

# Modelo promedio de un proceso de lodos activados en alternancia de fases para la remoción de nitrógeno en aguas residuales

## Average modeling of an alternating aerated activated sludge process for nitrogen removal

Belandria, María<sup>1</sup>; Gómez, Claudia<sup>2\*</sup>; Márquez, Richard<sup>2</sup>; y Ríos, Miguel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Sección de Mecatrónica, Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV IPN, México D. F., 07300, México

<sup>2</sup>Departamento de Sistemas de Control, Facultad de Ingeniería, ULA, Mérida 5101, Venezuela  
claudiag@ula.ve

### Resumen

*En este artículo se presenta un novedoso modelo continuo no lineal que aproxima en promedio la dinámica no lineal de un modelo discontinuo del proceso de tratamiento de aguas residuales mediante lodos activados en alternancia de fases (modelo reducido del ASMI). En estos procesos se conmutan sucesivamente en el tiempo las fases de nitrificación (en presencia de aire) y desnitrificación (fase anaeróbica). En particular, se estudia un modelo para eliminar el nitrógeno en el agua residual mediante lodos activados. El modelo promedio mostrado, conformado por un solo conjunto de ecuaciones, logra representar la dinámica conmutada del sistema original, el cual consta de un conjunto de ecuaciones en fase de aireación (período de nitrificación) y de un conjunto de ecuaciones en fase de anoxia (período de desnitrificación), y, además, por ser un modelo único, puede ser fácilmente utilizado para propósitos de análisis, diseño de controladores y estimación.*

**Palabras clave:** Tratamiento de aguas residuales, nitrificación, desnitrificación, lodos activados, promediación.

### Abstract

*In this paper we present a novel average model for alternating (two-phase) activated sludge (AS) models. This kind of processes, where nitrification-denitrification operations occur, are represented by two (switching) consecutive dynamics: an aerobic phase followed by an anaerobic one. In particular, we study a reduced AS model for nitrogen removal. The resulting average continuous model captures the original switched dynamics, without considering the (fast) switching behavior. In contradistinction to (discontinuous) intermittently aerated AS models, the continuous nonlinear AS models thus obtained can be used straightforwardly for analysis, control design and estimation purposes.*

**Key words:** Wastewater treatment processes, nitrification, denitrification, activated sludge models, averaging.

### 1 Introducción

El agua residual es esencialmente el agua contaminada durante los diferentes usos para los que ha sido empleada. Si se permite la acumulación y estancamiento del agua residual, la descomposición de la materia orgánica que contiene genera grandes cantidades de gases malolientes, así como de numerosos microorganismos patógenos y causantes de enfermedades que habitan en el aparato intestinal humano o que pueden estar presentes en ciertos residuos industriales. Es por ello que la evacuación inmediata y sin molestias del

agua residual mediante su tratamiento es no sólo deseable sino también necesaria en toda sociedad industrializada (Metcalf y Eddy, 1995).

El proceso biológico de tratamiento de aguas residuales por lodos activados fue desarrollado en Inglaterra en 1914 por Arden y Locker y actualmente es uno de los procesos de tratamiento biológico más usados, al ser económicamente viable y de una relativamente fácil puesta en marcha. Su nombre proviene de la producción de una masa activada de microorganismos capaz de estabilizar un residuo por vía aerobia.

La complejidad del proceso de lodos activados y la necesidad de resaltar las propiedades más importantes de dicho sistema, han dado origen a modelos altamente no lineales, en los cuales el diseño de leyes o estrategias de control se hace difícil. Motivados por la necesidad de establecer un lenguaje común, que permitiera avanzar en el diseño y control de este tipo de procesos, la International Water Association (IWA) encomendó a un grupo de trabajo el diseño de un conjunto de modelos de lodos activados para la remoción del nitrógeno y del fósforo residual, entre otros compuestos. En 1987 se publica el modelo Activated Sludge Model No. 1 (ASM1), véase (Henze y col., 1987), posteriormente se publicaron otras versiones dentro de las que se encuentran el ASM2, el ASM2d y el ASM3 (Henze y col., 2000).

El modelo ASM1 es uno de los modelos del proceso de lodos activados más ampliamente aceptado y usado por la comunidad científica hoy en día, particularmente en el diseño y evaluación de estrategias de control avanzadas (Devisscher y col., 2006). Muchas estrategias de identificación y control han sido desarrolladas en base al ASM1 más que para el ASM3. Dicho modelo no lineal consta de trece variables de estado y ocho procesos, tomando en cuenta entre sus variables componentes biodegradables y no biodegradables, biomasa autótrofa y heterótrofa, compuestos nitrogenados y la presencia de oxígeno.

Desde una perspectiva de control/observación, el modelo ASM1 no resulta muy atractivo debido a la falta de mediciones en línea, lo que compromete la observabilidad del sistema, y a la dificultad de implementar esquemas de control basados en modelos tan complejos. La complejidad del ASM1 ha originado el desarrollo de modelos simplificados a partir de él. En este trabajo se considera un modelo reducido del ASM1 (RASM1) orientado hacia la disminución de los niveles de nitrógeno propuesto por (Gómez-Quintero, 2002), que garantiza las propiedades de controlabilidad (influencia de las concentraciones de oxígeno disuelto y de sustrato fácilmente biodegradable como variables de control) y de observabilidad (mediciones disponibles de las concentraciones de oxígeno disuelto y de nitrógeno en las formas de nitratos/nitritos y amoníaco). Las variables de proceso representadas por el RASM1 son: la concentración de sustrato fácilmente biodegradable  $S_s$ , las concentraciones de nitratos/nitritos  $S_{NO_3}$  y de amoníaco  $S_{NH_4}$ , y la concentración de oxígeno disuelto  $S_{O_2}$ .

La eliminación biológica de nitrógeno se basa en la conversión de amoníaco a nitrógeno gas, usando para ello los microorganismos presentes en el proceso.

Por consideraciones económicas, los procesos de lodos activados suelen llevarse a cabo en un tanque reactor único donde se generan dos etapas de tratamiento debido a la inyección discontinua de aire, la primera relacionada con el proceso de nitrificación (fase aerobia, donde el aire es inyectado en gran cantidad al reactor con el fin de eliminar los componentes de carbono y nitrados) y la segunda relacionada con el proceso de desnitrificación (fase anoxia, sin

presencia de aire); véase (Gómez-Quintero, 2002). El proceso de lodos activados es mostrado en la Fig. 1.

El funcionamiento del proceso ilustrado en la Fig. 1 puede describirse brevemente de la siguiente manera: en primer lugar, se lleva a cabo la fase aerobia, en la que se inyecta al reactor aire suficiente por un tiempo determinado para remover componentes ricos en nitrógeno (formándose nitratos) y carbono; seguidamente, se detiene la aireación y se añade una fuente adicional de carbono a la mezcla tratada a fin de degradar los compuestos nitrogenados en nitrógeno gaseoso, los que a su vez ayudan a degradar el carbono orgánico. La adición de carbono por fuente externa también puede hacerse durante las dos fases, si el proceso lo requiere.

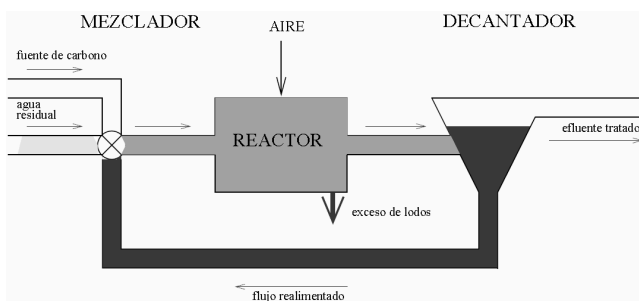


Fig. 1. Esquema del proceso de lodos activados

La configuración del proceso por alternancia de fases en un tanque único deriva en la conmutación de dos submodelos (uno para la fase aerobia y otro para la fase anoxia), que puede interpretarse como un sistema discontinuo difícil de controlar.

En este trabajo se presenta un modelo promedio del RASM1, basado en las técnicas presentadas en (Márquez y col., 2005) y (Sanders y Verhulst, 1985), el cual conserva propiedades importantes del mismo y, además, por ser de tipo continuo puede permitir de manera simple el diseño de leyes de control lineales y no lineales. Este modelo promedio va a constar, en una primera aproximación, de cuatro variables de estado. Luego, bajo ciertas consideraciones, se reduce a dos variables de estado representando solamente las dinámicas del nitrógeno en sus dos formas presentes: nitratos/nitritos y amoníaco.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se describe el modelo reducido del ASM1 estudiado. La sección 3 presenta una introducción a la teoría de promediación. En la sección 4, se deduce el modelo promedio del proceso de lodos activados. El modelo propuesto es, además, simulado en MATLAB® y su comportamiento es comparado con el modelo conmutado RASM1. El estudio de la dinámica del modelo promedio permite proponer en la sección 5 una dinámica de segundo orden (un modelo continuo de solo dos ecuaciones diferenciales), la cual representan adecuadamente el comportamiento de la concentración del nitrato  $S_{NO_3}$  y la del amoníaco  $S_{NH_4}$ . El artículo finaliza con algunas conclusiones acerca de los

modelos propuestos y sus virtudes.

## 2 El modelo reducido ASM1 (RASM1)

El RASM1 es un modelo conmutado, altamente no lineal, constituido por dos submodelos (Gómez-Quintero, 2002). Las variables de estado del proceso son la concentración de sustrato fácilmente biodegradable  $S_s$ , la concentración de nitrato  $S_{NO_3}$ , la concentración de amoníaco  $S_{NH_4}$  y la concentración de oxígeno disuelto  $S_{O_2}$ . Dado que el RASM1 ha sido obtenido para conocer las dinámicas de los componentes nitrogenados, es razonable que las concentraciones de nitrógeno en forma de amoníaco  $S_{NH_4}$  y de nitritos/nitratos  $S_{NO_3}$  estén presentes. Además, se incluye las concentraciones  $S_s$  y  $S_{O_2}$  que, junto a las anteriores, confieren al modelo las propiedades de controlabilidad y observabilidad. En el contexto experimental de este estudio, se dispone de mediciones de las concentraciones  $S_{NO_3}$ ,  $S_{NH_4}$  y  $S_{O_2}$ . Las variables de entrada manipuladas son el coeficiente de transferencia de oxígeno,  $k_L a$ , y la concentración de carbono añadido por una fuente externa,  $S_{Sc}$ . Una descripción de las variables de entrada y de los parámetros del sistema y sus valores típicos se encuentra en el apéndice A.

La estrategia de simplificación del modelo de referencia ASM1, que ha dado como resultado el modelo RASM1, se basa fundamentalmente en el análisis de diversos aspectos bioquímicos del proceso (observación del comportamiento de las variables en el tiempo, comparación de sus dinámicas en el tiempo, influencia de las variables sobre otras variables y las cinéticas de reacción) y en consideraciones adicionales para asegurar las propiedades de observabilidad y controlabilidad del modelo resultante.

Para ciertas condiciones de operación establecidas, estas simplificaciones se han traducido en, por ejemplo, asumir valores constantes de variables del ASM1 cuyas dinámicas evolucionan más lentamente que las variables de interés, en términos de tipo Monod considerados constantes, o en agrupamiento de parámetros para conformar nuevos parámetros del modelo. Para obtener más detalles y una descripción precisa de las condiciones bajo las cuales el modelo RASM1 es válido, véase (Gómez-Quintero, 2002).

El primer submodelo en fase aerobia consta de cuatro ecuaciones y once parámetros, y se distingue porque el coeficiente de transferencia de oxígeno es no nulo,  $k_L a \neq 0$ . Este submodelo está descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{NO_3} = & -(D_s + D_c)S_{NO_3} - \alpha_1 \frac{1 - Y_H}{2,86 Y_H} S_s \\ & \cdot \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \frac{K_{O_2H}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} + \alpha_2 \frac{S_{NH_4}}{S_{NH_4} + K_{NH_4AUT}} \\ & \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2AUT}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{NO_3} = & -(D_s + D_c)S_{NO_3} - \alpha_1 \frac{1 - Y_H}{2,86 Y_H} S_s \\ & \cdot \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \frac{K_{O_2H}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} + \alpha_2 \frac{S_{NH_4}}{S_{NH_4} + K_{NH_4AUT}} \\ & \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2AUT}} \\ \dot{S}_{NH_4} = & D_s S_{NH_{4m}} - (D_s + D_c)S_{NH_4} + \alpha_3 - \alpha_1 i_{NBM} S_s \\ & \cdot \left( \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} + \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \frac{K_{O_2H}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} \right) \\ & - \alpha_2 \frac{S_{NH_4}}{S_{NH_4} + K_{NH_4AUT}} \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2AUT}} \\ \dot{S}_{O_2} = & -(D_s + D_c)S_{O_2} + k_L a (S_{O_2sat} - S_{O_2}) \\ & - \alpha_1 \frac{1 - Y_H}{Y_H} S_s \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} \\ & - 4,57 \alpha_2 \frac{S_{NH_4}}{S_{NH_4} + K_{NH_4AUT}} \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2AUT}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Obsérvese que en esta fase se puede regular la concentración de oxígeno disuelto,  $S_{O_2}$ , o se puede fijar el valor del coeficiente de transferencia de oxígeno,  $k_L a$ . En los casos estudiados en el presente artículo, se trabaja con un valor fijo de  $k_L a$ , por lo que la concentración de oxígeno disuelto varía. Los parámetros  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , son parámetros específicos del modelo reducido que han de ser identificados para ciertas condiciones de operación dadas.

El segundo submodelo resulta de los cambios en el parámetro  $k_L a$  (concentración de oxígeno disuelto):

$$k_L a \begin{cases} \neq 0, & \text{en fase aerobia,} \\ = 0, & \text{en fase anoxia.} \end{cases} \tag{2}$$

En fase anoxia,  $k_L a = 0$ , haciendo que la dinámica del oxígeno tienda muy rápidamente a cero (obsérvese que en la última ecuación de (1) los términos de  $\dot{S}_{O_2}(t)$  son de signo negativo), y por lo tanto  $S_{O_2}(t) = 0$ .

El submodelo resultante en fase anoxia es, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{S}_s = & D_s S_{S_m} + D_c S_{S_c} - (D_s + D_c)S_s - \alpha_1 \frac{1}{Y_H} S_s \\ & \cdot \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} + \alpha_4 \eta_{NO_3h} \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \\ \dot{S}_{NO_3} = & -(D_s + D_c)S_{NO_3} - \alpha_1 \frac{1 - Y_H}{2,86 Y_H} S_s \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \\ \dot{S}_{NH_4} = & D_s S_{NH_{4m}} - (D_s + D_c)S_{NH_4} + \alpha_3 - \alpha_1 i_{NBM} S_s \\ & \cdot \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \\ \dot{S}_{O_2} = & 0. \end{aligned} \tag{3}$$

El comportamiento de la concentración de oxígeno disuelto reflejado por este modelo durante la fase anoxia se sustenta en el hecho de que dicha concentración se hace muy pequeña o nula en un reactor, dado que el oxígeno es consumido en su totalidad (o casi) por los microorganismos presentes en la mezcla. Obsérvese que las dinámicas restantes son sensibles a cambios en la concentración del sustrato fácilmente biodegradable, específicamente a la concentración de carbono añadido por una fuente externa,  $S_{Sc}$ . La descripción detallada de las hipótesis simplificadoras empleadas en este modelo se encuentran en (Gómez-Quintero, 2002) y (Queinnec y Gómez-Quintero, 2009).

En condiciones normales de operación, el comportamiento del modelo RASM1, dado por (1) y (3), es consistente con el proceso real. Sin embargo, es preciso mencionar que en las ecuaciones (1) y (3), para ciertas situaciones muy particulares, podrían generarse concentraciones negativas y riesgo de divergencia en las dinámicas simuladas. Por ello, al hacer la solución numérica del modelo se añade una restricción (no asociada al proceso real) para que todo posible valor de concentración inferior a cero sea nulo.

En la Fig. 2 se muestra el comportamiento del sistema durante un lapso de seis horas. Se observa la alternancia de las dos fases, aerobia (periodo de nitrificación,  $k_L a \neq 0$ ) y anoxia (periodo de desnitrificación,  $k_L a = 0$ ), conmutadas cada hora, lo que hace que se obtenga un periodo  $T = 2$  horas.

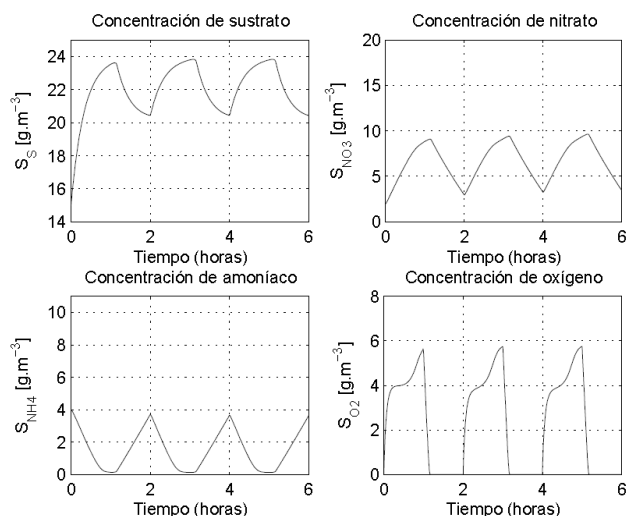


Fig. 2. Respuesta del proceso de lodos activados

La alternancia mostrada permite reescribir el modelo RASM1 (1)-(2)-(3) de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f_{\text{fase aerobia}}(x)u + f_{\text{fase anoxia}}(x)(1-u), \quad (4)$$

donde  $x = (S_s, S_{NO_3}, S_{NH_4}, S_{O_2})$  es un vector columna. La variable auxiliar  $u$ , permite representar la alternancia entre

las fases y posee valores discretos en el conjunto  $\{0,1\}$ : para  $u = 1$ , el sistema está en fase aerobia, y para  $u = 0$ , el sistema está en fase anoxia. Las dinámicas  $\dot{x} = f_{\text{fase aerobia}}(x)$  y  $\dot{x} = f_{\text{fase anoxia}}(x)$  representan, respectivamente, los sistemas de ecuaciones (1) y (3).

En función del período  $T$ , la variable  $u$  puede ser vista como una señal continua a trozos de período  $T$ , es decir,  $u(t+T) = u(t)$  escrita como:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } kT < t \leq kT + \mu T \\ 1, & \text{si } kT + \mu T < t \leq (k+1)T. \end{cases} \quad (5)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$

donde  $\mu T$  es una fracción del período  $T$ ,  $0 < \mu < 1$ . En la Fig. 2,  $\mu = 0,5$ ,  $T = 2$  horas,  $\mu T = 1$  hora. Estas características, aunadas a las no linealidades que presenta el modelo, dificultan el diseño de leyes de control.

### 3 Promediación

La idea de un modelo promedio está asociada a obtener un modelo más simple que mantenga las propiedades importantes de un sistema. La teoría es aplicada a modelos que presentan una dinámica rápida que se desarrolla alrededor de una dinámica lenta y el objetivo es desprestigiar la dinámica rápida y recuperar las propiedades de la dinámica lenta.

En (Khalil, 2000) y (Sanders y Verhulst, 1985), se presentan las definiciones y teoremas que se resumen a continuación.

Es necesario acotar que esta teoría está diseñada para sistemas de tipo continuo, sin embargo, es posible emplearla bajo las condiciones de discontinuidad mostradas en el modelo estudiado (asociadas con funciones continuas a trozos); véanse (Márquez y col., 2005) y (Sontag, 1998, Apéndice C).

Sea  $x = x^*$  un punto de operación del sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$ , tal que  $f(x^*) \equiv 0$ , donde  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable y  $D$  es una vecindad de  $x^*$ . Sea  $A$  la matriz Jacobiana de  $f(x)$  para  $x = x^*$  dada por:

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x) \Big|_{x=x^*}.$$

Entonces,  $x^*$  es asintóticamente estable si la parte real  $\Re(z_i) < 0$  para todos los autovalores  $z_i$  de la matriz  $A$  y es inestable si la parte real  $\Re(z_i) > 0$  para uno o más autovalores de la matriz  $A$ . Véase (Khalil, 2000, Teorema 10.4).

Un punto de operación es llamado hiperbólico si la parte real  $\Re(z_i) \neq 0$ . Que un sistema tenga estabilidad asintótica significa que la solución  $x(t)$  converge a  $x^*$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$ .

**Solución periódica.** Una solución periódica corresponde a la solución  $x(t)$  de  $\dot{x} = f(x)$ , tal que  $x(t+T) = x(t)$  para una constante  $0 < T < \infty$ . Una solución periódica es asintóticamente estable si todas las soluciones tienden a ella.

Sean  $x$ ,  $y$  y  $x_0$  pertenecientes al subconjunto abierto  $D \subset \mathbb{R}$ , sea  $t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ , y sea el parámetro variante  $\varepsilon$  en el intervalo  $[0, \varepsilon_0)$  con  $\varepsilon_0 \ll 1$ . Sea  $f : \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida por partes. Consideremos el problema de encontrar la solución  $x(t)$  de:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x), \quad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Si  $f(t, x)$  es una función periódica con periodo  $T$ , el sistema promedio está dado por:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \tag{7}$$

donde  $f^0(y) = T^{-1} \int_0^T f(t, y) dt$ . La dinámica lenta de la solución periódica  $x(t)$  de (6) corresponde a la solución  $y(t)$  de (7). Cuando  $f(t, x) = f(x)$ , independiente de  $t$ , tenemos además que  $y = x = T^{-1} \int_0^T x(t) dt$ , véase (Khalil, 2000, § 10.4). El componente periódico u oscilatorio de  $x(t)$  alrededor de la dinámica lenta constituye lo que llamamos ‘dinámica rápida’.

**Teorema 1.** (Khalil, 2000, p. 406): Existe un  $\varepsilon_0$  positivo tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  se cumple que:

1.  $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en la escala de tiempo  $1/\varepsilon$ .

2. Si  $x^*$  es un punto de operación estable (asintóticamente estable) para  $f^0$ , entonces  $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$ , y (6) posee una solución periódica única, la cual es hiperbóticamente estable (asintóticamente estable) y pertenece a un entorno  $O(\varepsilon)$  de  $x^*$ .

El teorema anterior presenta la relación entre las dinámicas lenta y rápida de (6). Estrictamente hablando, si todos los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f^0(y)$ , alrededor del punto de operación del promedio (7), tienen parte real negativa, la solución periódica  $\phi(t, \varepsilon)$  correspondiente de (6) es asintóticamente estable para un  $\varepsilon$  suficientemente  $O(\varepsilon)$  pequeño; por otra parte,  $\phi(t, \varepsilon)$  se encuentra en un entorno de  $x^*$ . Si uno de los autovalores tiene parte real positiva,  $\phi(t, \varepsilon)$  es inestable.

#### 4 Modelo promedio del proceso de tratamiento de aguas residuales por lodos activados

La dinámica del RASMI, descrito por la ecuación (4), para un periodo de un día aproximadamente, se muestra en la Fig. 3.

Es posible notar de la Fig. 3 la aparición de dos dinámicas: una rápida, que corresponde a las oscilaciones, y una lenta, que indica la tendencia general (promedio) del movimiento de tales oscilaciones, o dicho de otra forma, se presenta una oscilación (solución periódica asintóticamente

estable) alrededor de un cierto valor promedio.

El teorema 1 justifica la aproximación del RASMI a un modelo promedio. Los sistemas que exhiben este tipo de comportamiento pueden ser estudiados usando la teoría de promediación (*averaging* en inglés) mostrada en la sección anterior; véase, p.ej. (Sanders y Verhulst, 1985). Este enfoque fue aplicado, por ejemplo, por (Márquez y col., 2005) para estudiar un modelo conmutado del comportamiento del TCP (por sus siglas en inglés: *Transmission-Control-Protocol*).

Siguiendo el procedimiento descrito en (Márquez y col., 2005), la función periódica  $u(t)$  del modelo (4) puede ser promediada como  $\mu = T^{-1} \int_0^T u(\sigma) d\sigma$ . Así,  $\mu$  representa una proporción del tiempo de duración de la fase aerobia,

$$0 \leq \mu = \frac{t_{\text{aerobia}}}{t_{\text{aerobia}} + t_{\text{anoxia}}} < 1.$$

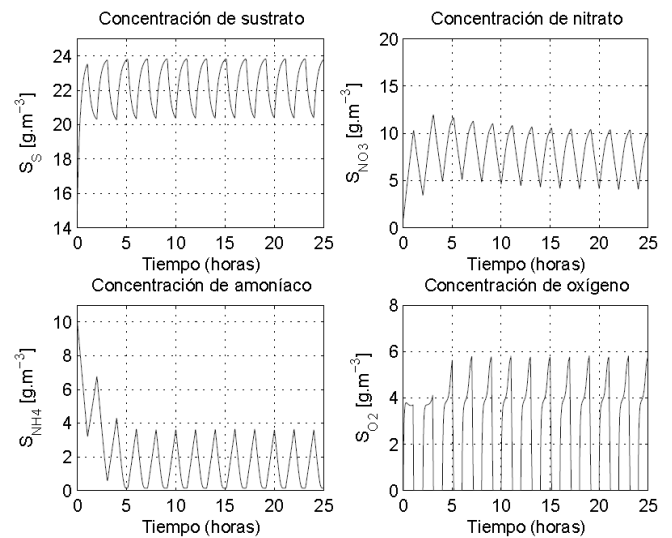


Fig. 3. Respuesta periódica del proceso de lodos activados

De aquí, se obtiene el siguiente modelo promedio:

$$\dot{y} = f_{\text{fase aerobia}}(y)\mu + f_{\text{fase anoxia}}(y)(1-\mu), \tag{8}$$

donde  $y$  representa el vector de estados promedio y en este caso en particular, en el que las fases son alternadas cada hora,  $T = 2$  horas y  $\mu = 0,5$ .

En función de las variables de estado promedio:

$$y_1 - \bar{S}_S,$$

$$y_2 - \bar{S}_{NO_3},$$

$$y_3 - \bar{S}_{NH_4},$$

$$y_4 - \bar{S}_{O_2},$$

el modelo promedio del proceso de lodos activados (8) puede ser escrito explícitamente como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= D_s S_{S_{in}} + D_c S_{S_c} - (D_s + D_c)y_1 + \mu \left( -\alpha_1 \frac{1}{Y_H} y_1 \right. \\
&\quad \cdot \left( \frac{y_4}{y_4 + K_{O_2H}} + \frac{y_2 K_{O_2H}}{(y_2 + K_{NO_3})(y_4 + K_{O_2H})} \right) + \alpha_4 \\
&\quad \cdot \left. \left( \frac{y_4}{y_4 + K_{O_2H}} + \eta_{NO_3h} \frac{y_2 K_{O_2H}}{(y_2 + K_{NO_3})(y_4 + K_{O_2H})} \right) \right) \\
&\quad + (1 - \mu) \left( -\frac{\alpha_1 y_1 y_2}{Y_H (y_2 + K_{NO_3})} + \frac{\alpha_4 \eta_{NO_3h} y_2}{y_2 + K_{NO_3}} \right) \\
\dot{y}_2 &= -(D_s + D_c)y_2 + \mu \left( -\frac{\alpha_1 (1 - Y_H) y_1 y_2}{2,86 Y_H (y_2 + K_{NO_3})} \right. \\
&\quad \cdot \frac{K_{O_2H}}{(y_4 + K_{O_2H})} + \alpha_2 \frac{y_3 y_4}{(y_3 + K_{NH_4AUT})(y_4 + K_{O_2AUT})} \left. \right) \\
&\quad - (1 - \mu) \frac{\alpha_1 (1 - Y_H) y_1 y_2}{2,86 Y_H (y_2 + K_{NO_3})} \\
\dot{y}_3 &= D_s S_{NH_4in} - (D_s + D_c)y_3 + \alpha_3 - \mu \left( \alpha_1 i_{NBM} y_1 \right. \\
&\quad \cdot \left( \frac{y_4}{y_4 + K_{O_2H}} + \frac{y_2 K_{O_2H}}{(y_2 + K_{NO_3})(y_4 + K_{O_2H})} \right) \\
&\quad + \left. \frac{\alpha_2 y_3 y_4}{(y_3 + K_{NH_4AUT})(y_4 + K_{O_2AUT})} \right) \\
&\quad - (1 - \mu) \frac{\alpha_1 i_{NBM} y_1 y_2}{y_2 + K_{NO_3}} \\
\dot{y}_4 &= \mu \left( -(D_s + D_c)y_4 + k_L a (S_{O_2sat} - y_4) \right. \\
&\quad - \frac{\alpha_1 (1 - Y_H) y_1 y_4}{Y_H (y_4 + K_{O_2H})} \\
&\quad \left. - \frac{4,57 \alpha_2 y_3 y_4}{(y_3 + K_{NH_4AUT})(y_4 + K_{O_2AUT})} \right). \tag{9}
\end{aligned}$$

En la Fig. 4 se compara, mediante una simulación en MATLAB®, la dinámica del modelo RASMI con la dinámica del modelo promedio. El sistema es simulado durante 48 horas. Se observa que el modelo promedio aproxima la dinámica lenta del modelo original y conserva algunas propiedades importantes del sistema, tales como el tiempo de respuesta.

Una de las principales ventajas que presenta el modelo promedio es la existencia de puntos de equilibrio. En la simulación se observa que el modelo promedio se estabiliza en un punto de operación específico, a diferencia del RASMI que se encuentra constantemente oscilando en un rango de valores.

El punto de equilibrio se puede calcular numéricamente<sup>1</sup> del modelo promedio, haciendo cero las derivadas  $\dot{y}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en el sistema de ecuaciones (9) de forma que se obtiene:

$$y_1^{eq} = 22,1 \text{ g.m}^{-3},$$

$$y_2^{eq} = 4,80 \text{ g.m}^{-3},$$

$$y_3^{eq} = 0,80 \text{ g.m}^{-3},$$

$$y_4^{eq} = 4,40 \text{ g.m}^{-3}.$$

Este punto se puede verificar en la simulación mostrada en la Fig. 4. Nótese que en el modelo RASMI no hay una forma directa de obtener valores promedio o valores de equilibrio razonables.

Se aprecia que el modelo promedio captura adecuadamente el comportamiento de la dinámica promedio del RASMI. En particular, el punto de equilibrio obtenido ofrece una aproximación del lugar alrededor del cual operan las oscilaciones del modelo conmutado RASMI.

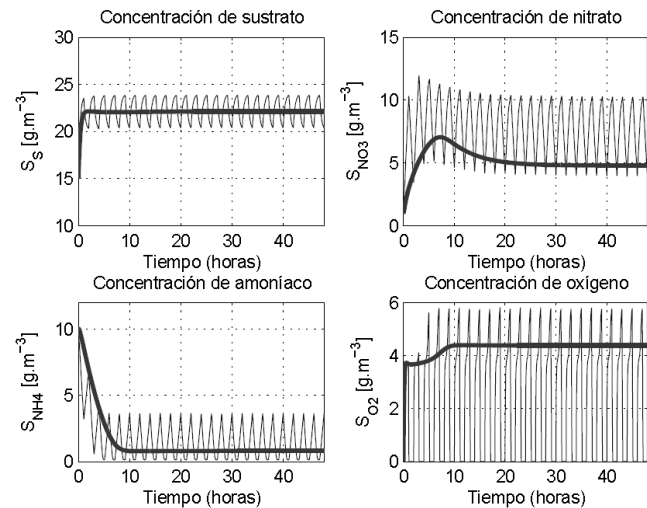


Fig. 4. Comparación entre el modelo RASMI (en línea fina) y el modelo promedio (en línea gruesa) del proceso de lodos activados.

## 5 Modelo promedio de segundo orden

Observando los comportamientos de las dinámicas de los estados del sistema en el modelo promedio de la Fig. 4 (en línea gruesa), es evidente que, para los parámetros bajo estudio, los tiempos de respuesta del sustrato ( $S_S$ ) y del oxígeno ( $S_{O_2}$ ) son considerablemente menores (más de diez veces inferiores<sup>2</sup>) que los tiempos de respuesta de los otros dos estados ( $S_{NO_3}$  y  $S_{NH_4}$ ); es decir,  $S_S$  y  $S_{O_2}$  alcanzan el equilibrio casi de inmediato.

De esta manera, se puede aproximar el modelo promedio a un modelo de segundo orden donde se considera sólo

<sup>2</sup> Se considera que en un tiempo muy cercano a cero la dinámica del oxígeno se encuentra en un valor cercano a su valor final aunque no se haya estabilizado del todo. De forma precisa, si se analiza la ubicación de los polos del sistema linealizado dados por:

$$\lambda_1 = -2,9383, \lambda_2 = -0,1506, \lambda_3 = -0,9680, \lambda_4 = -6,8142,$$

se puede notar que los polos son, en magnitud, mucho mayores a los de las otras dos dinámicas, por lo que las dinámicas  $y_1$  y  $y_4$  son al menos 10 veces más rápidas que las dinámicas correspondientes a  $y_2$  y  $y_3$ .

<sup>1</sup> De acuerdo a nuestros cálculos, no es posible obtener una solución analítica inmediata.

la dinámica de  $y_2 = S_{NO_3}$  y  $y_3 = S_{NH_4}$ . En este caso, se asume que los estados restantes son considerados en equilibrio ( $y_1 = y_1^{eq}$ ,  $y_4 = y_4^{eq}$ ). Es interesante mencionar que este resultado (a través del cual se reemplaza la dinámica de cuarto orden por una dinámica más simple de segundo orden) no es posible de deducir directamente de las ecuaciones del modelo conmutado RASM1 ni de su comportamiento dinámico (véase la Fig. 3). Esta propiedad puede ser usada, como se muestra en (Belandria-Carvajal y col., 2010), en el diseño de un controlador por realimentación de salida basado en la medición de  $y_2 = S_{NO_3}$ .

La Fig. 5 compara, mediante simulación, las dinámicas del modelo promedio original y del modelo promedio reducido (de segundo orden) durante 48 horas. Se observa que las respuestas de los estados  $y_2$  y  $y_3$  para ambos modelos son similares; este resultado valida el uso de la aproximación mencionada.

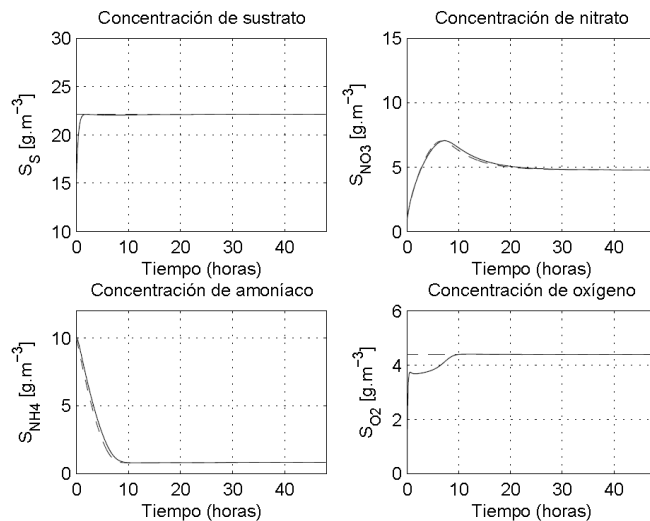


Fig. 5. Comparación entre el modelo promedio (en línea continua) y el modelo promedio reducido (en línea punteada)

## 6 Conclusiones

En este artículo se presentó un novedoso modelo continuo no lineal que aproxima en promedio la dinámica no lineal de un modelo discontinuo del proceso de tratamiento de aguas residuales mediante lodos activados en alternancia de fases (RASM1). Este modelo es válido bajo las mismas suposiciones y condiciones de operación definidas para el RASM1, es decir, para representar las dinámicas de las concentraciones estudiadas en puntos de operación cercanos al punto de calibración, en el que las variables del proceso no consideradas por el RASM1 se mantienen aproximadamente constantes y cuyas dinámicas son más lentas que las representadas por este último. Por consiguiente, no debe utilizarse para tareas de dimensionamiento o para explorar el comportamiento del proceso en condiciones de operación muy diferentes.

De acuerdo a nuestra revisión de la literatura no existe

un modelo continuo similar al presentado o, al menos, obtenido bajo un procedimiento analítico como el propuesto.

El modelo propuesto exhibe la dinámica lenta del modelo RASM1. Mediante simulaciones numéricas se comparó la dinámica del modelo discontinuo original y el nuevo modelo promedio, mostrando este último una dinámica aceptable para las concentraciones de nitratos/nitritos y amoníaco (que son el punto de interés del RASM1). El enfoque de promediación presentado podría ser aplicado al conocido modelo ASM1 o al ASM3, bajo las condiciones de alternancia de fases estudiadas en este trabajo.

Una virtud esencial del modelo promedio obtenido es, a diferencia del modelo discontinuo, su empleo inmediato para el diseño de una amplia gama de leyes de control, como se muestra en una aplicación hecha por (Belandria-Carvajal y col., 2010). Una propiedad adicional, obtenida basados en los parámetros estudiados en este trabajo, es la de poder analizar los autovalores de la dinámica de la linealización del sistema promedio; esto permitió aproximar el modelo no lineal de cuarto orden por un modelo no lineal de segundo orden<sup>3</sup>, que exhibe mayor simplicidad y además sigue representando satisfactoriamente la concentración de nitrógeno en sus formas de nitratos/nitritos y de amoníaco.

Es importante resaltar que la importancia de un modelo promedio, como los obtenidos en este trabajo, radica en el hecho de poderlos incorporar a algoritmos de control y/u optimización más sofisticados, cuya acción se logra a mediano o largo plazo, en los cuales la alternancia de fases dificulta la convergencia del sistema.

El enfoque de modelo promedio presentado genera un modelo satisfactorio incluso en el caso de que  $S_{Sc} = 0$  o sea no nulo durante ambas fases. Igualmente, el modelo propuesto puede servir para el caso de que la duración de una fase sea mayor que la otra ( $\mu \neq 0,5$ ), estrategia también empleada para regular las concentraciones de determinados compuestos en los procesos por lodos activados.

## Referencias

- Belandria-Carvajal M, Gómez-Quintero C, Márquez R y Ríos-Bolívar M, 2010, Control por realimentación de salida de un proceso de tratamiento de agua con lodos activados en alternancia de fases, XIV Congreso Latinoamericano de Control Automático, Santiago de Chile, Chile.
- Gómez-Quintero C, 2002, Modélisation et estimation robuste pour un procédé boues activées en alternance de phases, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS), Toulouse, Francia.
- Devisscher M, Ciacci G, Fé L, Benedetti L, Bixio D, Thoeve C, De Gueldre G, Marsili-Libelli S, Vanrolleghem P A, 2006, Estimating costs and benefits of advanced control for wastewater treatment plants - the MAGIC method-

<sup>3</sup> En Belandria-Carvajal y col. (2010) se aproxima incluso por el correspondiente sistema lineal de segundo orden.

ology. Water Science and Technology, Vol. 53 (4-5), pp. 215-223.

Henze M, Grady CL, Gujer W, Marais G y Matsuo T, 1987, Activated sludge model. Technical Report, Scientific and Technical Report No.1, IWA, Task Group on mathematical modeling for design and operation of biological wastewater treatment, Londres.

Henze M, Gujer W, Mino T y van Loosdrecht M, 2000, Activated sludge models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3. Technical Report, Scientific and Technical Report No. 9, IWA, Task Group on mathematical modelling for design and operation of biological wastewater treatment, Londres.

Khalil H, 2000, Nonlinear Systems, Prentice-Hall, New Jersey, 3ra. edición.

Márquez R, Altman E y Solé-Álvarez S, 2005, Time-averaging of high-speed data transfer protocols, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 50, No. 12, pp. 2065–2069.

Metcalf K y Eddy I, 1995, Ingeniería de aguas residuales: Tratamiento, vertido y reutilización. Vol. 1, McGraw-Hill Interamericana, Madrid.

Queinnec I y Gómez-Quintero C, 2009, Reduced modeling and state observation of an activated sludge process, Biotechnology Progress, Vol. 25, No. 3, pp. 654–666.

Sanders J y Verhulst F, 1985, Averaging Methods in Non-linear Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York.

Sontag E, 1998, Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, Appendix C. Springer-Verlag, New York.

## 7 Apéndice A. Variables de entrada y parámetros del proceso de lodos activados

Las variables consideradas como entradas no controladas del proceso son descritas en la tabla A.1.

Los valores de los parámetros físicos del sistema fueron tomados de (Gómez-Quintero, 2002) y se muestran en la tabla A.2.

Tabla A.1 Variables de entrada para el proceso de lodos activados

Parámetro	Descripción	Valor
$S_{S_m}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Concentración de sustrato fácilmente biodegradable en el agua que entra al reactor	17,5
$S_{NH_{4m}}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Concentración de amoníaco en el agua que entra al reactor	35,0
$D_s$ [día <sup>-1</sup> ]	Tasa de dilución relativa de sustrato a la entrada del proceso	2,58
$D_c$ [día <sup>-1</sup> ]	Tasa de dilución relativa de carbono a la entrada del proceso por fuente externa	1,60×10 <sup>-2</sup>
$k_{La}$ [día <sup>-1</sup> ]	Coefficiente de transferencia de oxígeno	300
$S_{Sc}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Concentración de carbono añadido por fuente externa	1,00×104

Tabla A.2 Parámetros del proceso

Parámetro	Descripción	Valor
$i_{NBM}$ [g.g <sup>-1</sup> ]	Masa de nitrógeno contenido en las concentraciones de biomasa autótrofa y heterótrofa	0,080
$K_{NH_{4AUT}}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Coefficiente de saturación media de amoníaco para la biomasa autótrofa	0,25
$K_{NO_3}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Coefficiente de saturación media de nitrato	0,50
$K_{O_2AUT}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Coefficiente de saturación media de oxígeno para la biomasa autótrofa	0,40
$K_{O_2H}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Coefficiente de saturación media de oxígeno para la biomasa heterótrofa	0,20
$S_{O_2sat}$ [g.m <sup>-3</sup> ]	Concentración de saturación de oxígeno disuelto	9,0
$Y_H$ [g.g <sup>-1</sup> ]	Coefficiente de rendimiento de la biomasa heterótrofa	0,67
$\alpha_1$ [día <sup>-1</sup> ]	Parámetro específico del modelo reducido	46,91
$\alpha_2$ [g.m <sup>-3</sup> .día <sup>-1</sup> ]	Parámetro específico del modelo reducido	276,73
$\alpha_3$ [g.m <sup>-3</sup> .día <sup>-1</sup> ]	Parámetro específico del modelo reducido	87,54
$\alpha_4$ [g.m <sup>-3</sup> .día <sup>-1</sup> ]	Parámetro específico del modelo reducido	1546,8
$\eta_{NO_3h}$	Factor de corrección para la hidrólisis en fase anoxia	0,80

**Recibido:** 08 de octubre de 2011

**Revisado:** 28 de marzo de 2012



