

Solución de un problema inverso en difusión unidimensional

Solving an inverse problem in one-dimensional diffusion

Tempo, Ruth ¹; Rujano, José ² y Torres-Monzón, Carlos ²

¹Departamento de Medición y Evaluación. Facultad de Humanidades. ULA

²Departamento de Ciencias Térmicas. Facultad de Ingeniería. ULA

Mérida, 5101 - Venezuela

ctorres@ula.ve

Resumen

Este trabajo presenta un método de solución para el problema inverso de difusión unidimensional, capaz de predecir los flujos y distribución en un dominio gobernado por una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico con condiciones de frontera. Para hacer esto, se determinan los coeficientes de sensibilidad a través de la resolución de un sistema de mínimos cuadrados modificado, aplicando la solución del problema directo unidimensional de difusión usando el teorema de Duhamel, y se consideran medidas de distribución tomadas en el dominio del tiempo. Se demuestra que este método provee una técnica numérica eficiente y estable, que permite determinar aproximaciones del flujo aplicado mediante la medición de una data en el dominio.

Palabras clave: Problema inverso, ecuación de difusión, regularización.

Abstract

This paper presents a solution method for the inverse problem in one-dimensional diffusion, able to predict the flow and distribution in a domain governed by a partial differential equation of parabolic type with boundary conditions. In order to do this, the sensitivity coefficients are determined by solving a modified least squares system, applying the direct solution of the one-dimensional diffusion problem using the Duhamel problem, and considering distributed measures taken in the time domain. It is shown that this method provides an efficient numerical technique to determine the applied flow approximations by measuring data in the domain.

Key words: Inverse problem, diffusion equation, regularization.

1 Introducción

El problema inverso es encontrado en diversas ramas de las ciencias e ingeniería. En el campo de transferencia de calor, el uso de análisis inverso tiene numerosas aplicaciones prácticas en la estimación de condiciones iniciales, fuentes de calor estáticas o en movimiento, condiciones de frontera, y también en la determinación de propiedades físicas tales como la conductividad térmica y calor específico de sólidos sujetos a condiciones térmicas transitorias; por ejemplo, la medida directa de flujo de calor en la superficie de una pared sujeta a una llama, o en el interior de una cámara de combustión. En tales situaciones, el método de análisis inverso recoge medidas de temperatura transitoria tomadas en una o más posiciones del sólido, como data para comenzar el trabajo inverso. La principal dificultad en la solución del problema inverso es que ellos son mal planteados matemáticamente, lo que comúnmente se conoce como

ill-posed; esto significa que la solución tiende a ser inestable bajo pequeñas perturbaciones en la data entrada. Esta dificultad es aumentada cuando el intervalo de tiempo entre las mediciones es reducida (Beck y Blackwell, 1985).

Afortunadamente, muchos métodos han sido presentados para resolver problemas inversos. Entre los métodos más versátiles, aplicables para resolver problemas inversos no lineales multidimensionales, se encuentran:

- La regularización de Tikhonov y Arsenin (1977) y la regularización iterativa de Alifanov (1994). Ambas son consideradas como métodos de dominio completo, porque toda la data de distribuciones medidas es usada en orden de estimar simultáneamente todas las componentes de la entrada desconocida.
- Beck y Murio (1986), presentaron una nueva técnica que combinó el método de especificación de función (Beck y Blackwell, 1985), con la regularización de Tikhonov y Arsenin (1977).

- Murio y Paloschi (1988), propusieron un procedimiento basado en el filtrado de la data.
- Özisik y Orlande (2000) presentaron una revisión amplia de los métodos generalmente asociados con la solución directa del problema inverso.
- Shenefelt et al. (2002), obtuvieron una solución al problema inverso de conducción de calor empleando descomposición de valores singulares.
- Velamur y Zabaras (2004), propusieron una técnica de optimización funcional en conjunto con el método de los elementos finitos espectrales estocásticos para la solución del problema inverso con incertidumbre en la data de entrada.
- Gutiérrez et al. (2005), reportaron una secuencia de algoritmos del problema de conducción de calor usando descomposición de valores singulares.

En el presente trabajo se resuelve el problema inverso de difusión unidimensional, usando la forma matricial del principio de Duhamel, a partir de medidas de distribución tomadas en el dominio. El estudio se centra en la determinación de los coeficientes de sensibilidad, a través de la solución de un sistema de mínimos cuadrados, aplicando la solución directa del problema unidimensional de difusión, que expresa la relación entre la respuesta del modelo y la entrada en una frontera desconocida.

2 El problema directo de difusión unidimensional

El problema de difusión se ocupa de la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica que gobierna un proceso conservativo donde el flujo es representado por la ley de Fick, con condiciones iniciales y de borde independientes del tiempo, (Farlow, 1993 y Logan, 1996). En este caso el desarrollo del problema es simple, y puede ser resuelto por varios métodos analíticos, entre ellos: separación de variable, desarrollo de Fourier, función de Green entre otros (Logan, 1996). Por otra parte, el teorema de Duhamel permite extender la solución del problema de difusión simple cuando las condiciones de borde dependen del tiempo (Farlow, 1993). Parte de este principio se usa en este trabajo para obtener la solución del problema inverso unidimensional.

Considérese el dominio de una unidad de longitud tal cual como lo indica la figura 1. Supóngase que se aplica un flujo $\gamma(t)$ en la posición $x=0$, y se desea hallar la distribución $\theta(x,t)$. La formulación matemática de este problema está dada por el sistema que a continuación se expone:



Fig. 1. Flujo conocido en el extremo $x=0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} & 0 < x < 1 & \quad t > 0 \\ -\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} &= \gamma(t) & x = 0 & \quad t > 0 \\ \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} &= 0 & x = 1 & \quad t > 0 \\ \theta(x,t) &= 0 & 0 \leq x \leq 1 & \quad t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Para resolver el sistema representado en (1), a través del principio de Duhamel, se considera a su vez la solución del problema simplificado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} & 0 < x < 1 & \quad t > 0 \\ -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} &= 1 & x = 0 & \quad t > 0 \\ \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} &= 0 & x = 1 & \quad t > 0 \\ w(x,t) &= 0 & 0 \leq x \leq 1 & \quad t = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

El sistema (2), fue resuelto por Myres (1976) aplicando transformada de Laplace y usando una serie binomial:

$$w(x,t) = \frac{1}{3} - x + \frac{x^2}{2} + t - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos x\pi n}{n^2} e^{-t n\pi^2} \right] \tag{3}$$

Ahora, el problema original (1), puede ser resuelto mediante la aplicación del teorema de Duhamel (Özisik, 1992):

$$\theta(x,t) = \int_0^t \gamma(\sigma) \frac{\partial w(x,t-\sigma)}{\partial t} d\sigma \tag{4}$$

3 El problema inverso en difusión unidimensional

Supóngase que se tiene un dominio de una unidad de longitud tal cual como lo indica la figura 2, y tómesese una data de N distribuciones $Y(1,t_j) = Y_j$ en un dominio del tiempo $0 \leq t \leq t_f$, donde t_f es el tiempo final medido. Se desea hallar el flujo aplicado originalmente a la placa $\gamma(t)$.



Fig. 2. Flujo aplicado desconocido en el extremo $x=0$.

A partir del modelo (1) se planteo el problema inverso de determinar el flujo de entrada desconocido utilizando mediciones de temperatura en el extremo aislado.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} & 0 < x < 1 & \quad t > 0 \\ -\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} &= \gamma(t) = ? & x = 0 & \quad t > 0 \\ \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} &= 0 & x = 1 & \quad t > 0 \\ \theta(x,t) &= 0 & t = 0 & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Es conocido que la mayoría de los planteamientos inversos son matemáticamente mal planteados, en el sentido de que la existencia, unicidad, o estabilidad de su solución no están garantizadas (Hadamard, 1923). Por tanto, en este caso se garantizará la existencia de la solución mediante la minimización de la norma de mínimos cuadrados (Özsisik, 1992).

Para resolver el problema inverso, se requiere que las distribuciones estimadas $\hat{\theta}_j(\hat{\gamma})$ ($j=1,2,\dots,N$), calculadas desde la solución del problema directo (1), usando valores estimados de las componentes de flujo $\hat{\gamma} \equiv [\hat{\gamma}_i \text{ para } i=1,2,\dots,N]$, se acerquen en un dominio de tiempo especificado $0 < t < t_f$, con cada uno de los valores medidos Y_j ($j=1,2,\dots,N$). El símbolo $\hat{}$ sobre θ_j o γ_i denota estimado. Una forma de lograr el equilibrio, es minimizar la norma de mínimos cuadrados con respecto a cada uno de las componentes de flujo $\hat{\gamma}_i$. A la norma de mínimos cuadrados planteada, se le adiciona un término de regularización de orden cero α (Özsisik, 1992), en otras palabras:

$$S(\hat{\gamma}) = \sum_{j=1}^N Y_j - \hat{\theta}_j(\hat{\gamma})^2 + \alpha \sum_{j=1}^N \hat{\gamma}_j^2 \tag{6}$$

En el funcional (6), el primer término del lado derecho representa la norma de mínimos cuadrados y el segundo el término de regularización, esté último es agregado para reducir la inestabilidad u oscilación inherentes a los problemas mal condicionados. Para valores muy pequeños de α , la solución oscila y se vuelve inestable si se están estimando gran número de parámetros. Para valores grandes de α , la solución es amortiguada y se desvía de los resultados exactos. Con la selección adecuada de α , la inestabilidad puede ser aliviada. Diferentes formas de seleccionar α fueron discutidas por Tikhonov y Arsenin (1977). Scout y Beck (1989) sugirieron que el valor óptimo de α esta en el rango de 10^{-2} a 10^{-4} dependiendo de la desviación están-

dar de la data $\sigma(Y)$ como una aplicación del teorema de Bayes. Huang y Ozisik (1991) discutieron una validación cruzada del valor de α para determinar su optimo. Hansen (1992) propuso el uso de la curva L para determinar el valor optimo de α ; esta técnica fue implementada en este trabajo para determinar el valor de α .

Minimizando el funcional (6) con respecto a cada una de las componentes estimadas de flujo $\hat{\gamma}_i$ se tiene:

$$-2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \hat{\theta}_j(\hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}_i} Y_j - \hat{\theta}_j(\hat{\gamma}) \right] + 2\alpha \hat{\gamma}_i = 0 \tag{7}$$

para $i=1,2,\dots,N$, donde N es también el número de parámetros estimados, se define la matriz de los coeficientes de sensibilidad X como:

$$X_{ij} \equiv \frac{\partial \hat{\theta}_i(\hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \hat{\gamma}_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \hat{\gamma}_1} & \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \hat{\gamma}_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial \hat{\theta}_{N-1}}{\partial \hat{\gamma}_{N-1}} & 0 \\ \frac{\partial \hat{\theta}_N}{\partial \hat{\gamma}_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\theta}_N}{\partial \hat{\gamma}_{N-1}} & \frac{\partial \hat{\theta}_N}{\partial \hat{\gamma}_N} \end{pmatrix} \tag{8}$$

donde términos sobre la diagonal principal deben ser cero porque las distribuciones de $\hat{\theta}_j$ calculadas en el tiempo t_j , deben ser independientes de los parámetros estimados futuros $\hat{\gamma}_i$, $i > j$.

4 Solución del sistema de mínimos cuadrados

Ahora el problema inverso se reduce a resolver el sistema de ecuaciones de mínimos cuadrados (7). Es deseable expresar está ecuación en una forma más conveniente para calcular $\hat{\gamma}_i$. Esto se puede obtener expandiendo $\hat{\theta}_j(\hat{\gamma})$ en series de Taylor con respecto a un flujo arbitrario como:

$$\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_{0j} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \hat{\theta}_j(\hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}_i} \hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_0 \right] \tag{9}$$

Tomando $\hat{\theta}_{0j} = 0$ y $\hat{\gamma}_0 = 0$, la ecuación (9) se reduce a:

$$\hat{\theta}_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \hat{\theta}_j(\hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma}_i} \hat{\gamma}_i \tag{10}$$

Sustituyendo la ecuación (10) en el sistema (7), reordenando y expresando la ecuación resultante en forma matricial se obtiene:

$$X^T X + \alpha I \gamma(\alpha) = X^T Y \tag{11}$$

donde I es la matriz identidad, $Y = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N^T$ es el vector de los valores medidos, X es la matriz de los coeficientes de sensibilidad y $\hat{\gamma}(\alpha)$ es el vector de los flujos predichos. El sistema lineal definido en (11) se resuelve usando descomposición LU de la librería BLAS/LAPACK (Anderson et al., 1999)

5 Determinación de los coeficientes de sensibilidad

Discretizando el teorema de Duhamel (4), se obtiene (Özisik, 1992):

$$\theta_{x, t_N} = \sum_{i=1}^N \gamma \sigma_i \frac{w_{x, t_N - \sigma_{i-1}} - w_{x, t_N - \sigma_i}}{\Delta \sigma_i} \Delta \sigma_i \tag{12}$$

Comparado la forma discreta del teorema de Duhamel (12) con la ecuación (10), se deduce que los coeficientes de sensibilidad X son equivalentes a:

$$X_{ij} = \frac{w_{x, t_N - \sigma_{i-1}} - w_{x, t_N - \sigma_i}}{\Delta \sigma_i} \Delta \sigma_i \approx \frac{\partial w(x, \sigma_i)}{\partial t} \Delta \sigma_i \tag{13}$$

Para obtener los coeficientes de la matriz de sensibilidad empleando la ecuación (13) en los ejemplos de la sección 6, se usaron 20 términos de la serie (3) derivada con respecto al tiempo. Se determino experimentalmente que incrementado el número de términos de la serie (3) por encima de los sugeridos, no mejora la aproximación significativamente usando doble precisión en los cálculos.

6 Resultados numéricos

A continuación se presentan dos ejemplos numéricos en los que se resuelve el problema inverso en conducción de calor unidimensional. Ambos ejemplos consideran un material homogéneo, con temperatura inicial uniforme e igual a cero, de una unidad de longitud, y aislado en el extremo derecho (fig. 2).

6.1 Ejemplo 1

La data de temperatura Y_i se observa en la figura 3. Para obtener esta data en $x=1$, se simulo el problema directo (1) con un flujo de calor igual a $\gamma(t) = 1/4 + \sin(2\pi t/T_0) \exp(-t/5)$ aplicado en $x=0$ y

un periodo $T_0 = 2$, en un dominio de tiempo $0 \leq t \leq 10$ considerando tres pasos de tiempo iguales a $\Delta t = 0.159$, $\Delta t = 0.079$ y $\Delta t = 0.039$ correspondientes a 64, 128 y 256 muestras en los tiempos $t_i = i\Delta t$ usando los Δt respectivos.

En la figura 4 se detalla el flujo de calor aplicado $\gamma(t)$, y sus estimaciones resolviendo el problema inverso. Las estimaciones del flujo de calor se hicieron para los α adecuados para cada número de muestras. Los α adecuados se obtienen del análisis de las figuras 5 y 6.

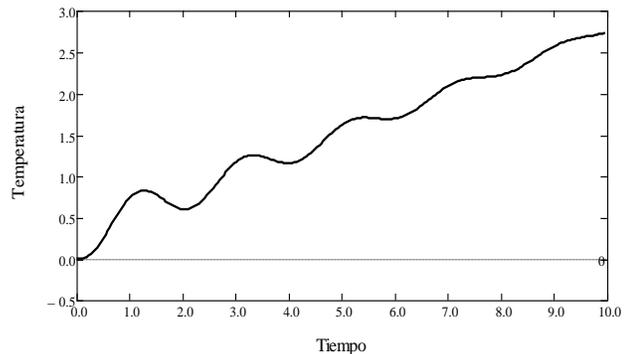


Fig. 3. Historia de la temperatura en la frontera aislada ($x=1$)

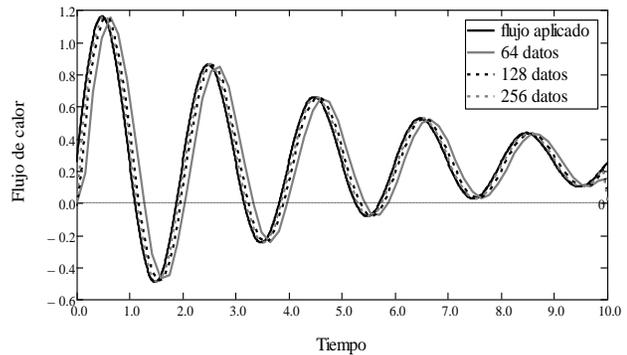


Fig. 4. Historia de los flujos de calor aplicado y obtenidos en $x=0$. $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$, $1 \cdot 10^{-4}$, y $1 \cdot 10^{-5}$ para 64, 128 y 256 datos respectivamente

La figura 5 muestra las curvas L para las tres series de datos; estas curvas se construye graficando parametricamente la norma de los errores de la data $\|X \gamma(\alpha) - Y\|_2^2$ versus la norma del flujo $\|\gamma(\alpha)\|_2^2$ para diferentes valores de α ($\alpha = 10^{-k}$, donde $k = 1, 2, \dots, 8$). Los tres primeros puntos de la derecha de la figura 5 de las tres series de datos corresponden al valor de $\alpha = 1 \cdot 10^{-1}$, los puntos anteriores a estos sobre cada serie pertenecen a $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$, y así sucesivamente hasta $\alpha = 1 \cdot 10^{-8}$. Al decrecer α , la norma del flujo no varia sustancialmente por debajo de $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$ pa-

ra 64 datos, $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$ para 128 datos, y $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ para 256 datos.

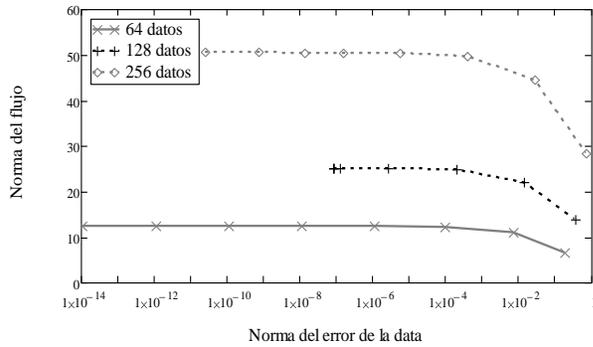


Fig. 5. Curva L para diferentes parámetros de regularización (norma del error de la data vs. norma del flujo)

La figura 6, presenta la norma del error de la data en función de α para las tres series de datos, observándose que la norma del error de la data decrece monótonamente en función de α , cambiando la pendiente de decrecimiento entre $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ y $\alpha = 1 \cdot 10^{-6}$ para las series con 128 y 256 datos.

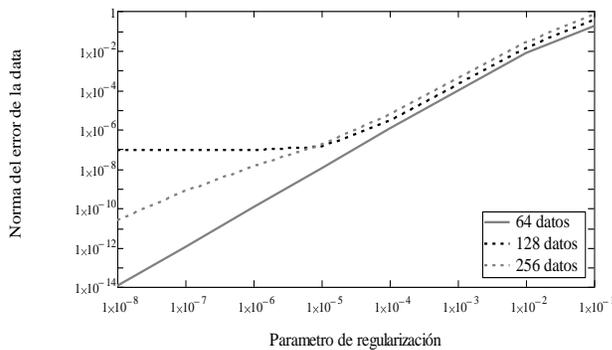


Fig. 6. Norma del error de la data para diferentes parámetros de regularización y series de muestras

En la figura 7 se observa que la norma del error del flujo presenta un óptimo para cada serie de datos: $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$ para 64 datos, $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ para 128 datos, y $\alpha = 2 \cdot 10^{-6}$ para 256 datos. Por debajo de estos óptimos, se puede presentar una mejora en la norma del error de la data (fig. 6) pero no se mejora la predicción del flujo.

La flexibilidad del método propuesto se demuestra agregando un componente de ruido ε_i a la data de temperatura (fig. 3) de la forma $\hat{Y}_i = Y_i + \varepsilon_i$ obteniéndose la figura 8 para las tres series de data estudiadas. El ruido tiene una distribución normal, una desviación estándar de 2.5% del

valor máximo de temperatura de la figura 3, y una media igual a cero.

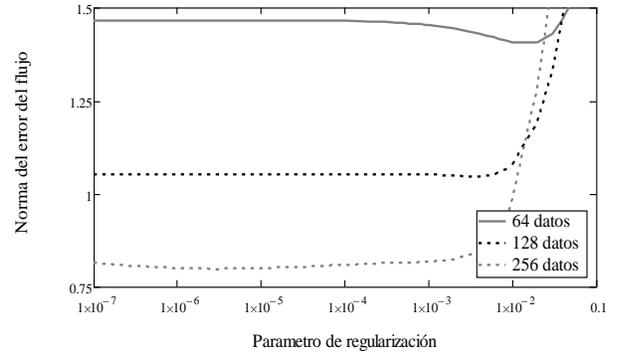


Fig. 7. Norma del error del flujo para diferentes parámetros de regularización y series de muestras

Los flujos de calor obtenidos son presentados en la figura 9 para las tres series de temperatura con ruido (fig. 8). Los α adecuados para cada serie de datos se obtienen de las figuras 10 y 11.

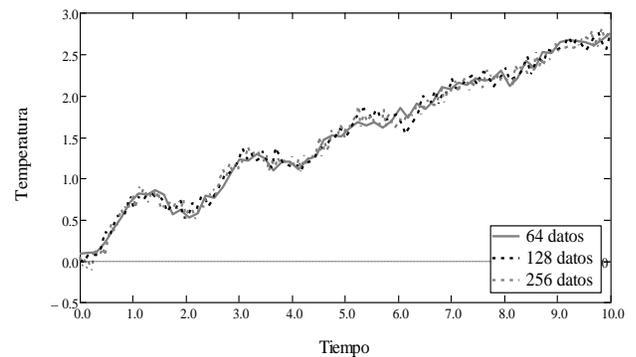


Fig. 8. Historia de la temperatura incluyendo ruido en la frontera aislada ($x = 1$)

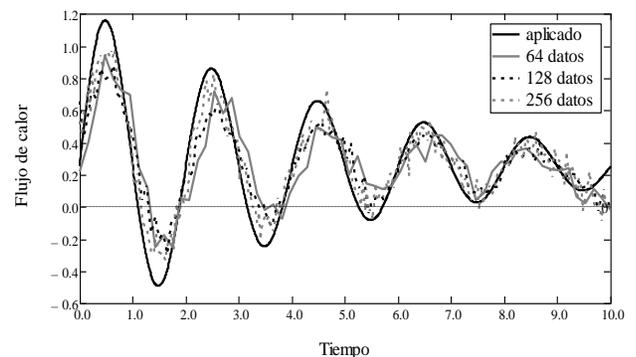


Fig. 9. Historia de los flujos de calor aplicado y obtenidos usando temperatura con ruido en $x = 0$. $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$, $6 \cdot 10^{-2}$, y $3 \cdot 10^{-2}$ para 64, 128 y 256 datos respectivamente

La figura 10 exhibe las curvas L para las tres series de datos con ruido. Los tres primeros puntos de la derecha de la figura 10 de las tres series de datos con ruido corresponden al valor de $\alpha = 1$, los puntos anteriores a estos sobre cada serie pertenecen a $\alpha = 9 \cdot 10^{-1}$, y así sucesivamente hasta $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$. Para valores de α entre 1 y $1 \cdot 10^{-1}$, la norma del flujo permanece casi constante; para α menores a $1 \cdot 10^{-1}$ la norma del error de temperatura se estanca y comienza a crecer la norma del flujo, formando la curva L.

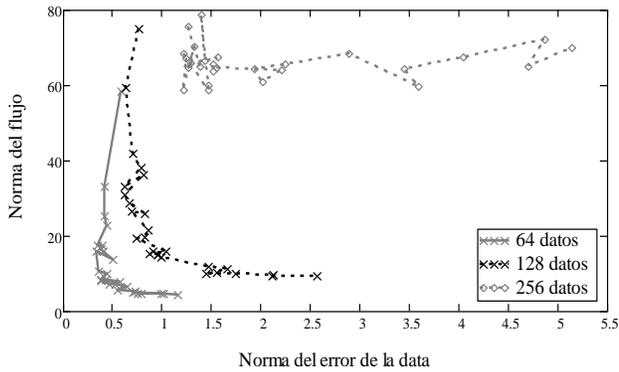


Fig. 10. Curva L para diferentes parámetros de regularización (norma del error de la data vs. norma del flujo, ambas incluyendo ruido)

La figura 11, indica la norma del error de la data con ruido en función de α para las tres series de datos, notándose que la norma del error de la data decrece en función de α hasta aproximadamente $\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$, tendiendo luego a crecer. Para cada serie de datos, el α elegido se obtuvo del valor mínimo de la norma del error de la data con ruido de la figura 10 (para 64, 128 y 256 datos los respectivos mínimos aproximados fueron 0.5, 0.8 y 1.5); luego usando este mínimo aproximado y la figura 11 se estima α .

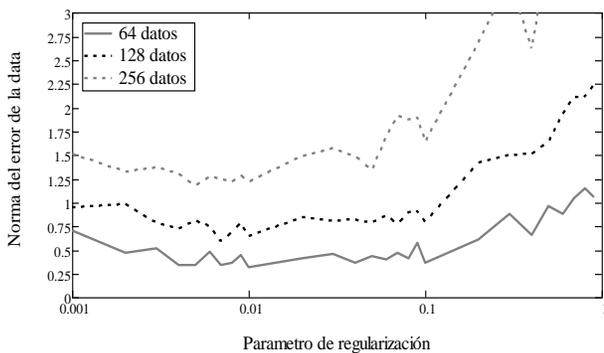


Fig. 11. Norma del error de la data con ruido para diferentes parámetros de regularización y series de muestra

En la figura 12 se percibe que la norma del error del flujo presenta un rango donde se encuentra el mínimo para

cada serie de datos ($1 \cdot 10^{-2} < \alpha < 1 \cdot 10^{-1}$). Este rango contiene los valores aproximados predichos del análisis de la curva L (fig. 10 y 11).

Finalmente, la transformada rápida de Fourier (FFT) es aplicada a los flujos de calor aplicado y obtenidos para diferentes parámetros de regularización (fig. 13). Esto demuestra que el método es capaz de predecir la frecuencia de oscilación ($1/T_o$) del flujo de calor de manera precisa, independientemente del parámetro de regularización.

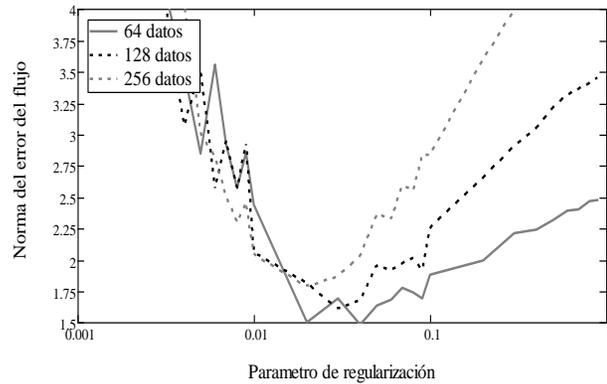


Fig. 12. Norma del error del flujo (data con ruido) para diferentes parámetros de regularización y series de muestras

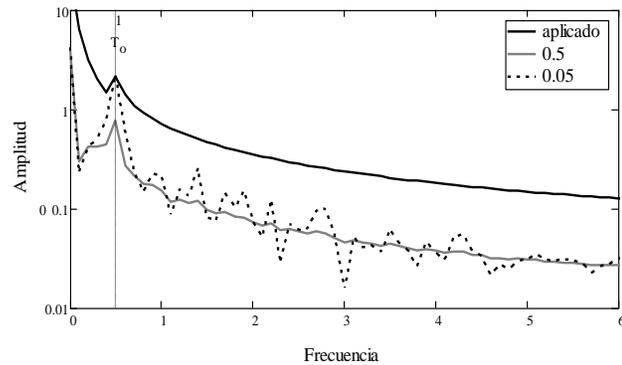


Fig. 13. FFT de los flujos de calor exacto y obtenidos usando temperatura con ruido en $x=0$. $\alpha = 0.5$, y $\alpha = 0.05$, para 512 datos+

6.2 Ejemplo 2

La data de temperatura se almacena en la misma posición del ejemplo anterior y es mostrada en la figura 14. En este ejemplo, se usaron diferentes números de mediciones (64, 128 y 256) para un dominio de tiempo $0 \leq t \leq 1.8$ resultando diferentes intervalos de tiempo para cada serie ($\Delta t = 0.029, 0.014$ y 0.007 respectivamente). El flujo de

calor aplicado en $x=0$ es:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0.3 \\ t-0.3 & \text{si } 0.3 \leq t < 0.9 \\ 1.5-t & \text{si } 0.9 \leq t < 1.5 \\ 0 & \text{si } t > 1.5 \end{cases} \quad (14)$$

En la figura 15 se especifica el flujo de calor aplicado $\gamma(t)$, y sus estimaciones resolviendo el problema inverso con los α adecuados para cada número de muestras. Similarmente al ejemplo 1 de la sección 6.1, los α adecuados se obtienen del análisis de las figuras 16 y 17.

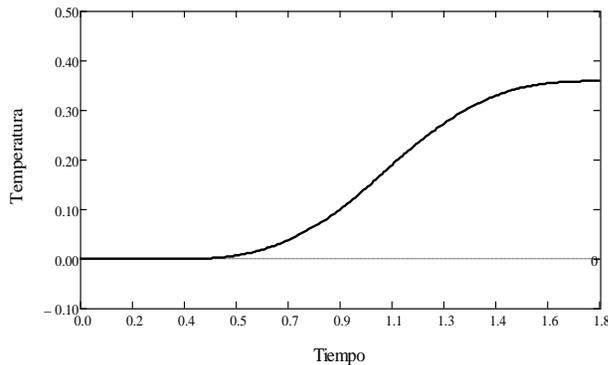


Fig. 14. Historia de la temperatura en la frontera aislada ($x=1$)

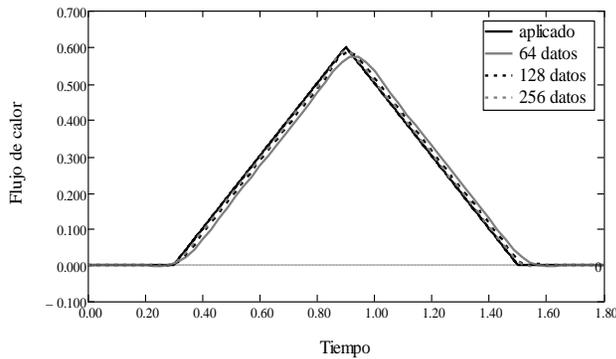


Fig. 15. Historia de los flujos de calor aplicado y obtenidos en $x=0$. $\alpha=1 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-5}$, y $1 \cdot 10^{-5}$ para 64, 128 y 256 datos respectivamente

Análogamente al ejemplo 1, los α elegidos para cada serie se obtuvieron aproximadamente del valor mínimo de la norma del error de la data de la figuras 16 (para 64, 128 y 256 datos, los respectivos mínimo fueron 10^{-4} , 10^{-5} y 10^{-5}). La figura 17 indica el decrecimiento de la norma del error de la data en función de α y su cambio de pendiente para valores de α inferiores a 10^{-5} .

La figura 18 revela los mínimos de la norma del error del flujo para cada serie de datos: $\alpha=1 \cdot 10^{-2}$ para 64 datos, $\alpha=5 \cdot 10^{-3}$ para 128 datos, y $\alpha=2 \cdot 10^{-6}$ para 256 datos. Estos α óptimos son similares a los valores extraídos del análisis de la curva L.

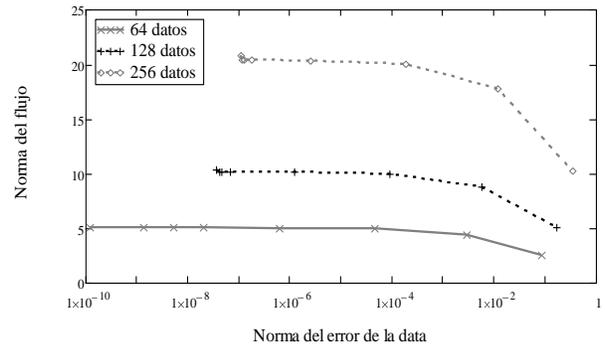


Fig. 16. Curva L para diferentes parámetros de regularización (norma del error de la data vs. norma del flujo)

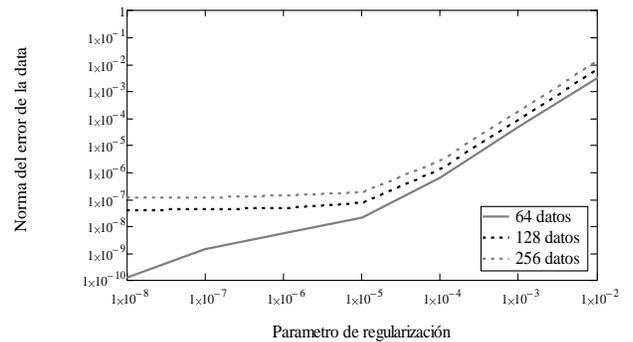


Fig. 17. Norma del error de la data para diferentes parámetros de regularización y número de muestras

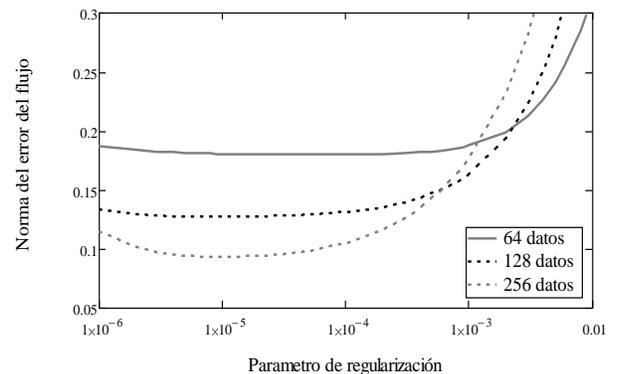


Fig. 18. Norma del error del flujo para diferentes parámetros de regularización y series de muestras

La figura 19 incluye la data de las tres series más una

componente de ruido ($\hat{Y}_i = Y_i + \varepsilon_i$) para cada serie. El ruido tiene una distribución normal, una desviación estándar de 10% del valor máximo de temperatura de la figura 14, y una media igual a cero.

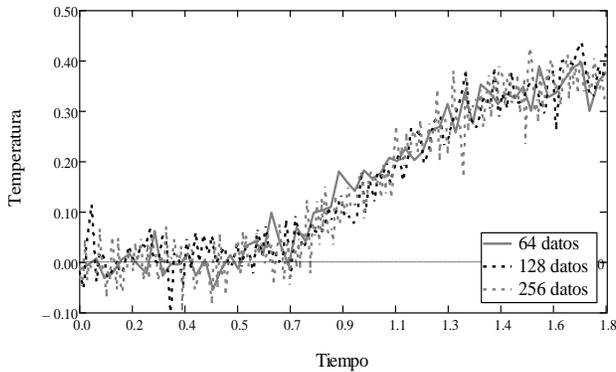


Fig. 19. Historia de la temperatura incluyendo ruido en la frontera aislada ($x=1$)

Los flujos de calor de la figura 20 fueron obtenidos para las tres series de temperatura con ruido. Los α adecuados se obtienen de las figuras 21 y 22 empleando un análisis similar al aplicado a las figuras 10 y 11.

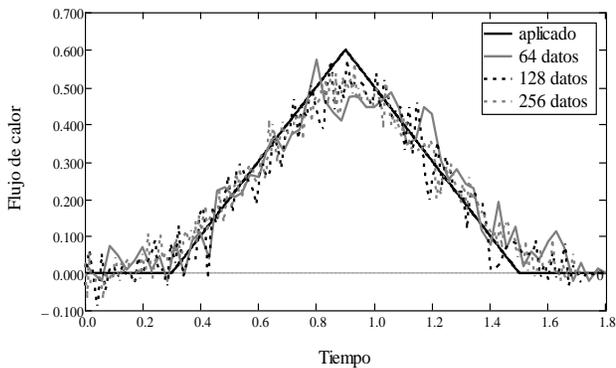


Fig. 20. Historia de los flujos de calor aplicado y obtenidos usando temperatura con ruido en $x=0$. $\alpha=8 \cdot 10^{-2}$, $7 \cdot 10^{-2}$, y $7 \cdot 10^{-2}$ para 64, 128 y 256 datos respectivamente

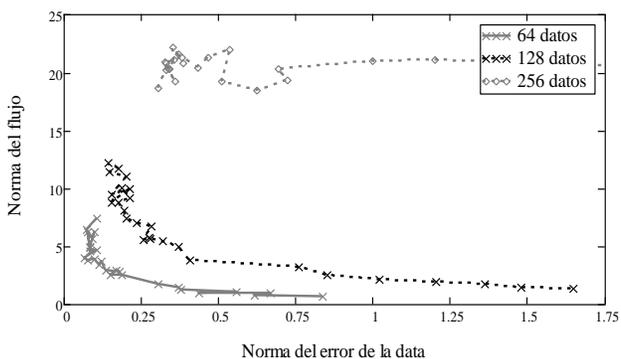


Fig. 21. Curva L para diferentes parámetros de regularización (norma del error de la data vs. norma del flujo)

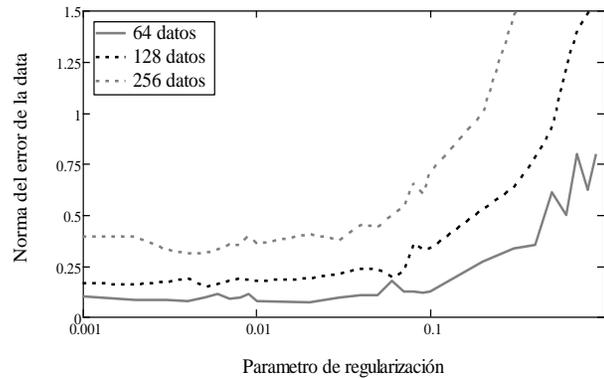


Fig. 22. Norma del error de la data con ruido para diferentes parámetros de regularización y series de muestras

En la figura 23 se distingue un rango en el cual esta presente el mínimo de la norma del error del flujo para cada serie de datos ($1 \cdot 10^{-2} < \alpha < 1 \cdot 10^{-1}$). Este rango es similar a los valores predichos del análisis de la curva L (fig. 21 y 22).

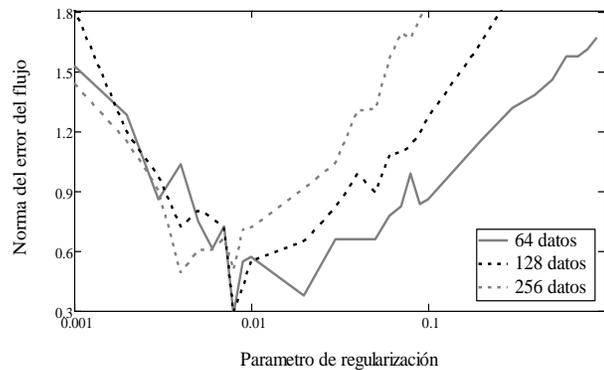


Fig. 23. Norma del error del flujo (data con ruido) para diferentes parámetros de regularización y series de muestras

7 Conclusiones

En este trabajo se presento, el método de los mínimos cuadrados modificado para resolver el problema inverso en difusión unidimensional. El mismo, es un método de regularización que provee una técnica numérica eficiente y estable que permite determinar aproximaciones del flujo aplicado mediante la medición de una data en el dominio del tiempo.

Los resultados de los ejemplos expuestos, indican que los flujos aplicados al dominio pueden ser estimados correctamente aún usando data muy ruidosa.

La obtención del valor adecuado del parámetro de regularización se realizo usando la curva L y la norma del

error de la data. Los valores del parámetro de regularización determinados mediante este análisis, fueron comparados con los obtenidos de la norma del error del flujo, arrojando resultados similares; sin embargo el criterio de la curva L y la norma del error de la data, se debe aplicar cuidadosamente pues en los casos donde la data no presenta ruido, la norma del flujo en la curva L, no siempre crece notoriamente al decrecer el parámetro de regularización. También se observó que el rango del parámetro de regularización sugerido por Scout y Beck (1989), para resolver el problema inverso, es un poco conservador si la data no presenta ruido, y una buena aproximación si la data posee ruido.

8 Referencias

- Alifanov O.N., 1994, *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer.
- Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney, A. y Sorensen, D., 1999, *LAPACK Users' Guide*, SIAM.
- Beck J.V. y Blackwell B., 1985, *Inverse Heat Conduction: Ill Posed Problems*, Wiley-Interscience.
- Beck J.V. y Murio, D., 1986, Combined function specification-regularization procedure for solution of inverse heat conduction problem, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 24, pp. 180-185.
- Farlow S.J., 1993, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover.
- Gutierrez J.M., Martín, J. y Rodríguez A.C., 2005, A sequential algorithm of inverse heat conduction problems using singular value decomposition, *Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, pp. 235-244.
- Hansen, P.C., 1992, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM Review* Vol. 34 pp. 561-580.
- Hadamard J., 1923, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations*, Yale University Press.
- Huanga C.H. y Ozisik M.N., 1991, Optimal regularization method to determine the strength of a plane surface heat source, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 12, pp. 173-178.
- Logan J.D., 1996, *Applied Mathematics*, John Wiley & Sons.
- Murio D.C. y Paloschi J.R., 1988, Combined mollification-future temperatures procedure for solution of inverse heat conduction problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 23, pp. 235-244.
- Myers, G.E., 1976, *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*. McGraw-Hill.
- Özisik M.N., 1992, *Heat Conduction*, John Wiley & Sons.
- Özisik M.N. y Orlande H.R.B., 2000, *Inverse Heat Transfer: fundamentals and applications*, Taylor & Francis.
- Scott E., y Beck J.V., 1989, Analysis of order of the sequential regularization solutions of inverse heat conduction problems, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 111, p. 218-224.
- Shenefelt J.R., Luck R., Taylor R. y Berry J., 2002, Solution to inverse heat conduction problems employing singular value decomposition and model-reduction, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 67-74.
- Shyam S.S., 2001, A neural network approach for non-iterative calculation of heat transfer coefficient in fluid-particle systems, *Chemical Engineering and Processing*, Vol. 40 pp. 363-369.
- Tikhonov A.N. y Arsenin V.Y., 1977, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston & Sons.
- Velamur A.B.N. y Zabarar N., 2004, Stochastic inverse heat conduction using spectral approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 60, pp. 1569-1593.

Recibido: 15 de enero de 2012

Revisado: 20 de junio de 2012

Tempo, Ruth: Licda. En Matemática (2002), Magister en matemática aplicada a la ingeniería (2005). Profesora de la Universidad de los Andes en la Facultad de Humanidades y Educación, adscrita al Departamento de Medición y Evaluación.

Rujano, José: Profesor Titular del Departamento de Ciencias Térmicas de la Universidad de Los Andes (ULA). Ingeniero Mecánico, (ULA). M.Sc. y Ph.D en Ingeniero Mecánica, University of South Florida - USA. Coordinador de la Maestría en Matemáticas Aplicadas, ULA. Correo electrónico: jrujano@ula.ve.

Torres, Carlos: Profesor Titular del Departamento de Ciencias Térmicas de la Universidad de Los Andes (ULA). Ingeniero Mecánico y M.Sc. en Matemática Aplicada, (ULA). Ph.D en Ingeniero Mecánica, The University of Tulsa - USA. Postdoctorado en University College London - UK. Investigador en Tulsa University Fluid Flow Projects - USA. Correo electrónico: cftm.ve@gmail.com.

