desarrollando ambas funciones como una serie de Taylor, alrededor del punto (x_1, y_1) el cual es cercano a la raíz, se obtiene:

$$\frac{\partial f_{(x_1, y_1)}}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial f_{(x_1, y_1)}}{\partial y} \Delta y_1 = -f(x_1, y_1) \quad (22.1)$$

$$\frac{\partial g_{(x_1, y_1)}}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial g_{(x_1, y_1)}}{\partial y} \Delta y_1 = -g(x_1, y_1) \quad (22.2)$$

Un punto más próximo a la raíz, será:

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 \quad (22.3)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad (22.4)$$

Este planteamiento se aplica a continuación:

Las ecuaciones de equilibrio (1), (2), (3), escritas como diferencias finitas se expresan a continuación:

$$H \left(\begin{array}{l} x_c, y_c, FS, \sigma_1, \\ \sigma_2, \dots, \sigma_n \end{array} \right) = \sum_{i=1}^n \left\{ c_i + (\sigma_i - \mu_i)\psi_i - FS [\sigma_i \cdot y_{fi} + k_h \cdot \gamma_i (y_{tf} - y_{f0i}) - q_x \cdot y'_{ti}] \Delta x_i - FS \cdot P_x \right\} \quad (23)$$

$$V \left(\begin{array}{l} x_c, y_c, FS, \sigma_1, \\ \sigma_2, \dots, \sigma_n \end{array} \right) = \sum_{i=1}^n \left\{ [c_i + (\sigma_i - \mu_i)\psi_i] y_{fi} - FS [\gamma_i (y_{ti} - y_{f0i})(1 + k_v) - \sigma_i + q_y] \Delta x_i - FS \cdot P_y \right\} \quad (24)$$

$$f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{a_i}{b_i} h_{i-1} - \left[\frac{a_i}{b_i} (h_{i-1}^2 - h_i^2) + 2\psi_i \right] \sigma_i - \frac{a_i}{b_i} h_i^2 \cdot \sigma_{i-1} + \{2\psi_i \cdot \mu_i + (x_{0i} - x_c)[\psi_i \cdot \mu'_i + (1 + k_v)\gamma_i \cdot FS] - 2c_i - FS \cdot k_h \cdot \gamma_i (y_{f0i} + y_c)\} \quad (26)$$

La ecuación (21) se expresa:

$$f_2(x_c, y_c, FS, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}) = a_n \left(\frac{bl_1}{al_1} \sigma_{n-3} + \frac{bl_2}{al_2} \sigma_{n-2} + \frac{bl_3}{al_3} \sigma_{n-1} \right) + \left(a_n \frac{bl_4}{al_4} + 2\psi_n \right) \sigma_n - 2\psi_n \cdot \mu_n + 2c_n \quad (27)$$

Aplicando la ecuación 22, a las expresiones (23), (24), (25), (26) y (27), resulta:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 = \frac{\partial H}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial H}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial H}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial H}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 - f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2) \quad (28.1) + \dots + \frac{\partial H}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -H(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} \Delta \sigma_3 = -f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (28.2) \frac{\partial V}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial V}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial V}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial V}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial V}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -V(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (28.n+1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} \Delta \sigma_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_4} \Delta \sigma_4 = -f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \quad (28.3) \frac{\partial M}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial M}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial M}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial M}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial M}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \dots + \frac{\partial M}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -M(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (28.n+2)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} \Delta \sigma_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_4} \Delta \sigma_4 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_5} \Delta \sigma_5 = -f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \quad (28.4) \dots$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_2}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_2}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{n-3}} \Delta \sigma_{n-3} + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{n-2}} \Delta \sigma_{n-2} + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{n-1}} \Delta \sigma_{n-1} + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -f_2(x_c, y_c, FS, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}, \sigma_n) \quad (28.n)$$

Para valores iniciales de σ_0, x_c, y_c, FS , se calcula $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ correspondiente a cada dovela de la figura No. 2 a través de las ecuaciones (14) y (21) resueltas matricialmente y donde cada valor de σ_i debe cumplir con la ley de Coulomb ($\sigma_i < c_i/\tan\phi_i$). Sino se cumple con esta condición variar σ_0, x_c, y_c, FS y repetir el cálculo.

Para los valores de $\sigma_0, x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, se evalúa la ecuación (28) y resolviendo se obtienen $\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta FS, \Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$ hasta lograr la convergencia.

Aplicación Práctica

El siguiente ejemplo s tomado del artículo e Leshchinsky y Huang (1992), cuyas dimensiones se obtuvieron según la escala gráfica presentada en dicho artículo.

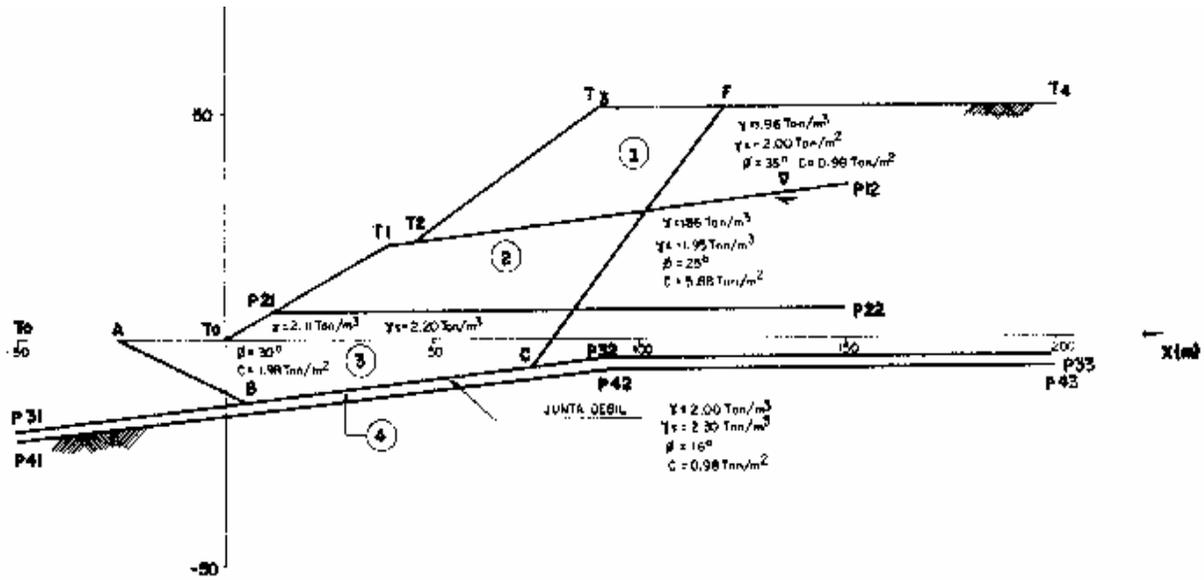


Figura No. 4. Geometría del talud mostrando la superficie potencial de deslizamiento conformada por segmentos de recta.

El resultado obtenido a través del programa FS.EXE y el presentado por Leshchinsky y Huang [3], fueron los siguientes:

Método	σ_0 (ton/m ²)	FS
FS.EXE	-1.40	1.084
	-0.70	1.086
	0,00	1.087
y Leshchinsky	-1.40	1.061
	0.00	1.066
Huang [3]		

Los resultados del programa FS.EXE, se presentan en el Apéndice III.

Conclusiones

En el estudio llevado a cabo se ha desarrollado un programa totalmente original asistido por el ordenador, utilizando como herramienta de trabajo el cálculo numérico y el procedimiento propuesto por Leshchinsky y Huang (1992), con la gran ventaja que se puede analizar la estabilidad de taludes con geometría irregular y con la presencia de estratos que tienen diferentes inclinaciones y propiedades geomecánicas, además de la presencia del nivel freático, la sobrecarga y el efecto sísmico.

Es importante destacar que el método numérico desarrollado en el presente trabajo conlleva a calcular con mayor precisión el esfuerzo normal σ_n actuando en la última dovela y por ende el resto de los esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$,

σ_{n-1} , que conforman el sistema matricial.

Referencias

LESHCHINSKY, D. and HUANG, C. (1992), "Generalized Slope Stability Analysis: Interpretation, Modification and Comparison", Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 118, No. 10, 1192, pp. 1559-1576.
 JANBU, N., (1954), "Slope Stability Analysis of Slopes with Dimensionless Parameters", Ph.D, Thesis, Cambridge, Massachusetts, Harvard University, 81 p.
 MORGENSTERN, N.R. and PRICE, V.E., (1965), "The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces", Geotechnique, 15, pp 79-73.
 BISHOP, A.W., (1955), "The Use of Slips Circle in the Stability Analysis of Slopes", Geotechnique, Vol. 10, No. 4, pp. 129-150.
 SPENCER, E., (1967), "A Method of Analysis of the Stability of Embankments Assuming Parallel Inter-Slice Forces", Geotechnique, Vol. 17, No. 1, pp. 11-26.
 BAKER, R and GABER, M., (1978), "Theoretical Analysis of the Stability of Slopes", Geotechnique 28, No. 4, pp 395-411.

Apéndice I. Notación

- a_i: Parámetro de cálculo utilizado en el análisis variacional
- a₁₁, a₁₂, a₁₃, a₁₄: Parámetros de cálculo utilizados en el análisis variacional

b_i : Parámetro de cálculo utilizado en el análisis variacional.

b_{ii} : Parámetro de cálculo utilizado en el análisis variacional.

c_i : Cohesión del material en la base de la dovela.

FS: Factor de seguridad.

h_i : Parámetro de cálculo utilizado en el análisis variacional.

P_x : Carga puntual aplicada en dirección horizontal sobre la superficie del talud.

P_y : Carga puntual aplicada en dirección vertical sobre la superficie del talud.

$q_x(x)$: Carga externa horizontal, distribuida en la superficie del talud.

$q_y(x)$: Carga externa vertical, distribuida en la superficie del talud.

μ_i : Presión de poros en el centro de la dovela.

μ'_i : Derivada de la presión de poros respecto al eje de las abscisas.

x_{oi} : Abscisa en el centro de cada dovela.

x_c : Parámetro dependiente de los multiplicadores de Lagrange ($x_c = \lambda_1/\lambda_2$).

y_c : Parámetro dependiente de los multiplicadores de Lagrange ($y_c = 1/\lambda_2$).

y_{foi} : Ordenada de la superficie de falla en el centro de cada dovela.

y_{ti} : Ordenada de la superficie del talud.

γ_i : Peso unitario promedio del suelo.

ΔFS : Variación del factor de seguridad.

Δx_c : Variación del parámetro x .

Δx_i : Proyección horizontal de la base de cada dovela.

Δy_c : Variación del parámetro y_c .

$\Delta \sigma_i$: Variación del esfuerzo normal σ_i .

λ_1, λ_2 : Multiplicadores de Lagrange.

σ_i : Esfuerzo normal en el centro de la dovela.

σ'_i : Derivada del esfuerzo normal con respecto al eje de las abscisas.

σ_o : Esfuerzo inicial normal en el punto de intersección de la cresta del talud con la superficie de falla.

τ_i : Esfuerzo tangencial en la base de la dovela.

ψ_i : Tangente del ángulo de fricción interna.

Apéndice II. Resultados del programa

Coordenadas de la superficie potencial de deslizamiento

Punto	x (m)	y (m)
F	121,11	50,91
C	74,11	-6,36
B	5,26	-13,64
A	-24,21	0,00

Coordenadas de la superficie del talud

Punto	x (m)	y (m)
T4	200,00	50,91
T3	89,09	50,91
T2	45,09	20,91
T1	40,00	20,91
T0	0,00	0,00
-T0	-50,00	0,00

Coordenadas de los estratos

Estrato No.	Punto	x (m)	y (m)
1	T2	45,00	20,91
1	P12	150,00	32,95
2	P21	11,50	6,01
2	P22	150,00	6,01
3	P31	-50,00	-19,48
3	P32	91,00	-4,57
3	P33	200,00	-4,57
4	P41	-50,00	-22,00
4	P42	91,00	-7,09
4	P43	200,00	-7,09

Coordenadas del nivel freático

Punto	x (m)	y (m)
P12	150,00	32,95
T2	45,09	20,91

Coefficientes sísmicos

kh	kv
0,00	0,00
0,00	0,00

Cargas distribuidas

x_0, y_0 : Coordenadas iniciales de aplicación de carga

x_f, y_f : Coordenadas finales de aplicación de carga

q_h : Carga distribuida horizontal

q_v : Carga distribuida vertical

x_0 (m)	y_0 (m)	x_f (m)	y_f (m)	q_h (To n/m ²)	q_v (To n/m ²)
0	0,0	0	0,0	0,0	0,0

Características de los estratos

c, ϕ : Cohesión y fricción del material

τ_n : Peso unitario natural

τ_s : Peso unitario saturado

D/U: Condición del material (D = drenado U = no drenado)

Estrato No	c (Ton/m ²)	φ (grados)	τ _n (Ton/m ³)	τ _s (Ton/m ³)	(D/U)
1	0,98	35,00	1,96	2,00	D
2	5,88	25,00	1,86	1,95	D
3	1,98	30,00	2,11	2,20	D
4	0,98	16,00	2,00	2,30	D

c, φ = Cohesión y fricción del material en la base de la dovela

γ = Peso unitario promedio

σ = Esfuerzo normal en la base de la dovela

σ' = Esfuerzo normal efectivo en la base de la dovela

tau = Resistencia al corte movilizada

Parámetros iniciales de cálculo

μ₁, μ₂: Multiplicadores de Lagrange

x_c = μ₁, μ₂

y_c = 1/μ₂

FS = Factor de seguridad

σ₀ = sigma inicial en el punto de intersección entre la superficie analizada y la cresta del talud.

ND = número de dovelas iniciales consideradas

x _c	y _c	FS	σ ₀	ND
30,00	165,00	1.000	0,00	20

Parámetros finales de cálculo:

μ₁, μ₂: Multiplicadores de Lagrange

x_c: μ₁/μ₂

y_c: 1/μ₂

FS = Factor de Seguridad

σ₀ = Sigma inicial en el punto de intersección entre la superficie analizada y la cresta del talud

ND = número de dovelas iniciales consideradas

Características geométricas y geomecánicas de las dovelas:

D_i = Dovela

δ_x = Ancho de dovela

x₀, y₀ = Abscisa y ordenada con respecto al centro de la dovela

y_t = Ordenada del talud en el centro de la dovela

u = Presión de poros en la base de la dovela

x _c (μ ₁ /μ ₂)	y _c (1/μ ₂)	FS	σ ₀ (Ton/m ²)
32,63	155,29	1,087	0,00

D _i	δ _x (m)	x ₀ (m)	y _t (m)	y ₀ (m)	m Ton/m ²	φ (°)	c Ton/m ²	τ Ton/m ³	σ Ton/m ²	σ' Ton/m ²	tau Ton/m ²
1	7,27	117,48	30,91	46,48	0,00	35,00	0,98	1,96	12,49	12,49	8,94
2	7,27	110,21	50,91	37,63	0,00	35,00	0,98	1,96	25,07	25,07	17,05
3	4,74	104,21	50,91	30,32	0,00	35,00	0,98	1,96	35,38	35,38	23,69
4	7,27	98,21	50,91	23,00	4,01	25,00	5,88	1,96	39,44	35,44	20,61
5	7,27	90,94	50,91	14,15	12,02	25,00	5,88	1,96	43,55	31,52	18,93
6	3,04	85,78	48,66	7,87	17,72	25,00	5,88	1,96	44,10	26,38	16,72
7	7,27	80,63	45,14	1,58	23,41	30,00	1,98	1,98	47,40	23,99	14,56
8	2,88	75,55	41,68	-4,60	29,01	30,00	1,98	2,01	47,31	19,31	11,54
9	7,27	70,48	38,22	-6,74	30,57	16,00	0,98	2,02	50,35	19,78	6,12
10	7,27	63,21	33,27	-7,51	30,50	16,00	0,98	2,04	54,89	24,39	7,33
11	7,27	55,95	28,31	-8,28	30,44	16,00	0,98	2,05	54,99	24,55	7,38
12	7,27	48,68	23,36	-9,05	30,37	16,00	0,98	2,07	58,08	27,71	8,21
13	7,27	41,42	20,91	-9,82	30,73	16,00	0,98	2,08	56,66	25,94	7,74
14	7,27	34,15	17,83	-10,59	28,44	16,00	0,98	2,10	58,46	30,02	8,82
15	7,27	26,88	14,05	-11,35	25,41	16,00	0,98	2,12	55,54	30,13	8,85
16	7,27	19,62	10,26	-12,12	22,38	16,00	0,98	2,15	55,91	33,54	9,75
17	7,27	12,35	6,46	-12,89	19,35	16,00	0,98	2,19	51,48	32,13	9,38
18	3,47	6,99	3,63	-13,46	17,11	16,00	0,98	2,20	49,71	32,60	9,50
19	7,27	1,62	0,85	-11,96	12,80	30,00	1,98	2,20	46,72	33,92	19,83
20	7,27	-5,65	0,00	-8,59	8,59	30,00	1,98	2,20	41,87	33,27	19,49
21	7,27	-12,91	0,00	-5,23	5,23	30,00	1,98	2,20	36,33	31,10	18,33
22	7,27	-20,18	0,00	-1,87	1,87	30,00	1,98	2,20	30,25	28,38	16,09
23	0,40	-24,01	0,00	-0,09	0,09	30,00	1,98	2,20	26,80	26,71	16,01

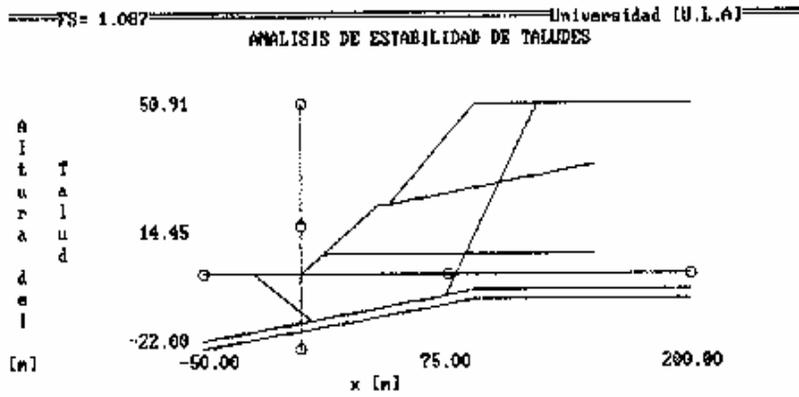


Figura III.1.- Geometría del talud mostrando la superficie potencial de deslizamiento conformada por segmentos de recta.

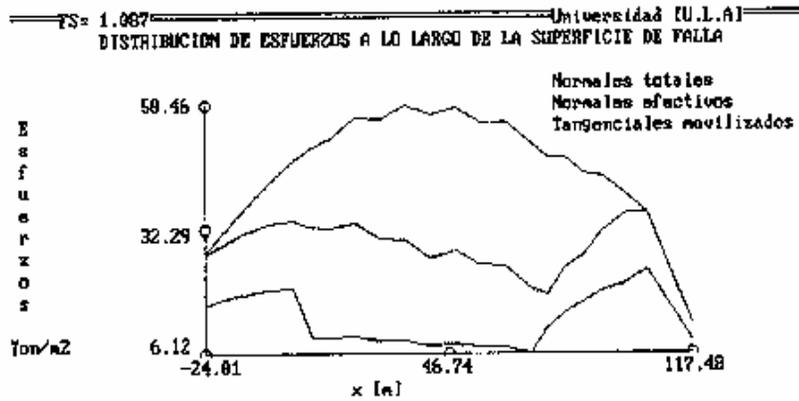


Figura III.2.- Variación de los esfuerzos normales y tangenciales a lo largo del eje de las abscisas considerando que la superficie potencial de falla está conformada por segmentos de recta.

