

# Influencia del número de Reynolds sobre el campo de flujo alrededor de dos cilindros estáticos configurados en tándem

## Influence of the Reynolds number over flow field around two static circular cylinders in tandem arrangement

Carrero, José A.\* y Rengel, José E.

Centro de Métodos Numéricos en Ingeniería (CMNI), Departamento de Mecánica,  
Universidad de Oriente, Barcelona, Anzoátegui, Venezuela

\*jacarrero@gmail.com

### Resumen

*En este trabajo se desarrolla un procedimiento numérico para estudiar el campo de flujo bidimensional incompresible que incide sobre un par de cilindros circulares fijos, configurados uno tras de otro (tándem). La solución del campo de flujo se obtiene a través del método de los elementos finitos, utilizando el esquema de estabilización conocido como Galerkin Característico (Characteristic Galerkin) para discretizar espacialmente las ecuaciones de Navier-Stokes, mientras que para avanzar temporalmente se utiliza un método de proyección, conocido como método de corrección de velocidad. Las ecuaciones de Navier-Stokes se expresan en variables primitivas. El presente trabajo estudia la influencia de números de Reynolds menores e iguales a 300 y diversas relaciones de espaciamiento entre cilindros, desde el punto de vista de la variación de los coeficientes de fuerzas, la frecuencia de desprendimiento de vórtices o número de Strouhal y el comportamiento de la dinámica de vórtices. Los resultados obtenidos son comparados con resultados experimentales y numéricos obteniendo buena concordancia entre ellos.*

**Palabras clave:** Configuración Tándem, Galerkin característico, corrección de velocidad.

### Abstract

*This paper develops a numerical procedure to study the two-dimensional incompressible flow field incident on a pair of fixed circular cylinders arranged in tandem. The flow field solution is obtained through the finite element method, using the stabilization scheme known as Characteristic Galerkin to spatially discretize the Navier-Stokes equations, while a projection method, known as velocity correction method, is used to transient advance. The Navier-Stokes equations are expressed in primitive variables. The present study examines the influence of Reynolds numbers less and equal to 300 and different gaps between cylinders from the point of view of the variation of the coefficients of forces, the vortex shedding frequency or Strouhal number and behavior dynamics of vortices. The results were compared with experimental and numerical results obtaining good agreement between them.*

**Key words:** Tandem arrangement, characteristic Galerkin, velocity correction.

### 1 Introducción

El flujo alrededor de cilindros agrupados ha sido materia de muchos estudios. La interferencia en el flujo es responsable de varios cambios en las características de las cargas ejercidas por el fluido cuando más de un cuerpo es ubicado en la corriente de flujo. Investigaciones del flujo alrededor de pares de cilindros proporciona un mejor entendimiento de la dinámica de vórtices, distribución de presión y coeficientes de fuerzas, en casos más complejos (Carmo y Meneghini, 2006), (Assi, 2009) y (Morães, 2011).

- En el caso donde existe más de un cuerpo inmerso en una corriente de fluido el comportamiento de la estela de vórtices y las fuerzas resultantes pueden ser totalmente diferentes del comportamiento obtenido cuando sólo un cuerpo es considerado bajo el mismo número de Reynolds (Zdravkovich, 1987).
- En este trabajo se estudia la interferencia originada al sumergir un par de cilindros circulares estáticos, alineados uno tras otro (tándem) tal como se muestra en la Fig. 1, en un flujo viscoso incompresible.

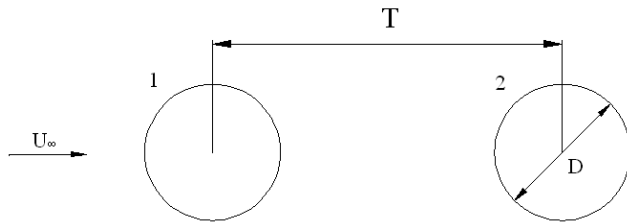


Fig. 1 - Esquema de la configuración de cilindros uno tras otro

En esta configuración, se presenta la interferencia de la estela de vórtices del cilindro aguas arriba (cilindro No. 1) que impacta sobre el cilindro aguas abajo (cilindro No. 2). Como consecuencia de esta interferencia se genera una variación tanto en la frecuencia de desprendimiento de vórtices o número de Strouhal, como también en la distribución de presión sobre los cuerpos y subsecuentemente en las fuerzas asociadas a cada uno de los cuerpos inmersos. Este efecto depende del número de Reynolds y de la separación entre los centros de los cilindros ( $T$ ).

Basado en los trabajos previos sobre la configuración de cilindros alineados uno tras de otro pueden ser identificados diversos regímenes de interferencia. En las investigaciones de (Igarashi, 1981), (Zdravkovich, 1987) y (Sumner y col, 2000), se proponen diversas clasificaciones para estos tipos de regímenes.

En 1987, Zdravkovich (Zdravkovich, 1987) describió tres regímenes diferentes. Se observó que cuando la distancia entre los centros de los cilindros era menor a un rango  $1,2D - 1,8D$ , para un determinado número de Reynolds, la separación del flujo desde el cilindro aguas arriba no era capturada por las paredes del siguiente cilindro, por ello sólo existía la formación de una única estela desde el cilindro aguas arriba. En el segundo régimen se observó que cuando la separación entre cilindros se encontraba en el rango de  $1,2D-1,8D < T < 3,4D-3,8D$ , se formaba una especie de burbuja tras el primer cilindro, ésta es capturada por el cilindro aguas abajo existiendo un reencuentro de las capas cortantes provenientes del cilindro aguas arriba sobre la superficie del cuerpo aguas abajo, por ello la estela de vórtices es esencialmente formada tras el cilindro aguas abajo debido a la separación que se realiza sobre su superficie. Finalmente, en el tercer régimen, para espaciamientos mayores a  $4D$ , el desprendimiento de vórtices ocurre desde ambos cilindros. La estela tras el segundo cilindro es denominada binaria, ya que cada vórtice es formado de la combinación de un vórtice desprendido del cuerpo aguas arriba y otro desprendido del cilindro aguas abajo. En los dos primeros regímenes, la fuerza de arrastre sobre el cilindro aguas abajo es considerablemente más baja que la fuerza de arrastre sobre el cilindro aguas arriba.

En 1981, Igarashi (Igarashi, 1981) presentó una clasificación basada en seis diferentes regímenes de interferen-

cia, los cuales son explicados brevemente a continuación y exhibidos en la Fig. 2. En el régimen (A) las capas cortantes que se separan del cilindro aguas arriba no se alinean con el cilindro aguas abajo; (B) las capas cortantes provenientes del cilindro aguas arriba son capturadas por el segundo cuerpo, sin embargo no existe formación de vórtices en la abertura existente entre ambos cilindros; (C) existe la formación de un par de vórtices simétricos en la abertura que separa a ambos cuerpos; (D) los vórtices formados en la etapa anterior sufren inestabilidades y empiezan a crecer hacia la proximidad del cuerpo aguas abajo; (E) las capas cortantes generadas en el cilindro aguas arriba se deslizan bastante cerca de la superficie del cuerpo aguas abajo; (F) Existe la formación de una estela de vórtices en la abertura que separa a ambos cuerpos y el desprendimiento de vórtices en esta zona se realiza de manera regular.

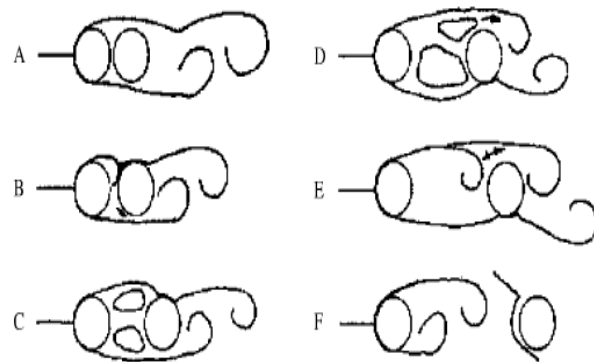


Fig. 2 - Regímenes de interferencia para el flujo alrededor de pares de cilindros en tándem, Igarashi (1981)

Desde el régimen (A) hasta el (D), el coeficiente de arrastre en el cilindro aguas abajo es considerablemente más bajo que el coeficiente hallado en el cilindro aguas arriba. Esto tiene su explicación en el hecho de que en estos regímenes, el cilindro aguas abajo se encuentra inmerso en la estela desprendida por el cilindro que lo antepone y por eso el cuerpo aguas abajo se encuentra en una zona de baja presión. En estos casos, el arrastre en el segundo cilindro es normalmente negativo. Por otra parte, el espaciamiento en el cual el cilindro aguas abajo intercambia el signo del coeficiente de arrastre de negativo a positivo es denominado espaciamiento crítico o espaciamiento de inversión de arrastre, este fenómeno no sólo depende del espaciamiento, sino también del número de Reynolds.

## 2 Formulación matemática

### 2.1 Ecuaciones de gobierno

El flujo viscoso incompresible newtoniano es regido por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones, bajo la descripción Euleriana, en dos dimensiones y en ausencia de fuerzas corporales pueden ser escritas, utilizando nota-

ción indicial, de la siguiente forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

En estas ecuaciones  $u$  representa el campo de velocidad, es decir  $u = u, v^T$ ,  $p$  representa el campo de presión,  $\rho$  es la densidad y  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad cinemática. La ecuación (2), representa la ecuación de continuidad, mejor conocida como restricción de incompresibilidad. Además de estas ecuaciones se debe definir un dominio, al cual se le denotará como  $\Omega$  limitado por fronteras  $\Gamma$ , sobre las cuales se deben imponer condiciones de borde con el fin de que el problema sea totalmente definido (Gresho y col, 1999).

## 2.2 Método de corrección de velocidad

Un método computacional explícito es desarrollado para investigar el flujo viscoso transitorio. La integración temporal es realizada a través del conocido método de corrección de velocidad. Este método es fundamentado sobre la técnica del operador segregado propuesta inicialmente por (Chorin, 1968). Esta técnica ha sufrido, al devenir de los años, ciertas modificaciones con el fin de mejorar su desempeño, tal como se evidencia en los trabajos de (Donea y Huerta, 2003), (Zienkiewicz y Taylor, 1991), (Hughes y Brooks, 1982), entre otros.

El algoritmo del método de corrección de velocidad es resumido tal como sigue:

- En el nivel temporal  $t^{n+1}$  se calcula un campo de velocidad intermedio  $\tilde{u}_i$  a través de una ecuación de Burgers. Se debe destacar que este campo de velocidad no es divergente libre.

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right] dt \quad (3)$$

- La velocidad actual  $u_i^{n+1}$  en el nivel temporal actual se calcula incluyendo el efecto del campo de presión.

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dt \quad (4)$$

En el presente trabajo la integración temporal de la ecuación de Burgers, se lleva a cabo a través del esquema

de Euler hacia adelante, de tal manera que la ecuación (3) puede ser re-escrita como

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (5)$$

La ecuación (4) y la ecuación de continuidad, son combinadas para derivar una ecuación explícita para la presión. La ecuación (4), es integrada en el tiempo obteniéndose.

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (6)$$

al aplicar el operador divergencia a esta última ecuación se tiene

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (7)$$

Pero se debe recordar que el campo de velocidad actual debe ser divergente libre, tal que se satisfaga la condición de incompresibilidad, es así como se obtiene una expresión explícita para la presión.

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} \quad (8)$$

## 2.3 El método de los elementos finitos

Dado que el dominio bajo estudio puede ser dividido en un número finito de pequeños sub-dominios (elementos), entonces todas las cantidades escalares pueden ser aproximadas por funciones de ensayo sobre cada elemento. En este trabajo se utilizaron funciones de interpolación lineales usando además elementos triangulares para la discretización espacial tanto para el campo de velocidad como para el campo de presión. Lo cual se expresa a continuación

$$u = u^h = \sum_{i=1}^N \varphi_i u_i \quad (9)$$

$$p = p^h = \sum_{i=1}^N \varphi_i p_i \quad (10)$$

donde  $\varphi$  representa el polinomio de interpolación (función de ensayo) para cada elemento, mientras que  $u^h$  y  $p^h$  representan la velocidad del fluido y la presión, respectivamente. El uso de interpolación de igual orden para la velocidad y la presión es estable, es decir satisface la condición

de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi, siempre y cuando el término del gradiente de presión en la etapa de predicción sea despreciado, ya que si es tomado en cuenta el uso de interpolación del mismo orden provocaría modos espurios en el campo de presión (Dalheim., 1996).

A continuación se declara la formulación débil del problema.

Hallar  $u_\alpha, p \in H_{\alpha,0}^1$

$$\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} w n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Gamma \quad \forall w \in H_{\alpha,0}^1 \quad y \quad \forall t > t_0 \quad (11)$$

donde  $w$  representa un conjunto de funciones arbitrarias, denominadas función peso. La selección de este conjunto de funciones conduce a distintos métodos de aproximación.

Aplicando la discretización espacial para la velocidad y la presión, ecuaciones (10) y (11), sobre la forma débil, se logra un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, que puede ser expresado en forma matricial como

$$M \frac{\partial u^h}{\partial t} + A(u^h)u^h = -\frac{1}{\rho} Gp^h - \nu Lu^h \quad (12)$$

$$G^T u^h = 0 \quad (13)$$

Al emplear el método de corrección de velocidad sobre las ecuaciones de Navier-Stokes discretizadas espacialmente resulta en el siguiente esquema.

1. Fase de predicción

$$M_L \tilde{U} = M_L U - \Delta t \quad LU + A(U)U \quad (14)$$

2. Fase de cálculo de presión

$$LP^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t} G^T \tilde{U}^n \quad (15)$$

3. Fase de corrección

$$M_L U^{n+1} = M_L \tilde{U} - \frac{\Delta t}{\rho} GP^{n+1} \quad (16)$$

donde  $M_L$  representa la matriz de masa concentrada.

En lo que se refiere al método de estabilización denominado Galerkin Characteristic, este difiere del tradicional esquema de Bubnov-Galerkin, ya que las funciones de peso son formuladas con un término adicional. Las funciones

bases pueden ser formuladas como

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \tilde{p}_i \quad (17)$$

donde  $\tilde{p}_i$  es la función de perturbación definida como

$$\tilde{p}_i = \tau u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad (18)$$

El parámetro de estabilización fue seleccionado como  $\tau = \Delta t / 2$  de tal manera que la función base, la cual será utilizada sobre todos los términos de las ecuaciones para aplicar el esquema de estabilización consistentemente, queda definida como

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{\Delta t}{2} u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad (19)$$

### 3 Resultados numéricos

En esta sección se estudia la interferencia originada al sumergir un par de cilindros circulares rígidos estáticos, idénticos, alineados uno tras de otro, en un flujo viscoso incompresible. El estudio se fundamenta en simulaciones bidimensionales considerando distintas razones de espaciamiento entre los cuerpos así como también para diferentes números de Reynolds, este último definido como:

$$Re = U_\infty L_c / \nu \quad (20)$$

donde, para este caso  $U_\infty$  representa la velocidad libre de perturbación o velocidad en la frontera de entrada como se mostrará más adelante,  $L_c$  es la longitud característica tomada como el diámetro del cilindro.

Se consideran tres diferentes relaciones de espaciamiento  $T = 2D$ ,  $T = 3D$  y  $T = 4D$ . Para cada caso se estudia el efecto que posee el número de Reynolds, para lo que se realizaron ensayos numéricos para valores de este parámetro de 100, 150, 200, 250 y 300, cubriendo el rango de transición de la estela de vórtices.

#### 3.1 Condiciones de fronteras y condiciones iniciales

Tomando en cuenta un dominio computacional rectangular, se definen cinco fronteras distintas tal como se mencionan a continuación.

1. Frontera de entrada de flujo
2. Frontera de salida de flujo o frontera abierta
3. Frontera superior
4. Frontera inferior
5. Frontera interna o superficie de cilindros

Sobre la frontera de entrada de flujo, se impone una

condición del tipo Dirichlet (esencial), para la velocidad. Imponiendo en este caso  $u = U_\infty$  y  $v = 0$ . Este tipo de condición se aplica sobre esta frontera tanto para la velocidad intermedia, en la fase de predicción, así como también para la velocidad real en la fase de corrección.

La frontera de salida de flujo o frontera abierta, deben ser tratadas desde una óptica diferente pues este tipo de frontera es artificial, ya que intenta reducir el dominio computacional asumiendo que el mismo es parte de un dominio físico infinito, para ello se imponen condiciones Dirichlet para la presión bajo la suposición que sobre esta frontera no existen esfuerzos externos aplicados.

Asumiendo que no existen esfuerzos externos aplicados, la condición de frontera en este caso corresponde a la condición libre de tracción.

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = h_i \quad \text{sobre} \quad \Gamma_p \quad (21)$$

donde  $t_i$  representa las tracciones sobre la frontera,  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzo total mientras que  $n_j$  denota un vector unitario el cual apunta hacia fuera de la frontera, en el caso de interés  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 0$ , el tensor de esfuerzo es definido:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Utilizando esta información y desarrollando la Ec. (20) se obtiene.

Tracción en la dirección horizontal

$$t_1 = \left( -p + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) n_1 + \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_2 = 0$$

resultando en

$$p = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (22)$$

Tracción en la dirección vertical

$$t_2 = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) n_1 + \left( -p + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) n_2 = 0$$

Obteniendo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (23)$$

La Ec. (20) proporciona una condición Dirichlet para la presión, utilizando el gradiente de la velocidad desde el paso temporal previo. Por otra parte el producto de la viscosidad dinámica y el gradiente de velocidad produce un valor cercano a cero, por ello utilizar una presión dinámica igual a cero no implica alteración alguna sobre la condición exigida en la Ec. (20). Ahora desde el punto de vista del método de la proyección al imponer una condición esencial para la presión implica imponer una condición natural para el campo de velocidad.

Las fronteras paralelas al flujo, fronteras superior e inferior, pueden ser tratadas de varias formas, una de ellas consiste en aplicar condiciones Dirichlet para ambas componentes de la velocidad tal como en el caso de la frontera de entrada de flujo esto supone a la vez que no existe salida de flujo a través de estas fronteras. Otra alternativa consiste en aplicar condiciones de borde mixtas, es decir, condiciones Dirichlet para la componente vertical de la velocidad  $v = 0$ , y condiciones Neumann para la componente horizontal de la velocidad  $\partial u / \partial y = 0$ . Esta combinación se traduce en una condición de simetría sobre este par de fronteras, (Herfjord, 1995).

En cuanto a las fronteras internas o superficies de los cilindros se imponen condiciones Dirichlet de no deslizamiento, es decir  $u = 0$  y  $v = 0$ . Esquemáticamente, se pueden resumir las condiciones de fronteras utilizadas para este problema en la Fig. 3.

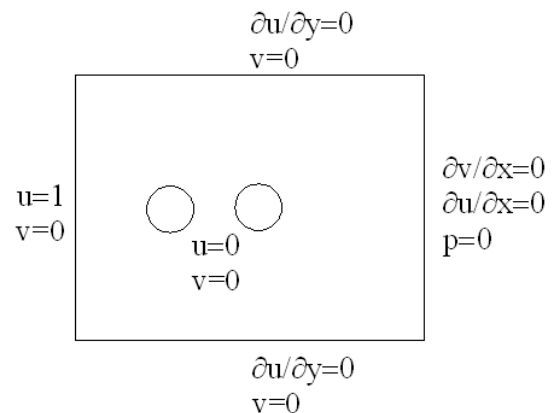


Fig. 3. Condiciones de frontera utilizadas en el presente trabajo

Un aspecto importante para definir correctamente el problema a resolver, radica en la declaración de las condiciones iniciales involucradas en la solución de las ecuaciones (1) y (2). En el caso del procedimiento numérico aplicado en el presente trabajo solo es necesario especificar el campo de velocidades sobre todo el dominio computacional.

$$u_i = u_i \quad t = 0 \quad \text{sobre} \quad \Omega \quad t \quad (24)$$

No existe necesidad de especificar condición inicial para el campo de presión.

### 3.2 Validación de resultados

El desprendimiento de vórtices es un fenómeno tridimensional, sin embargo, simulaciones bidimensionales para números de Reynolds bajos es una buena aproximación para este tipo de problemas y puede ser utilizado para visualizar la dinámica de vórtices en la estela y el desprendimiento que sucede cuando se aborda el problema de cilindros en tándem, adicionalmente, existen pocos estudios de carácter numérico en la literatura en esta materia. Sin mencionar el costo computacional que conlleva una simulación tridimensional.

El dominio computacional utilizado para este problema corresponde a una región rectangular de  $40D \times 50D$ , la longitud aguas arriba es de  $20D$ , mientras que la longitud aguas abajo es de  $30D$ . Por otra parte, los centros de los cilindros se encuentran igualmente separados uno del otro, de acuerdo a la relación de espaciamento estudiada. La razón por la cual la frontera de salida de flujo se encuentra más alejada corresponde al hecho de evitar el reflejo del campo de presión desde esta frontera hacia el interior del dominio, y de esta manera evitar que se contamine la solución del campo de velocidad. Una de las mallas no estructuradas de elementos finitos utilizada en este estudio se muestra en la Fig. 4.

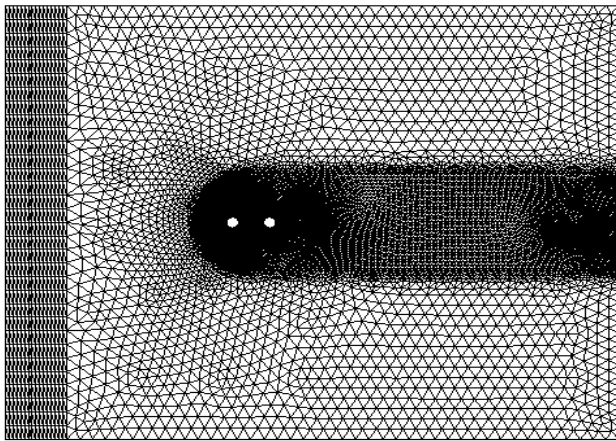


Fig. 4. Malla utilizada para las simulaciones  $T = 3D$

Los elementos adyacentes a la frontera de cada cilindro poseen un tamaño de  $0,02D$ , tomando en cuenta que el diámetro considerado es la unidad (ver Fig. 5 para el detalle de refinación cerca de los cilindros). Esto permite obte-

ner una buena resolución de la capa límite desarrollada en las fronteras de los cuerpos inmersos.

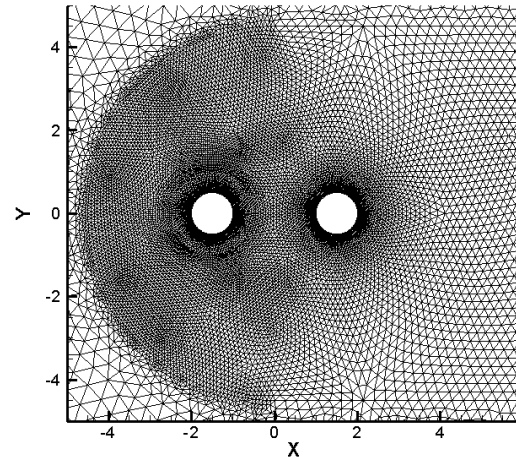


Fig. 5. Detalle de resolución de malla cercana a cilindros

En la Tabla 1, se presentan las características de las mallas utilizadas en función al espaciamento entre centros.

Tabla 1. Características de las mallas utilizadas

T	Número total de nodos	Número total de elementos
2D	23531	46376
3D	19253	37936
4D	24401	48160

Con el propósito de validar los resultados obtenidos a través del código desarrollado, se presenta en la Tabla 2, una comparación entre los parámetros que definen el comportamiento del flujo, para el caso de un número de Reynolds de 200. Entre los parámetros determinados se encuentra el coeficiente de arrastre, el coeficiente de sustentación y el número de Strouhal, valores obtenidos tal como se explica a continuación:

Al determinar el campo de flujo y su vorticidad ( $\omega$ ), se procede a calcular las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos inmersos, a través de las siguientes expresiones:

Fuerza de arrastre

$$F_D = \int_0^{2\pi} p \cos\theta + 2v\omega \sin\theta R d\theta$$

Fuerza de sustentación

$$F_L = \int_0^{2\pi} p \sin\theta - 2v\omega \cos\theta R d\theta$$

estos valores son adimensionalizados, para obtener:

El coeficiente de arrastre

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho DU^2} \quad (25)$$

El coeficiente de sustentación

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho DU^2} \quad (26)$$

Mientras que el número de Strouhal es calculado a través de la siguiente expresión:

$$S_t = \frac{f D}{U_\infty} \quad (27)$$

donde  $f$  representa la frecuencia principal de oscilación de la fuerza de sustentación de cada cilindro.

Tabla 2. Resumen de Coeficientes de Fuerzas y Número de Strouhal para el caso de Cilindros en Tándem,  $Re = 200$

T	Autor	$C_{Dm1}$	$C_{L1}$	$S_{t1}$	$C_{Dm2}$	$C_{L2}$	$S_{t2}$
2D	Presente	1,08	0,017	0,164	-0,192	0,057	0,164
	Meneghini y col (2001)	1,03		0,130	-0,17		0,130
3D	Presente	1,04	0,0329	0,13	-0,113	0,323	0,125
	Meneghini y col (2001)	1,0		0,125	-0,08		0,125
4D	Presente	1,28	0,79	0,172	0,365	1,58	0,172
	Meneghini y col (2001)	1,18		0,174	0,38		0,174

Cada simulación es prolongada hasta obtener un comportamiento consistente y estable del histórico de los coeficientes de fuerzas, con el fin de promediar en el tiempo cada parámetro.

La comparación presentada en la Tabla 2 se realiza con base en los resultados publicados por (Meneghini y col, 2001). La simbología utilizada en la Tabla 2 se describe a continuación:

- $C_{Dm}$  Coeficiente de arrastre promedio.
- $C_L$  Pico del coeficiente de sustentación.
- $S_t$  Número de Strouhal

El subíndice 1 se encuentra asociado al cilindro aguas arriba, mientras que el subíndice 2 se refiere al cilindro aguas abajo.

Se observa que el cilindro aguas abajo posee un coeficiente de arrastre negativo para separaciones menores o

iguales a  $T = 3D$ , esto se debe al hecho de estar sumergido en una región de baja presión. Por otra parte, se observa que al aumentar la separación el coeficiente de sustentación experimenta un incremento sustancial. En general los valores de los parámetros que definen el comportamiento de cilindros en tándem, obtenidos a través del código desarrollado, capturan la naturaleza del problema y se encuentran acordes en relación a los resultados publicados por (Meneghini y col, 2001).

En 2006, Carmo y Meneghini presentaron una serie de resultados para arreglos de cilindros alineados en tándem, tomando en cuenta diferentes números de Reynolds además de distintas relaciones de espaciamiento, sus simulaciones fueron realizadas en dos y tres dimensiones utilizando un método de elementos espectrales.

En la Fig. 6, se presentan los resultados del número de Strouhal en función del número de Reynolds, obtenidos en el presente estudio. En comparación con los resultados publicados por (Carmo y Meneghini, 2006), se observa que para el caso donde el espaciamiento entre cilindro es de  $3D$ , los resultados concuerdan en buena forma, manteniéndose la frecuencia de desprendimiento de vórtices aproximadamente constante (0,125) para  $Re > 150$ , mientras que para el caso donde el espaciamiento corresponde a  $2D$ , comparable al caso de  $1,5D$  publicado por (Carmo y Meneghini, 2006), se observa que la pendiente de la curva es similar en ambos casos, es decir el número de Strouhal crece a medida que el número de Reynolds también crece. Por último, se aprecia diferencia sobre los resultados correspondientes al caso donde el espaciamiento equivale a  $4D$ , comparable a los resultados de  $3,5D$  publicados por (Carmo y Meneghini, 2006), donde los valores obtenidos en el presente trabajo crecen al igual que sucede cuando el espaciamiento es de  $2D$ , mientras que en 2006, Carmo y Meneghini reportaron valores aproximadamente constante entre 0,13 y 0,12 para la gama de Reynolds estudiados.

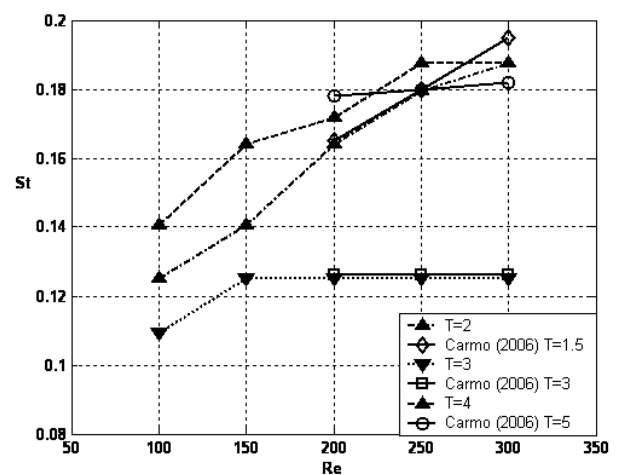


Fig. 6 - Número de Strouhal en función del Número de Reynolds

Tomando como referencia los resultados presentados en la Tabla 3 para un solo cilindro inmerso

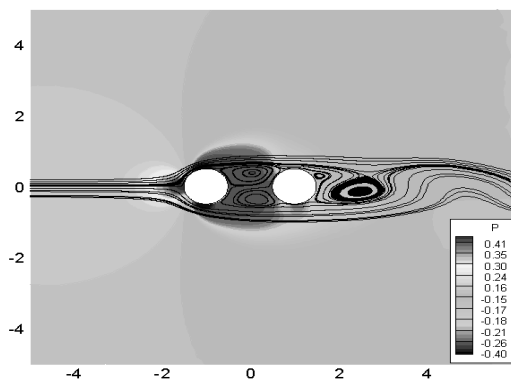
Tabla 3. Resumen de coeficientes de fuerzas y número de Strouhal para el caso de un simple cilindro,  $Re = 200$

Referencia	$C_D$	$C_L$	$S_t$
Presente código	1,38	0,72	0,188
Herford (1995)	1,395	0,57	0,195
Meneghini y col (2001)	1,30	0,47	0,196

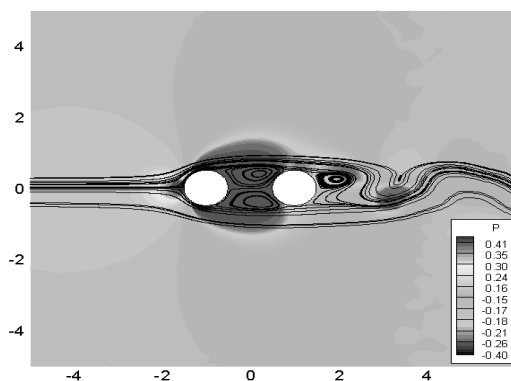
Se debe señalar que los valores de frecuencia de desprendimiento de vórtices para el caso donde se encuentran dos cilindros alineados uno tras de otro (0,164 / 0,13 / 0,172), es inferior, en cualquiera de los espaciamientos estudiados, a los valores hallados para el caso donde sólo se encuentra un cilindro inmerso en el flujo de fluido (0,188).

Como se mencionó anteriormente, para la gama de números de Reynolds estudiados estos solo alcanzan la transición de la estela, es decir se encuentran en el umbral para el desarrollo del flujo turbulencia, aun más se ha diagnosticado que hasta lograr un  $Re > 360$  el flujo sigue estando en transición, (Carmo y Meneghini, 2006).

En la Fig. 7 se muestra el campo de presión instantáneo y superpuesto se presentan las líneas de corriente para la separación correspondiente a  $T = 2D$



(a)  $Re = 100$

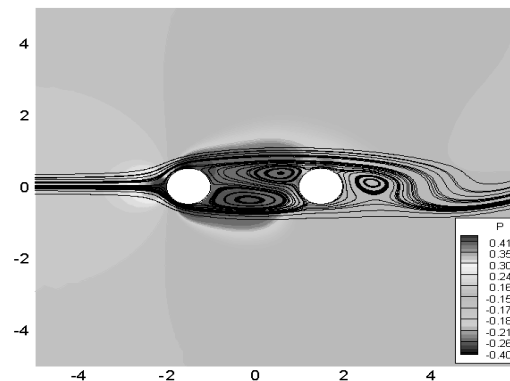


(b)  $Re = 300$

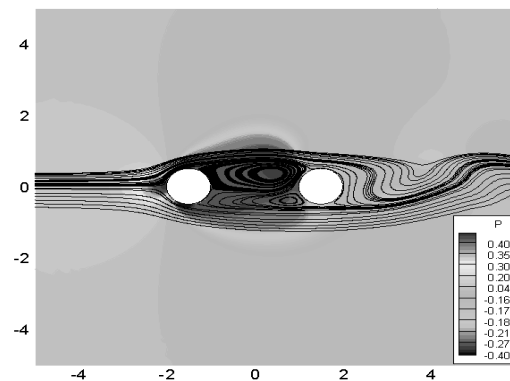
Fig. 7 – Campo de presión y líneas de corriente para  $T = 2D$ : (a)  $Re=100$ , (b)  $Re=300$ .

Se observa en esta última figura la formación de dos vórtices simétricos entre el espaciamiento entre los dos cilindros, característico del régimen C, ver Fig. 2, propuesto por Igarashi en 1981.

En la Fig. 8 se muestra el campo de presión instantáneo y superpuesto se presentan las líneas de corriente para la separación correspondiente a  $T = 3D$ .



(a)  $Re = 100$



(b)  $Re = 300$

Fig. 8 Campo de presión y líneas de corriente para  $T = 3D$ : (a)  $Re=100$ , (b)  $Re=300$

En esta Fig. 8 se aprecia que los vórtices formados en el espacio entre cilindros son inestables y crecen hacia el cilindro aguas abajo, típico del régimen D.

En estas figuras se distingue que el cilindro aguas abajo se encuentra inmerso en una zona de presión negativa, corroborando así que el coeficiente de arrastre determinado para este caso posee un valor negativo.

En la Fig. 9, se presenta el campo de presión instantáneo obtenido para la simulación correspondiente a una razón de espaciamiento de  $T = 4D$ . En ésta se observa que el cilindro aguas abajo se ha alejado de la zona de baja presión



propiciada por la estela de vórtices generada por el cilindro aguas arriba, así como también se observa la formación y desprendimiento de vórtices en la región que separa a ambos cilindros. Este patrón es similar al régimen F.

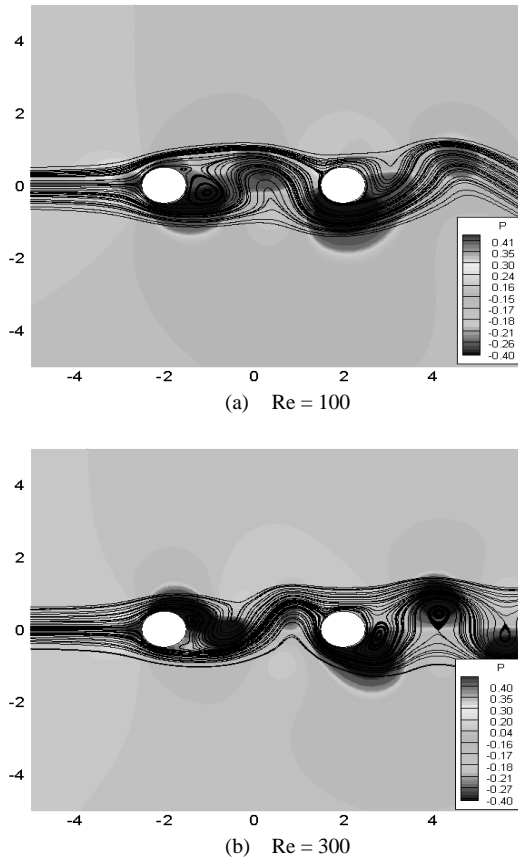


Fig. 9 Campo de presión y líneas de corriente para  $T = 4D$ : (a)  $Re=100$ , (b)  $Re=300$

En la Fig. 10 se presenta el comportamiento del coeficiente de arrastre promedio para el cilindro aguas arriba. Se observa que para separaciones de  $2D$  y  $3D$ , el coeficiente es ligeramente similar para ambos casos, tomando en cuenta el perfil de presión obtenido para estos casos y presentado en las Figs. 7 y 8, se puede explicar que alrededor del cilindro en el caso de una razón de espaciamiento de  $3D$  se encuentra mayormente influenciado por presiones más bajas que el cilindro a un espaciamiento menor, entendiéndose así la pequeña diferencia con respecto a la magnitud. Por otra parte, para la separación de  $4D$ , el coeficiente de arrastre promedio experimenta un incremento con respecto a los valores hallados para las separaciones de  $2D$  y  $3D$ , esto puesto que los vórtices no se encuentran unidos al cilindro provocando esto regiones de presión y vorticidad alternadas en positivas y negativas, siendo las primeras las que poseen mayor presencia sobre la superficie del cilindro, lo cual es característico del desprendimiento de vórtices, por ello también como se observa en la Fig. 6 la frecuencia de desprendimiento

para este caso es mayor que en los casos de menor distancia entre cilindros.

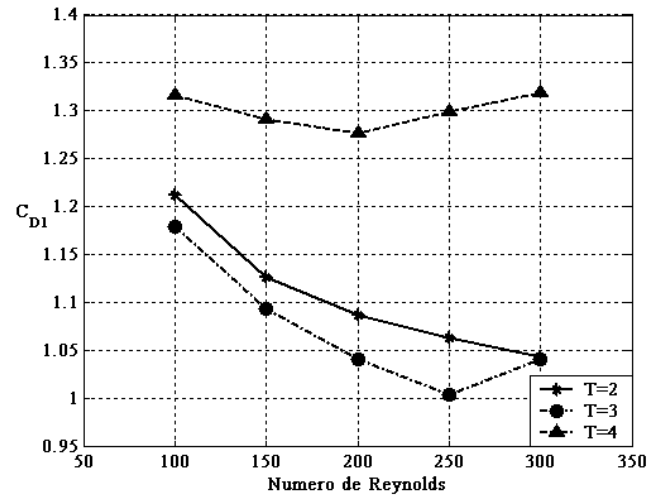


Fig. 10 - Coeficiente de arrastre en función del Número de Reynolds, para el cilindro aguas arriba

El coeficiente de arrastre promedio para el cilindro aguas abajo se presenta en la Fig. 11, en ella se puede observar que para separaciones entre cilindros de  $2D$  y  $3D$  los coeficientes son negativos, esto como consecuencia de estar sujetos a campo de baja presión originado por los vórtices provenientes del cilindro que lo antepone, tal como se puede ver en las Figs. 7 y 8. A medida que los cilindros se acercan el coeficiente de arrastre posee valores cada vez menores (negativos) que decrecen a medida que el número de Reynolds es incrementado, esto ya que la intensidad de los vórtices es menor.

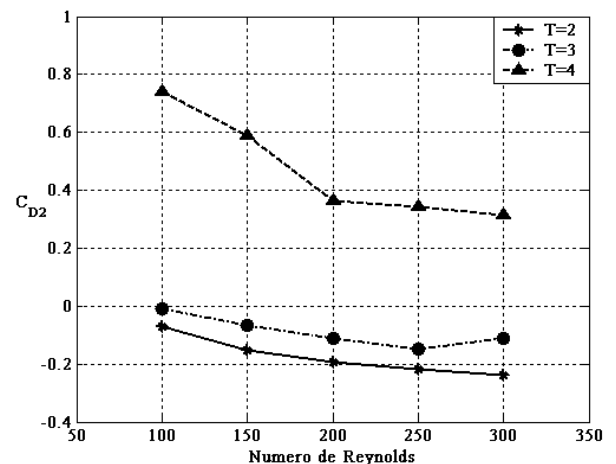


Fig. 11 - Coeficiente de arrastre en función del Número de Reynolds, para el cilindro aguas abajo

En cuanto al coeficiente de arrastre obtenido para la razón de espaciamiento de  $4D$  se observa que existe un decaimiento consistente en cuanto a magnitud a medida que el

número de Reynolds se incrementa, esto se debe al hecho que a medida que el número de Reynolds se incrementa también se incrementa la frecuencia de desprendimiento de vórtices.

#### 4 Conclusiones

La aproximación de las soluciones obtenidas a través del código desarrollado presenta concordancia con los resultados previamente publicados, para los diversos casos afrontados. Esto desde un punto de vista numérico así como también experimental.

Al abordar la interferencia del flujo debido a la inmersión de dos cilindros alineados uno tras de otro, se pudo observar en términos generales que la dinámica de los vórtices coincide con algunas de las clasificaciones halladas en publicaciones anteriores, específicamente para espaciamientos de 2D se visualizaron dos vórtices simétricos adjuntos al cilindro aguas arriba, al aumentar el espaciamiento a 3D se encontró que los vórtices crecían de forma inestable hacia el cilindro aguas abajo, estos resultados se obtuvieron de manera indistinta para la gama de números de Reynolds estudiados. Igualmente, en cuanto a los coeficientes de arrastre para estos dos casos en particular, se obtuvieron valores parecidos para este parámetro en referencia al cilindro aguas arriba, mientras que por otra parte, para el cilindro aguas abajo por estar envuelto en los vórtices que los anteponen se alcanzaron coeficientes promedios de arrastre negativos, los cuales disminuían en magnitud a medida que los esfuerzos viscosos también disminuían.

En relación al espaciamiento de 4D se encontró que los vórtices se desprendían desde el cilindro aguas arriba así como también desde el cilindro aguas abajo, generando una dispersión de puntos con pendiente positiva en la grafica de números de Strouhal contra número de Reynolds. En referencia al coeficiente de arrastre promedio, se puede mencionar que para el cilindro aguas arriba básicamente, este coeficiente permaneció ligeramente constante para los números de Reynolds estudiados, mientras que para el cilindro aguas abajo a medida que el número de Reynolds aumenta este parámetro experimentó un decrecimiento en cuanto a magnitud, sin embargo el mismo se mantuvo positivo, lo cual se presume se debe al hecho que a medida que el número de Reynolds se incrementa también se incrementa la frecuencia de desprendimiento de vórtices y por ello la intensidad con la cual impactan los vórtices a este cuerpo.

De acuerdo a (Carmo y Meneghini, 2006), el efecto tridimensional tiene una influencia sobre la frecuencia de desprendimiento de vórtices, no obstante, para el estudio de la dinámica de vórtices los resultados bidimensionales coinciden en buena forma con los resultados tridimensionales.

Se espera extender este estudio a números de Reynolds mayores, con lo cual se tendrá que aplicar algún modelo de turbulencia, ya que como se mencionó en el texto hasta un  $Re = 360$  la estela se encuentra en transición.

#### Referencias

- Assi, GRS, 2009, Mechanisms for Flow-Induced Vibration of Interfering Bluff Bodies, PhD Thesis, Imperial College London, U.K.
- Hughes TJR, Brooks A, 1982, Streamline Upwind/Petrov Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 199-259.
- Carmo B, Meneghini J, 2006, Numerical investigation of the flow around two circular cylinders in tandem, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 22, pp. 979-988.
- Chorin AJ, 1968, Numerical Solutions of the Navier-Stokes equations, *Mathematical Computations*, Vol. 22, pp. 745-762.
- Dalheim JM, 1996, Numerical prediction of vortex-induced vibration by the finite element method, Dr. Eng. Thesis, NTNU, Norway.
- Donea J, Huerta A, 2003, Finite element methods for flow problems, Editorial John Wiley & Sons.
- Gresho PM, Sani RL, Engelman MS, 1999, Incompressible flow and the finite element method, John Wiley & Sons.
- Herdjord, K, 1995, A study of two-dimensional separated flow by combination of the finite element method and Navier-Stokes equations, Dr. Eng. Thesis, NTNU, Norway.
- Igarashi T, 1981, Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem, *Bulletin of JSME*, Vol. 24 (188), pp. 323-331.
- Meneghini JR, Saltara F, Siqueira CLR, Ferrari JA, 2001, Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders' in tandem and side by side arrangements, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 15, pp. 327-350.
- Morães, PG, 2011, Efeitos de Interferência entre Dois Corpos Idênticos Alinhados com o escoamento, Tesis de Maestría, Universidad Federal de Itajubá, Minas Gerais, Brasil
- Sumner D, Price SJ, Paidoussis MP, 2000, Flow pattern identification for two staggered circular cylinders in cross-flow, *Journal of Fluids Mechanics*, Vol. 411, pp. 263-303.
- Zdravkovich M, 1987, The effects of interference between circular cylinder in cross flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 1, pp. 239-261.
- Zienkiewicz OC, Taylor RL, 1991, The finite element method, Vol. 2, McGraw-Hill.

*Recibido: 23 de noviembre de 2011*

*Revisado: 26 de marzo de 2012*

