

Diseño robusto de tolerancias basado en aritmética de intervalos y estrategias evolutivas

Robust design of tolerance based on interval arithmetics and evolutionary strategies

Claudio M. Rocco S.*, José Ali Moreno, Néstor Carrasquero, Manuel Medina
Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería
Departamento de Investigación de Operaciones y Computación
Apartado Postal 47937, Los Chaguaramos, Caracas 1041, Venezuela
* crocco@reacciun.ve

Resumen

En este trabajo proponemos un enfoque novedoso basado en un modelo híbrido que combina el uso de técnicas de Estrategias Evolutivas y la Aritmética de Intervalo para resolver el problema de Diseño Robusto de Tolerancia. Las Estrategias Evolutivas permiten la determinación de los rangos “adecuados” de los elementos de entrada de un modelo, mientras que la Aritmética de Intervalo garantizará el cumplimiento de las especificaciones impuestas a la salida del modelo. La investigación desarrollada en este trabajo complementa la literatura existente referidas al problema de diseño de tolerancias y puede ser aplicada a problemas en los que todas o algunas de las restricciones que definen la región de factibilidad sean no lineales, y para regiones de factibilidad convexas o no convexas, garantizando la robustez de la solución. El enfoque está basado en la búsqueda de regiones de máxima tolerancia para cada parámetro y no en la optimización de las propiedades del mismo.

Palabras claves: Análisis de incertidumbre y sensibilidad, optimización global, estrategias evolutivas, diseño de tolerancia

Abstract

This paper proposes innovative approaches based on the use of Cellular Evolutionary Strategies (CES) and Interval Arithmetics (IA) to solve the Robust Tolerance Design problem. CES are a recent approach that combines the Evolution Strategy techniques with concepts from Cellular Automata and are used to solve, by an iterative process, the robust design problem, while IA is used as a checking technique that guarantee the feasibility of the design. The approach used is an indirect method based on optimisation instead of a direct method based on mapping from the output into the input space and can be used for linear and non-linear constraints. The proposed approaches are powerful tools that the decision-maker should use to validate and design any kind of systems.

Keyword: Uncertainty and sensitivity analysis, global optimisation, evolutionary strategies, tolerance design

1 Introducción

Uno de los principales aspectos de la calidad de los productos manufacturados consiste en que todas las características numéricas relevantes de estos productos deben permanecer en límites preestablecidos, ya sean éstas, la eficiencia de un motor, el tamaño de una pieza, la confiabilidad de un sistema, entre otros.

Preguntas tales como: ¿ Qué pasa si los valores de entrada del modelo cambian ? o ¿ Cómo la incertidumbre en los valores de entrada se propagan en el modelo ? son importantes para cuantificar los efectos “De la Entrada hacia la Salida”.

Los métodos que permiten responder a estas inquietudes reciben el nombre de Cálculo de Intervalo o Análisis de Variabilidad. En (Rocco, 1997) se presentan varias técnicas para contestar estas preguntas y en (Rocco,

1999) se presenta una metodología de selección de la técnica adecuada, a partir de las características de las técnicas y de requisitos impuestos por el ente decisor.

El problema que tratamos en este trabajo es complementario al descrito y permite determinar cuáles deberían ser los rangos de variación de las variables de entrada para cumplir con ciertas condiciones en las variables de salida: “De la Salida hacia la Entrada”.

Proponemos un enfoque novedoso basado en un modelo híbrido que combina el uso de técnicas de Estrategias Evolutivas y la Aritmética de Intervalo.

Las Estrategias Evolutivas permiten la determinación de las tolerancias “adecuadas” de los elementos de entrada de un modelo, mientras que la Aritmética de Intervalo garantizan el cumplimiento de las especificaciones impuestas a la salida del modelo (Robustez).

2 Aritmética de Intervalo

La Aritmética de Intervalo (AI) nace al reconocer que a menudo existe incertidumbre en los parámetros que se utilizan en un cálculo. Esta forma de matemática utiliza “números” intervalos, esto es, un par ordenado de números que representan los límites inferiores y superiores de un parámetro. Por ejemplo, si el tiempo de reparación de un equipo (Tr) está entre 2 y 5 horas, el correspondiente número intervalo se escribe como:

$$Tr = [2,5] \text{ horas.}$$

Si se tienen dos números intervalos $X=[a,b]$ y $Y=[c,d]$ con $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces:

$$\begin{aligned} X + Y &= [a,b] + [c,d] = [a+c, b+d] \\ X - Y &= [a,b] + [-c,d] = [a-d, b-c] \\ X * Y &= [\min \{ac, ad, bc, bd\}, \max \{ac, ad, bc, bd\}] \\ X/Y &= [a,b] / [c,d] = [a,b] * [1/d, 1/c], 0 \notin [c,d] \\ kX &= k[a,b] = [ka, kb], k \text{ una constante real.} \end{aligned}$$

Una propiedad interesante de la aritmética de intervalos es el hecho que la ley distributiva no siempre se cumple. Por ejemplo $[0,1](1-1)=0$, mientras $[0,1]-[0,1]=[-1,1]$.

Sin embargo se cumple la siguiente propiedad algebraica (ley subdistributiva): $X(Y + Z) \subseteq XY + XZ$

El hecho que no se cumpla la ley distributiva ocasiona que se produzcan intervalos resultantes mayores a los reales (Problema de dependencia). Esta dependencia está presente siempre que una o más variables aparecen en un cálculo de intervalo y, generalmente, causan que el intervalo resultante sea más ancho de lo que debiera ser. Sin embargo existen expresiones en las que la dependencia no produce sobrestimación. Por ejemplo, al calcular $X + X$, no se produce sobrestimación.

2.1 Funciones de Intervalos

Sea f una función real de n variables. Se denomina extensión natural de intervalos de f a la función F de n variables de intervalos que cumple con la propiedad (Alefeld 1983, Moore 1979, Neumaier 1990): $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

El siguiente teorema es sin duda el más importante en el análisis de intervalos.

TEOREMA (Moore 1979): Sea $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una extensión de inclusión monótona de intervalo de una función real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Entonces $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ contiene el rango de valores de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para todos los $x_i \in X_i$ ($i=1, \dots, n$).

Básicamente esto significa que es posible calcular el rango de una función mediante una extensión intervalo F de f con las mismas operaciones de evaluación de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pero con utilización de aritmética de intervalos.

Existen métodos analíticos para minimizar el efecto de la dependencia (Formas Centrales, Valor Medio, Método de la pendiente) (Alefeld 1983, Moore 1979, Neumaier 1990, Ratsceck (1980 a,b)) y extensiones de la Aritmética de Intervalos (Aritmética Generalizada, Aritmética Afin, Enfoque Intervalo Modal) (Hansen 1993, Andrade et al 1994, Vehi 1998) referenciados en la literatura, para el cálculo del rango de funciones con menos sobrestimación pero que requieren considerables cálculos adicionales.

En estos métodos alternos, la mejora obtenida en la calidad de la estimación del rango (digamos con mínimo o nula sobreestimación) justifica su uso, a pesar de aumentar la complejidad de los cálculos.

3 Algoritmos Evolutivos

Las Estrategias Evolutivas (EEs) fueron desarrolladas en Alemania en la década de los años 60, por Ingo Rechenberg y Hans-Paul Schwefel en la Universidad Técnica de Berlín, como una técnica de optimización que emula los principios de evolución natural (Medina (1998 a,b)).

La primera estrategia evolutiva es la EEs(1+1) la cual trabaja básicamente con dos individuos, un padre y un descendiente por generación. El descendiente es creado por medio de una mutación del padre, y el mejor de los dos individuos es el que pasa a la siguiente generación (El “mejor” se determina evaluando una función de calidad).

Posteriormente, en 1973 Rechenberg propone la primera estrategia con múltiples individuos la cual fue denominada EEs($\mu+1$), donde μ representa la cantidad de individuos en cada generación y se cumple que $\mu > 1$. En esta estrategia se forma un individuo por medio de recombinación y luego es mutado, este nuevo individuo reemplazará al peor individuo de toda la población.

A continuación nacen las estrategias ($\mu+\lambda$) y ($\mu:\lambda$) propuestas por Schwefel en 1977 y 1981, donde μ representa el número de individuos y λ el número de descendientes. Estas dos últimas estrategias son las más

empleadas en la actualidad, especialmente la EEs($\mu; \lambda$). En el caso de la EEs($\mu+\lambda$), μ padres generan λ descendientes por recombinación y mutación, luego en el proceso de selección la población $\mu + \lambda$ es reducida nuevamente a los μ mejores individuos que pasarán a la próxima generación.

En la EEs($\mu; \lambda$) μ individuos generan λ descendientes ($\lambda > \mu$) y en el proceso de selección se escoge la nueva población μ de los λ individuos generados (generalmente se escogen los μ mejores). En esta estrategia la vida de cada individuo está limitada a una generación. Schwefel recomienda, para esta estrategia, que la relación óptima entre μ y λ debe ser de 1 a 7.

En la estrategia (1+1) la mutación es aleatoria con una regla de control determinista, mientras que en las EEs($\mu+\lambda$) y EEs($\mu; \lambda$) la mutación es autoadaptativa durante todo el proceso.

En las estrategias evolutivas ($\mu+\lambda$) y ($\mu; \lambda$) un individuo viene representado como $\mathbf{a} = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$, donde $\bar{\mathbf{x}}$ es el vector que representa las variables que definen el punto en el espacio (en el caso de optimización de funciones), $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es el vector de las desviaciones estándar y $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ es un vector que contiene los ángulos de inclinación, definiendo correlaciones entre las mutaciones (en el caso que existan). En estas estrategias se utilizan operadores de recombinación y el proceso de selección de los padres es aleatorio.

La mutación en los individuos es realizada después de aplicar la recombinación, y se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma'_i &= \sigma_i \cdot \exp(\tau' \cdot N(0,1) + \tau \cdot N_i(0,1)) \\ \alpha'_i &= \alpha_i + \beta \cdot N(0,1) \\ \bar{\mathbf{x}}' &= \bar{\mathbf{x}} + \bar{N}(\bar{\mathbf{0}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}', \bar{\boldsymbol{\alpha}}') \end{aligned} \quad (1)$$

donde τ' representa un cambio total de la mutación, mientras que el factor τ representa el cambio individual de cada σ_i , Schwefel 1995 sugiere los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \tau &\propto (\sqrt{2\sqrt{n}})^{-1} \\ \tau' &\propto (\sqrt{2n})^{-1} \\ \beta &\approx 0.0873 \end{aligned} \quad (2)$$

Los parámetros $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ determinan la varianza y la covarianza de una distribución normal n-dimensional, lo cual es usado para explorar el espacio de búsqueda.

4 Estrategias Evolutivas Celulares

Las estrategias evolutivas, surgieron como una forma de simulación de la evolución natural para resolver

problemas complejos de optimización que no pueden ser resueltos por métodos convencionales.

En (Medina, 1998a) se propone el término Estrategias Evolutivas Celulares, para describir los algoritmos híbridos que combinan las técnicas de Estrategias Evolutivas y conceptos de Automatas Celulares.

Las Estrategias Evolutivas Celulares conservan la esencia de las Estrategias Evolutivas tradicionales, en particular el operador de reproducción es el mismo y la población inicial se escoge aleatoriamente y se distribuye aleatoriamente, un individuo por celda en todo el espacio celular.

Los aspectos que son generalizados con algunos conceptos y métodos de los autómatas celulares tienen que ver esencialmente con la distribución de los individuos de la población, uno por celda, en un espacio celular bidimensional cuadrado. Tal distribución celular de la población permite introducir el concepto de vecindad e implementar la dinámica evolutiva de manera análoga a la de los autómatas celulares, es decir, la evolución de cada individuo dependerá de aquellos individuos en su vecindad. Esta consideración hace que, en términos evolutivos, la diversidad se mantenga durante más tiempo.

En tal sentido, la selección de los padres a reproducir ocurre dentro del conjunto de individuos de la vecindad considerada, en otras palabras, la selección procede a nivel local y no global (es decir, sobre la población total) como en las Estrategias Evolutivas tradicionales. El tipo de vecindad empleada es un parámetro del algoritmo.

Las características del problema a estudiar en este trabajo y los resultados presentados por (Medina 1998b), que indican que para la optimización de funciones con muchas variables, la estrategia que produce mejores resultados es la Estrategia Evolutiva Celular (μ, λ), nos llevan a seleccionar esta técnica para el proceso de optimización.

Es conveniente recordar que estas técnicas, al ser heurísticas, no garantizan la obtención de un óptimo global. Pero en general, los resultados obtenidos están muy cercanos a los valores globales.

5 Diseño Robusto

5.1 Introducción

En muchas situaciones relacionadas con el diseño de un producto, se utilizan modelos matemáticos para describir sus propiedades. Se puede afirmar que el modelo calcula o predice las consecuencias en función de un vector de propiedades \mathbf{y} y en función de un vector \mathbf{x} de parámetros de diseño (Hendrix 1999).

En esta situación el vector \mathbf{x} de dimensión n representa los n parámetros de diseño o los factores variables del producto y el modelo o función $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ describe las

propiedades (vector de dimensión m). Un vector \mathbf{x}_a con n parámetros arbitrarios constituye un producto.

En general el problema de diseño requiere un proceso de optimización no lineal y se supone que $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ es una función continua. En el enfoque utilizado en este trabajo, este supuesto no es necesario, ya que el proceso de optimización se realiza a través de las Estrategias Evolutivas Celulares.

Otro supuesto normalmente usado es el de considerar que \mathbf{x} varía en forma continua en una región X , llamada región experimental o región de tolerancia. En problemas prácticos los valores de los parámetros se seleccionan a partir de un conjunto finito de valores. Sin embargo, en el presente trabajo la región experimental X está definida por los valores extremos de los parámetros de diseño (límites inferiores y superiores). En el argot tecnológico se utiliza la expresión: “la relación $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ es válida en este rango” (Hendrix). Adicionalmente se supondrá que los extremos de variación de los parámetros son simétricos con respecto a un valor central o nominal.

La expresión “región experimental” se origina en los casos en los que la función $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ se obtiene a partir de experimentos, en laboratorios o mediante computador. Normalmente se utilizan técnicas de Diseños de Experimentos o de Simulación y a partir de éstas se generan metamodelos. En general y como primera aproximación se establecen modelos lineales que pueden ser expandidos posteriormente a modelos con términos cuadráticos (Hendrix 1999, Barker 1985).

En la definición del problema de diseño nos concentraremos en las restricciones del problema. El diseñador especifica valores objetivos de la calidad del producto, definiendo límites inferiores y superiores (LI y LS) para cada propiedad $y_i(\mathbf{x})$. Por tanto el problema de diseño es determinar un producto \mathbf{x} perteneciente a la región experimental que cumpla los requisitos de las propiedades. Para facilitar la formulación matemática se define la función auxiliar $g_i(\mathbf{x})$:

$g_i(\mathbf{x}) = LS_i - y_i(\mathbf{x})$ cuando existe un límite superior o

$g_i(\mathbf{x}) = y_i(\mathbf{x}) - LI_i$ cuando existe un límite inferior.

Existen varias formas de formular el problema de diseño (Barker 1985). En este trabajo nos concentraremos en las restricciones y por tanto no se definirá una función objetivo de las propiedades.

De esta forma el problema clásico de diseño es determinar un elemento de $F \cap X$, con:

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i=1, \dots, m\}$$

La figura 1 muestra un divisor de tensión. La expresión que relaciona a V_{ab} con los elementos que aparecen en el circuito es: $V_{ab} = V_o R / (R + R_a)$

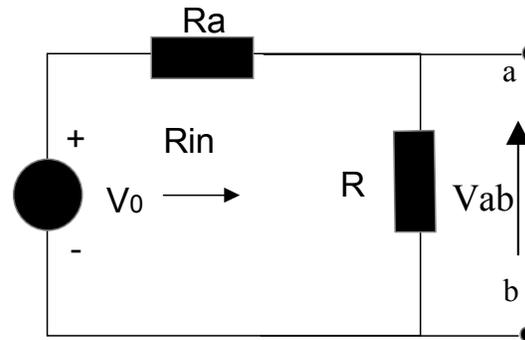


Fig. 1: Divisor de Tensión

Para ilustrar algunas definiciones supondremos que V_o está fijo en 10 Voltios. Supongamos que las especificaciones requieren que V_{ab} esté entre 4.5 y 5.5 Voltios.

El problema es entonces determinar las desviaciones que pueden aceptarse en R y R_a de tal forma que se cumplan las especificaciones. La figura 2 muestra la región de tolerancia inicial para R y R_a . Decimos inicial ya que la misma podrá ser modificada dependiendo del criterio de cálculo, como se menciona más adelante.

Supongamos que además de la especificación de V_{ab} , se requiere que R_{in} esté entre 80 y 120 Ω . La fig. 3 muestra la región de factibilidad (área delimitada por las líneas punteadas) (Spence 1988).

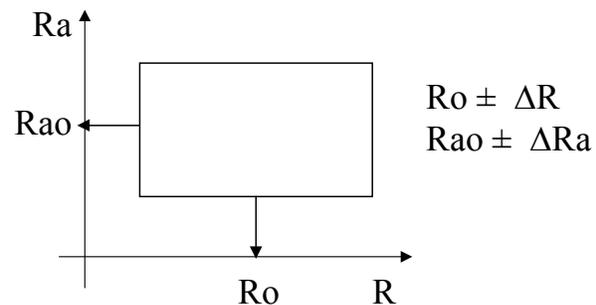


Fig. 2: Región de Tolerancia

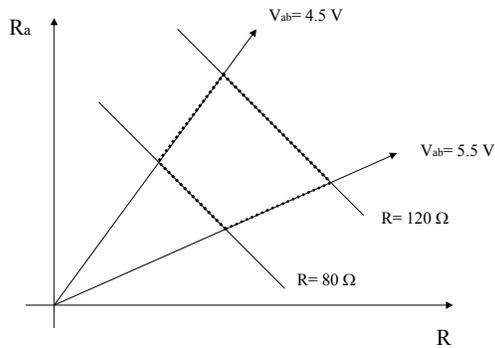


Fig. 3: Región de Factibilidad

Definimos como Diseño Robusto al tamaño máximo de las desviaciones (para cada parámetro) con respecto a un valor nominal que puede tolerarse sin que se produzcan violaciones de las especificaciones.

Esto significa que en vez de contar con el vector x , correspondiente a los valores de diseño nominal, se tiene un producto que presenta en uno o más de sus componentes desviaciones con respecto a los valores nominales. Un diseño x se dice que es robusto si las desviaciones no lo hacen infactible. Nuestro objetivo es entonces determinar el diseño robusto.

En la literatura se han encontrado las siguientes referencia relacionadas con este problema. Hendrix analiza el problema de determinar la máxima desviación posible en cada componente, para regiones de factibilidad exclusivamente lineales. Kristindotir et al definen el concepto de tolerancia alrededor de un punto dado, y utilizan métodos de optimización basados en Aritmética de Intervalos. Spence resuelve el problema de diseño de tolerancia, utilizando técnicas de simulación de Monte Carlo, pero sin garantizar robustez.

A continuación se presenta un análisis detallado de la región de factibilidad y formas de aproximarla, bajo el enfoque de diseño robusto.

5.2 Región factible y descriptores aproximados

Supóngase que para un conjunto de especificaciones el área mostrada en la fig. 4a sea la región de factibilidad, esto es, cualquier par de puntos (x,y) en esta zona satisface nuestro problema.

En general no es sencillo obtener una descripción exacta de la Región de Factibilidad (RF) (figura 4a). Adicionalmente la RF puede estar limitada por funciones no lineales. Por esta razón, se buscan descripciones más sencillas utilizando figuras geométricas como “cajas” o elipsoides que contienen (o sea, acotaciones externas, fig. 4b) o están contenidas (esto es acotaciones internas, fig. 4c y 4d) en la RF.

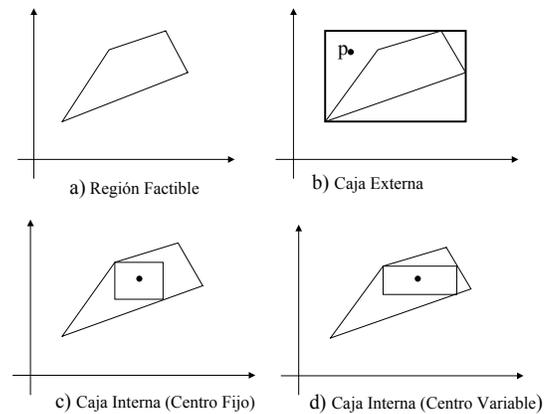


Fig. 4: Región factible y descriptores aproximados

En este trabajo nos interesan, en particular, las cajas internas de máximo volumen (figuras 4c y 4d) (Milanese).

Por tanto analizaremos dos casos para la determinación de la caja interna:

Dado el centro (por ejemplo valores nominales) podemos definir una caja simétrica (fig. 4c). En este caso se obtendrá una caja en la que podemos garantizar que cualquier par (x,y) seleccionado en esta caja cumple con las restricciones del problema.

- a) Es posible determinar el centro de la caja maximizando algún criterio particular, por ejemplo maximizando el área de la caja (fig. 4d). En este caso se obtiene una caja más grande y podemos seguir garantizando que cualquier par (x,y) seleccionado en esta caja cumple con las restricciones del problema.

5.3 Enfoque General

La idea básica en los enfoques mencionados anteriormente es la siguiente:

Dada una función $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y sus valores límites (LI, LS), generamos aleatoriamente un producto (punto) de coordenadas $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$. A continuación verificamos que el punto pertenezca a la región de factibilidad. Si el punto es infactible se genera otro punto y nuevamente se verifica la factibilidad. Si el punto generado es factible se tienen dos opciones:

1) Centro especificado (C)

Se genera una caja simétrica (hiperrectángulo) alrededor de C. Para verificar la factibilidad de la caja generada, es necesario evaluar, por ejemplo, cada vértice de la caja. Si todos los vértices son factibles, se determina el volumen asociado a esa caja. El objetivo es entonces maximizar el volumen de la caja. Si un vértice es infactible se considera que la caja generada es infactible y se procede a generar un nuevo punto.

2) Centro no especificado.

En este caso las coordenadas del centro se consideran como variables adicionales. Por tanto, en el proceso de generación de un punto factible x_1, x_2, \dots, x_n , se generan adicionalmente las coordenadas del centro $C=C_1, C_2, \dots, C_n$. En este caso el individuo tendrá $2n$ componentes.

Como en el caso anterior, si el punto generado es factible, se construye una caja simétrica alrededor de C , se determina la factibilidad de la caja y, de cumplir con la condición de factibilidad, se evalúa el volumen de la caja.

5.4 Enfoque híbrido: Aritmética de Intervalos y Estrategias Evolutivas

Es importante señalar que en los casos relacionados con la generación de la caja interna, se presentan dos problemas:

Evaluar la factibilidad en 2^n vértices (n = número de variables)

Los valores extremos no necesariamente ocurren en los vértices de la región de tolerancia

Por ejemplo, considérese la función $y=x^2-1$ y x en el intervalo $[-2,2]$. Si evaluamos la función sólo en los vértices obtenemos: $y(-2) = y(2)=3$.

Esto significa que, si por ejemplo las especificaciones requieren determinar x para que la función sea mayor o igual que cero, todo el intervalo $[-2,2]$ sería factible. Sin embargo, como se muestra en la figura 5, el rango de la función para x en $[-2,2]$ pertenece a $[-1,3]$.

De esta forma, utilizando solamente la evaluación en los vértices el máximo segmento sería $[-2,2]$.

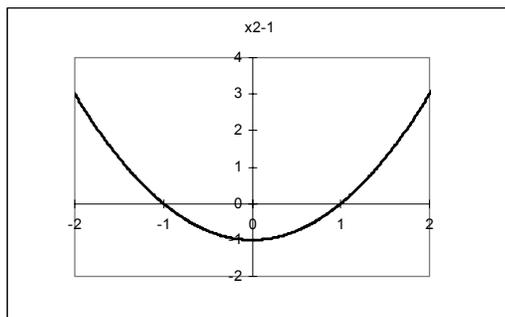


Fig. 5: Rango de la función $y=x^2-1$ para x en $[-2,2]$.

Para corregir estos inconvenientes, se propone utilizar la aritmética de intervalo o alguna de sus variantes. En efecto si la factibilidad se determina usando la técnica de intervalos se tendrán las siguientes ventajas:

- Sólo es necesario realizar una evaluación "intervalo"
- Se obtienen intervalos que garantizan contener el rango de la función

En el ejemplo de la fig. 5, si se evalúa la función $y=x^2-1$ con x en $[-2,2]$ usando intervalos, se obtiene el intervalo $[-1,3]$. Esto indica que el intervalo con x en $[-2,2]$ no pertenece totalmente a la región de factibilidad del

problema. De hecho, los intervalos más grandes factibles corresponden a los segmentos: $[-2,-1]$ ó $[1,2]$.

Es interesante resaltar que en el caso que la región de factibilidad sea no convexa, la utilización de la aritmética de intervalo como herramienta de evaluación de factibilidad considerará esta característica y proporcionará intervalos garantizados.

Por otra parte, en caso que la evaluación con aritmética de intervalos produzca sobreestimación del rango de la función, la caja que se obtendrá garantizará que cualquier punto dentro de esa caja pertenece a la región de factibilidad.

Para poder utilizar las estrategias evolutivas es necesario definir una función de calidad. En los casos propuestos, se desea maximizar el volumen de la caja. Para estos casos se utilizará la siguiente función de calidad:

$$\prod_{i=1}^n abs((x_i - C_i)) \quad (3)$$

Es importante notar que el uso del enfoque evolutivo no garantiza que la caja definida sea la caja de máximo volumen, ya que, como se mencionó anteriormente, las estrategias evolutivas son técnicas heurísticas que no garantizan la optimalidad.

6 Ejemplo: Una Aplicación Financiera

El siguiente ejemplo ilustra la combinación de las técnicas de Validación y el enfoque de Diseño Robusto propuesto, aplicadas a un problema financiero.

El ejemplo analizado en (Brealey 1988) considera la posible introducción en el mercado de un automóvil eléctrico pequeño. La Tabla 1 muestra la previsión de fondos de tesorería, a partir de los valores esperados de cada variable (Tabla 2).

El modelo de cálculo es el siguiente:

Unidades Vendidas (UV) = Cuota Mercado * Tamaño Mercado

INGRESOS = UV * Precio Unitario

Costo Variable (CV) = Costo Variable Unitario * UV

Beneficio antes Impuesto (BAI) = INGRESO - CV - CF - AMORT

Impuesto (IMP) = BAI * 0.50

Beneficio Neto (BNETO) = BAI - IMP

Flujo Operativo (FO) = AMORT + BNETO

VPN = -INVERSION + $\sum (FO / (1 + int)^i)$, $i = 1, \dots, 10$

Si se utiliza una tasa de interés del 10 %, el Valor Presente Neto es de 34.3 Millones de \$.

El staff está interesado en conocer cuál es el efecto del tamaño del mercado, la cuota del mercado y el resto de las variables. Para conocer los resultados, el Departamento de Mercadotecnia realiza estimaciones pesimistas y optimistas de las variables relevantes. Los resultados de las estimaciones son los presentados en la Tabla 2

Brealey (1988) resuelve el problema con el enfoque tradicional de análisis de sensibilidad. Mediante el uso de la Aritmética de Intervalo se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 3. El intervalo de VPN mostrado ([-237.87,402.40]) corresponde a la combinación de los efectos de todas las variables simultáneamente.

La importancia relativa de cada variable, al realizar el análisis de sensibilidad puede evaluarse, en forma cualitativa, si se observa el diagrama de tornado (Rocco 1997) correspondiente (Fig. 6).

Por ejemplo, las variaciones en la variable Cuota Mercado son más importantes que las variaciones en la variable Tamaño de Mercado.

Del análisis de la Tabla 3, es interesante notar que si se permite que las variables se muevan en los intervalos definidos, el VPN variará entre -237 y 402. Naturalmente el decisor desearía obtener valores de VPN positivos. Utilizaremos el enfoque propuesto para definir la región de tolerancia de las variables del modelo para garantizar $VPN \geq 0$.

Tabla 1: Fondos de Tesorería Proyecto Automóvil Eléctrico (Valores en millones de \$) (Brealey 1988)

	AÑO 0	AÑOS 1 a 10
INVERSIÓN	150	
1 – Ingresos		375
2 – Costos variables (CV)		300
3 – Costos Fijos (CF)		30
4 – Amortización		15
5 – Beneficio antes de Impuesto (1-2-3-4)		30
6 – Impuesto		15
7 – Beneficio Neto (5-6)		15
8 - Flujo Operativo (4+7)		30
Flujo Neto	-150	30

Supuestos:

1. La amortización de la inversión es constante a lo largo de 10 años
2. El beneficio es gravado al 50 %

Tabla 2: Estimaciones para las variables

VARIABLE	PESIMISTA	ESPERADA	OPTIMISTA
Tamaño Mercado (TM)	9 millones	10 millones	11 millones
Cuota Mercado (CM)	0.004	0.01	0.016
Precio Unitario (PU)	3500 \$	3750 \$	3800 \$
Costo Variable Unit. (CVU)	3600 \$	3000 \$	2750 \$
Costo Fijo (CF)	40 millones \$	30 millones \$	20 millones \$

Tabla 3: Resultados usando Aritmética de Intervalo

VARIABLE	INTERVALO	INTERVALO VPN (10E6)
TAMAÑO MERCADO (10E6)	[9, 11]	[11.3, 57.3]
CUOTA MERCADO	[0.004,0.016]	[-103.93, 172.5]
PRECIO UNITARIO (\$)	[3500, 3800]	[-42.5, 49.7]

COSTO VARIABLE UNITARIO (\$)	[2750, 3600]	[-150, 111.1]
COSTO FIJO (10 ⁶ \$)	[20, 40]	[3.6, 65]
TODAS (10 ⁶ \$)		[-237.87,402.40]

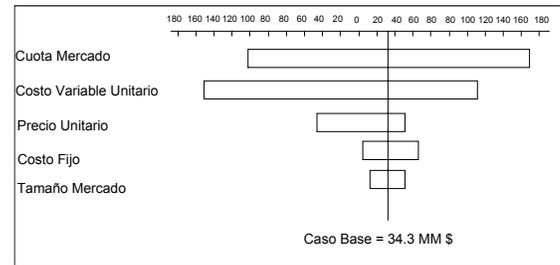


Fig. 6: Diagrama Tornado

En el primer caso utilizaremos el enfoque de determinación de la caja interna con centro definido e igual al valor esperado de los intervalos propuestos (Tabla 2). Utilizando el enfoque propuesto se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 4.

Tabla 4: Resultados Centro Especificado

VARIABLE	Intervalo Inicial	Intervalo Final
TAMAÑO MERCADO (10E6)	[9, 11]	[9.6477,10.3522]
CUOTA MERCADO	[0.004,0.016]	[0.0097,0.01029]
PRECIO UNIT. (\$)	[3500, 3800]	[3729.0702,3770.9297]
COSTO VARIABLE UNITARIO (\$)	[2750, 3600]	[2975.431,3024.568]
COSTO FIJO (10 ⁶ \$)	[20, 40]	[27.8597,32.1402]
RANGO VPN (10 ⁶ \$)		[0.0329,70.9221]

La aplicación del enfoque ha modificado los intervalos iniciales y el rango del VPN es mayor o igual que cero, como se especificó. El máximo VPN que puede obtenerse en este caso (centro definido) está alrededor de 71 MMS.

En el segundo caso utilizaremos el enfoque de caja interna y centro a ser definido. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 5.

Al igual que en el caso anterior, los intervalos iniciales se han modificado y el VPN sigue siendo positivo. Sin embargo el máximo valor que se podría obtener ahora está en el orden de los 360 MMS.

7 Conclusiones

En este trabajo se ha tratado el problema del Diseño Robusto de Tolerancia mediante un enfoque novedoso basado en una metodología híbrida que combina el uso de técnicas de Estrategias Evolutivas y la Aritmética de Intervalo.

El análisis “De la Salida hacia la Entrada” aquí propuesto, combinado con el análisis requerido para

evaluar el efecto de las Entradas en la Salida (“De la Entrada hacia la Salida”), constituyen sin duda alguna una poderosa batería de herramientas con las que el analista debería contar para validar y diseñar modelos.

El enfoque presentado puede ser aplicado a problemas en los que todas o algunas de las restricciones que definen la región de factibilidad sean no lineales, y para regiones de factibilidad convexas o no convexas, garantizando la robustez de la solución.

Debido a que el diseño de un producto depende de la tolerancia de los elementos utilizados (en general a menor variabilidad mayor costo) y con la idea de mantener un costo especificado, el enfoque híbrido presentado puede ser extendido fácilmente para definir diseños (esto es, definir los valores nominales o centros de simetría) en los que las regiones de tolerancias se mantengan fijas.

Tabla 5: Resultados Centro a especificar

VARIABLE	Intervalo Inicial	Intervalo Final
TAMAÑO MERCADO (10E6)	[9, 11]	[9.0867,10.9757]
CUOTA MERCADO	[0.004,0.016]	[0.0122,0.01505]
PRECIO UNITARIO (\$)	[3500, 3800]	[3541.90,3791.77]
COSTO VARIABLE UNITARIO (\$)	[2750, 3600]	[2757.00,2937.37]
COSTO FIJO (10 ⁶ \$)	[20, 40]	[20.06,33.16]
RANGO VPN (10 ⁶ \$)		[0.1672,359.82]

8 Referencias

- Andrade M., Comba J., Stolfi J. 1994, "Affine Arithmetic", Interval 94 Abstract, March 7-10, St. Petersburg, Russia
- Alefeld G., Herzberger J.: 1983, "Introduction to Interval Computations", Academic Press, New York.
- Bäck Th., Schwefel. 1996, H.P.: "Evolutionary Computation: An overview", *Proc. Of the 1996 IEEE Int'l Conf. On Evolutionary Computation (IECC'96)*, Nagoya, Japan, 20-29, IEEE Press, NY.
- Barker T. 1985, "Quality by Experimental Design", Marcel Dekker, Inc., New York.
- Brealey R., Myers S. 1988, "Principios de Finanzas Corporativas", 2da. Edición, McGraw-Hill, Madrid.
- Constantinides A. 1994, "Basic Reliability", Tutorial Session, Annual Reliability and Maintainability Symposium, January 24-27 1994, Anaheim, California, USA.
- Hansen E. 1992, "Global Optimization Using Interval Analysis", Marcel Dekker, Inc., New York.
- Hansen E. 1993, "Computing Zeros of Functions Using Generalized Interval Arithmetic", Interval Computations No. 3, pp. 3-28

- Hendrix E. 1999, "Global Optimization at Work", Landbouwniversiteit Wageningen, Holand.
- Kristindottir B.P., Zabisnky Z.B., Csendes T., Tuttle M.E.: "Methodologies for tolerance intervals", Interval Computing, 3.
- Kursawe F. 1992, "Towards Self-Adapting Evolution Strategies", *Proc. Of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision* Makink, G Tzeng and P. Yu (Eds), Taipei.
- Medina M. 1998, "Estrategias Evolutivas Celulares para la Optimización de Funciones", Tesis de Maestría Investigación de Operaciones, Universidad Central de Venezuela .
- Medina M., Carrasquero N., Moreno J. 1998b, "Estrategias Evolutivas Celulares para la Optimización de Funciones", *IBERAMIA '98, 6º Congreso Iberoamericano de Inteligencia Artificial*, Lisboa, Portugal,.
- Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H (Eds). 1998, "Bounding Approaches to System Identification", Plenum Press, New York.
- Moore R. 1979, "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- Neumaier A. 1990, "Interval Methods for Systems of Equations", Cambridge University Press.
- Ratschek R., Rokne J. June 1980a, "About the Centered Form", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 17, No. 3, , pp. 333-337.
- Ratschek H. October 1980b, "Centered Forms", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 17, No.5, , pp. 656-662.
- Rocco C. 1995, "La Aritmética de Intervalo y su aplicación a algunos problemas de cálculo", Trabajo de Ascenso a Agregado, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Caracas.
- Rocco C. 1997, "Variability Analysis of Electronic Systems: Classical and Interval Methods". *Proceeding of the Annual Reliability and Maintainability Symposium*, Philadelphia, USA.
- Rocco C., A.J. Miller. 1999, " Selection of the Appropriate Technique for Sensitivity/Uncertainty Analysis: A decision tree approach", Probabilistic Safety Assessment, Washington.
- Schwefel H.P, Bäck Th. 1995, "Evolution Strategies I: Variants and their computational implementation", in *J. Periaux and G. Winter (Eds), Genetic Algorithm in Engineering and Computer Science*, John Wiley & Sons.
- Spense R., Singh Soin R. 1988, "Tolerance Design of Electronic Circuits", Addison-Wesley Co., Wokingham,
- Vehi J. 1998, "Anàlisi i disseny de controladors robustos mitjançant intervals modals", Ph.D Thesis, Universitat de Girona.

