

Solución numérica de las oscilaciones forzadas de un cilindro circular excitado transversalmente

Numerical solution of the forced oscillations of a circular cylinder transversely excited

Carrero Osuna José Alejandro* y Rengel Hernández José Eduardo
Centro de Métodos Numéricos en Ingeniería (CMNI), Departamento de Mecánica,
Universidad de Oriente, Barcelona, Anzoátegui, Venezuela
*jacarrero@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta un procedimiento numérico para estudiar el flujo viscoso, incompresible y bidimensional en torno de un cilindro circular forzado a oscilar, en movimiento cíclico predefinido, en la dirección transversal al flujo. La solución del campo de flujo se obtiene por el método de los elementos finitos, usando el esquema de estabilización conocido como "Streamline Upwinding Petrov/Galerkin" para discretizar espacialmente las ecuaciones de Navier-Stokes, mientras que para avanzar en el tiempo se usa el método de corrección de velocidad. Las ecuaciones de Navier-Stokes se expresan en variables primitivas en un marco de referencia lagrangiano-euleriano arbitrario (LEA), con el propósito de considerar el movimiento del cuerpo sobre el campo de fluido. Se estudian diferentes valores de amplitudes y frecuencias de oscilación, utilizando números de Reynolds en el intervalo de 100 a 300, con la finalidad de obtener los límites del rango de sincronización de las vibraciones inducidas por los vórtices. Adicionalmente, se estudia el efecto de la oscilación del cuerpo sobre la geometría de la estela de vórtices y los coeficientes de fuerza. Los resultados numéricos obtenidos son comparados con la data disponible en la literatura encontrándose buena concordancia entre ellos.

Palabras clave: Streamline upwinding Petrov/Galerkin, Corrección de velocidad, lagrangiano-euleriano arbitrario.

Abstract

This paper presents a numerical procedure to study the viscous, incompressible and two-dimensional flow around a circular cylinder forced to oscillate, in predefined cyclical movement, in the direction transverse to the flow. The solution of the flow field is obtained by the finite element method, using the stabilization scheme known as "Streamline Upwinding Petrov / Galerkin" to spatially discretize the Navier-Stokes equations, while the velocity correction method is used to transient advance. The Navier-Stokes equations are expressed in primitive variables in a Lagrangian-Eulerian arbitrary framework, for the purpose of considering the motion of the body on the field of fluid. We study different values of amplitudes and frequencies of oscillation, using Reynolds numbers in the range of 100 to 300, in order to obtain the limits of the synchronization range of vortex induced vibrations. Additionally, we study the effect of the oscillation of the body on the geometry of the wake vortices and the force coefficients. The numerical results are compared with data available in the literature found good agreement between them.

Key words: Streamline upwinding Petrov / Galerkin, velocity correction, arbitrary lagrangian-eulerian.

1 Introducción

La interacción entre el flujo de fluidos y cuerpos sólidos elásticamente soportados, los cuales pueden ser considerados en algunos casos como rígidos, es encontrada con frecuencia en muchas áreas de la ingeniería. Algunos de los casos más prominentes es la interacción del flujo de aire

con estructuras civiles esbeltas, tales como edificaciones altas, antenas, puentes suspendidos, entre otros. El entendimiento del acople de estos dos diferentes sistemas físicos (fluido y estructura) se ha convertido en un reto para el avance y desarrollo del conocimiento, es por ello que una cantidad importante de investigación se ha dirigido hacia esta materia.

Una estructura sólida elásticamente soportada, expuesta a un flujo de fluido, se encuentra sujeta a cargas oscilatorias inducidas por el desprendimiento de vórtices alrededor de ésta. Eventualmente estas cargas provocarán que la estructura comience a oscilar si ésta carece de rigidez; este fenómeno es conocido como vibraciones inducidas por vórtices (VIV). Esta interacción fluido-estructura es susceptible a una condición de sincronización o resonancia, donde la frecuencia natural del cuerpo logra cambiar la frecuencia de desprendimiento de vórtices de tal manera que esta última se acopla o logra acercarse lo suficiente a la frecuencia natural del cuerpo. Esto provoca amplitudes de vibración excesivas que conllevan inevitablemente al colapso de la estructura, es por ello que la predicción de este fenómeno en la fase de diseño de la estructura es de vital importancia para incrementar la vida útil de la estructura.

Computacionalmente, desde hace cierto tiempo atrás, el problema de VIV de un cilindro circular, en dos dimensiones, restringido elásticamente y sumergido en un flujo uniforme ha llegado a ser un problema canónico en los esfuerzos para entender situaciones más generales asociadas a la interacción fluido-estructura (Shiels et al., 2001). Un caso sobre el cual se ha enfocado particular interés consiste en permitir el movimiento del cuerpo únicamente en la dirección transversal al flujo.

Una metodología para la comprensión del fenómeno de VIV ha sido investigar el patrón de la estela de vórtices desprendidos y las características de la transferencia de energía de un cilindro obligado a oscilar en forma periódica y transversalmente al flujo que incide sobre él. Este procedimiento proporciona una predicción de los regímenes de flujo en los cuales pudiese ocurrir VIV. No obstante, poca literatura se ha enfocado a investigar la transferencia de energía presente en números de Reynolds menores a 500 (Leontini et al., 2005).

En este trabajo, se presenta un procedimiento numérico fundamentado en el método de los elementos finitos y el método de corrección de velocidad en el contexto del marco referencial Lagrangiano – Euleriano Arbitrario (LEA), para simular el flujo de un fluido viscoso incompresible bidimensional incidiendo sobre un cuerpo cilíndrico forzado a oscilar transversalmente. Los resultados numéricos obtenidos en este trabajo comprenden tres números de Reynolds 100, 200 y 300, considerando varias amplitudes y frecuencias de oscilación con el propósito de estudiar el comportamiento de la estela de vórtices, los coeficientes de fuerzas y la transferencia de energía sobre el rango de sincronización.

2 Formulación matemática

2.1 Marco referencial lagrangiano-euleriano arbitrario

La descripción Lagrangiana – Euleriana Arbitraria (LEA) se encuentra fundamentada sobre una teoría cinemática general propuesta por Hirt et al., (1974) en el contexto del método de las diferencias finitas, la cual posteriormente

fue extendida al método de los elementos finitos por Donea et al., (1982). Esta descripción se fundamenta sobre la definición de tres dominios y el mapeo entre ellos, tal como se presenta a continuación:

- Dominio espacial que representa el espacio físico definido por las partículas materiales en tiempo t .
- Dominio material que representa el dominio ocupado en el tiempo $t = 0$ por las partículas materiales que ocupan el dominio espacial en tiempo t .
- Dominio referencial que es un dominio fijo cuya imagen en tiempo t , sujeto a una transformación, corresponde al dominio espacial

Aplicando esto en un análisis por elementos finitos, el dominio espacial es representado por una malla en movimiento y el dominio referencial por un estado de referencia de la malla en movimiento. Si el dominio espacial permanece fijo, la formulación estará fundamentada por una descripción Euleriana. Por otra parte, cuando el dominio material coincide durante toda una simulación con el dominio espacial, la formulación se encontrará basada en una descripción Lagrangiana.

Ramaswamy y Kawahara (1987) propusieron la siguiente definición para la derivada material de una cantidad física φ en la descripción LEA.

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x_i} + u_i - \hat{u}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x_i} + c_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

La ecuación (1) se expresa en notación indicial, utilizando la convención de suma, en ella u_i es el campo de velocidad del flujo en la dirección i , \hat{u}_i representa la velocidad de la malla, mientras que x_i y χ_i denotan las coordenadas referenciales y espaciales, respectivamente. Por otra parte, $c_i = u_i - \hat{u}_i$ es la velocidad convectiva en la descripción LEA.

2.2 Ecuaciones gobernantes

El flujo viscoso bidimensional incompresible es regido por las ecuaciones de Navier-Stokes, estas ecuaciones bajo la descripción Lagrangiana – Euleriana Arbitraria (LEA) y en ausencia de fuerzas corporales, pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

en estas ecuaciones u representa el campo de velocidad, es

decir $u = u, v^T$, p representa el campo de presión, ρ es la densidad, ν es el coeficiente de viscosidad cinemática y δ_{ij} es el delta de Kronecker. La ecuación (3) representa la ecuación de continuidad, mejor conocida como restricción de incompresibilidad. Además de estas ecuaciones se debe definir un dominio, al cual se le denotará como Ω limitado por fronteras Γ , sobre las cuales se deben imponer condiciones de borde con el fin de que el problema se encuentre totalmente definido (Gresho et al., 1999).

2.3 Método de corrección de velocidad

Un método computacional explícito es desarrollado para investigar el flujo incompresible viscoso transitorio. La integración temporal es realizada a través del conocido método de corrección de velocidad. El cual se fundamenta sobre la técnica del operador segregado propuesta inicialmente por Chorin (1968). Este método ha sufrido, con el devenir de los años, ciertas modificaciones con el fin de mejorar su desempeño (Donea y Huerta., 2003), (Zienkiewicz y Taylor., 1991), (Hughes y Brooks., 1982), entre otros.

El método de corrección de velocidad se resume tal como sigue:

1. En el nivel temporal t^{n+1} se calcula un campo de velocidad intermedio \tilde{u}_i a través de la ecuación de Burgers. Se debe destacar que este campo de velocidad no es divergente libre.

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[c_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right] dt \quad (4)$$

2. La velocidad u_i^{n+1} en el nivel temporal actual se calcula incluyendo el efecto del campo de presión.

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} dt \quad (5)$$

3. Finalmente, el campo de velocidad calculado en el paso previo debe satisfacer la restricción de incompresibilidad.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

En el presente trabajo la integración temporal de la ecuación de Burgers, se lleva a cabo a través del esquema de Euler hacia adelante, de tal manera que la ecuación (4), puede ser re-escrita como:

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \left(c_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (7)$$

Los pasos 2 y 3, es decir, el cálculo de la velocidad actual y la ecuación de continuidad, son combinados para derivar una ecuación explícita para la presión. La ecuación (5), es integrada en el tiempo para obtener la siguiente ecuación.

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (8)$$

Al aplicar el operador divergencia a esta última ecuación se obtiene

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (9)$$

pero se debe recordar que el campo de velocidad actual debe ser divergente libre, tal que se satisfaga la condición de incompresibilidad, es así como se obtiene una expresión explícita para la presión.

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} \quad (10)$$

2.4 El método de los elementos finitos

Dado que el dominio bajo estudio puede ser dividido en un número finito de pequeños sub-dominios (elementos), entonces todas las cantidades escalares pueden ser aproximadas por funciones de ensayo sobre cada elemento. En este trabajo se utilizaron funciones de interpolación lineales usando además elementos triangulares para la discretización espacial tanto para el campo de velocidad como para el campo de presión. En términos matemáticos esto puede ser representado como:

$$u = u^h = \sum_{i=1}^N \varphi_i u_i \quad (11)$$

$$p = p^h = \sum_{i=1}^N \varphi_i p_i \quad (12)$$

donde φ representa el polinomio de interpolación (función de ensayo) para cada elemento, mientras que u^h y p^h representan la aproximación de la velocidad del fluido y la presión, respectivamente. El uso de interpolación de igual orden para la velocidad y la presión es estable, es decir sa-

tisface la condición de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi, siempre y cuando el término del gradiente de presión en la etapa de predicción sea despreciado, ya que si es tomado en cuenta el uso de interpolación del mismo orden provocaría modos espurios en el campo de presión (Dalheim., 1996).

La formulación débil del problema es establecida utilizando el método de Bubnov-Galerkin tal como se presenta a continuación.

Hallar $w \in H_0^1 \Omega$

$$\int_{\Omega} \left(w \frac{\partial u_i}{\partial t} + c_j w \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{w}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \nu \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} w n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Gamma \quad \forall w \in H_0^1 \Omega \quad \forall t > t_0 \quad (13)$$

donde w representa la función peso

Aplicando la discretización espacial para la velocidad y la presión (ecuaciones 11 y 12) sobre la forma débil, se logra un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, que puede ser expresado en forma matricial como

$$M \frac{\partial u^h}{\partial t} + A(u^h)u^h = -\frac{1}{\rho} Gp^h + \nu Lu^h \quad (14)$$

$$G^T u^h = 0 \quad (15)$$

Las matrices en las ecuaciones (14) y (15) se definen a continuación:

Matriz de masa

$$M = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega$$

Matriz de convección

$$A(C)_{,k} = \int_{\Omega} \varphi_i (\varphi_j C) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} d\Omega$$

Matriz gradiente

$$G = \int_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\alpha} d\Omega$$

Operador Laplaciano

$$L = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} d\Omega$$

Al emplear el método de corrección de velocidad sobre las ecuaciones de Navier-Stokes discretizadas espacialmente, resulta el siguiente esquema:

1. Fase de predicción

$$M_L \tilde{U}^{n+1} = M_L U^n - \Delta t A(U)U - LU^n \quad (16)$$

2. Fase de cálculo de presión

$$LP^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} G^T \tilde{U}^n \quad (17)$$

3. Fase de corrección

$$M_L U^{n+1} = M_L \tilde{U} - \frac{\Delta t}{\rho} GP^{n+1} \quad (18)$$

donde M_L representa la matriz de masa concentrada.

En lo que se refiere al método de estabilización denominado Streamline Upwind/Petrov-Galerkin este difiere del tradicional esquema de Bubnov-Galerkin, ya que las funciones de peso son formuladas con un término adicional. Las funciones bases pueden ser formuladas como

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \tilde{p}_i \quad (19)$$

donde \tilde{p}_i es la función de perturbación definida como

$$\tilde{p}_i = \tau u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad (20)$$

El parámetro de estabilización fue seleccionado como $\tau = \Delta t / 2$ de tal manera que la función base, la cual será utilizada sobre todos los términos de las ecuaciones para aplicar el esquema de estabilización consistentemente, queda definida como:

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{\Delta t}{2} u_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad (21)$$

2.5 Esquema para el movimiento de la malla

La solución de los problemas de interacción fluido – estructura por medio de alguna formulación Lagrangiana – Euleriana Arbitraria (LEA) requiere determinar en cada paso de tiempo el movimiento arbitrario de la malla de elementos finitos. Un procedimiento que en los últimos tiempos se ha tornado popular bajo este contexto consiste en considerar la malla de elementos finitos como un sistema pseudo – estructural en el cual el movimiento de los nodos es gobernado por ecuaciones de la elasticidad lineal, donde las condiciones de frontera son dadas por el movimiento de la interfase fluido – estructura. Esta técnica ha sido aplicada a una gran cantidad de problemas que involucran movimiento de fronteras, tales como: cambio de fase, superficies libres, y aquellos relacionados con la interacción fluido – estructura.

Las ecuaciones pseudo – estructurales que gobiernan el movimiento de los nodos de la malla de elementos finitos pueden contener términos de masa, amortiguamiento y rigi-

dez ficticios. Un caso particular es la técnica de interpolación Laplaciana en la cual la masa y el amortiguamiento ficticio sobre las ecuaciones gobernantes del movimiento de la malla son ignorados, y en virtud de esto, la ecuación de movimiento constituye un operador Laplaciano. Sin embargo, esta técnica de movimiento de malla posee un importante inconveniente porque en algunos casos es incapaz de prevenir la inversión de pequeños elementos, que por lo general son ubicados contiguos a la frontera en movimiento para poder estimar con suficiente precisión la capa límite desarrollada sobre la frontera, Floch (2000).

En el presente trabajo es utilizado un procedimiento numérico alternativo a la interpolación Laplaciana, el cual fue originalmente propuesto por Masud y Hughes (1997), y posee la ventaja de prevenir la inversión de pequeños elementos. Esta formulación es presentada a continuación.

Considerando un dominio espacial $\Omega \subset R^n$ $n=2$ en el tiempo $t = t^n$ limitado por las fronteras $\Gamma = \Gamma_{FS} \cup \Gamma_0$ $\Gamma_{FS} \cap \Gamma_0 = \emptyset$, donde Γ_{FS} representa la interfase fluido-estructura. Dado el desplazamiento y en la interfase Γ_{FS} , el campo de desplazamientos \hat{y} sobre el dominio durante $t \in t^n, t^{n+1}$ es determinado resolviendo el siguiente problema de valor en la frontera

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tau^e \nabla \hat{y} &= 0 & \text{sobre} & \Omega \\ \hat{y} &= \delta & \text{sobre} & \Gamma_{FS} \\ \hat{y} &= 0 & \text{sobre} & \Gamma_0 \end{aligned} \quad (22)$$

donde τ^e es una función adimensional diseñada para prevenir la inversión elemental, esta función es definida para cada uno de los elementos que conforman la malla de elementos finitos, tal como sigue

$$\tau^e = \frac{1 - \frac{\Delta_{min}}{\Delta_{max}}}{\frac{\Delta^e}{\Delta_{max}}} \quad (23)$$

donde Δ^e representa el área del elemento, Δ_{max} y Δ_{min} denotan el área del elemento más grande y más pequeño, respectivamente, en una malla dada. Esta función aplicada a la ecuación (23) proporciona una rigidez variable a los elementos, permitiendo que los elementos cercanos a la frontera en movimiento absorban poca deformación y los elementos lejanos a la frontera en movimiento absorban mayor deformación.

La solución de la ecuación (22) permite determinar el desplazamiento de la malla de elementos finitos en cada paso de tiempo, además la solución de esta expresión proporciona un costo computacional adicional al procedimiento

numérico utilizado.

2.6 Algoritmo de solución

En este trabajo se utiliza un algoritmo segregado para acoplar el movimiento del cuerpo rígido con el campo de flujo y de esta forma predecir el efecto del movimiento del cuerpo sobre el campo de flujo, este procedimiento en términos generales se describe a continuación.

En el inicio de cada paso de tiempo, se calculan los campos de velocidad y presión, mediante el método de corrección de velocidad formulado bajo la descripción LEA, una vez determinadas las variables de estado que definen el flujo se evalúan las fuerzas de arrastre y sustentación que actúan sobre la superficie del cilindro, las cuales son definidas como:

- Fuerza de arrastre

$$F_D = \int_0^{2\pi} p \cos \theta + 2\nu\omega \sin \theta R d\theta \quad (24)$$

- Fuerza de sustentación

$$F_L = \int_0^{2\pi} p \sin \theta - 2\nu\omega \cos \theta R d\theta \quad (25)$$

donde ω representa la vorticidad, R denota el radio y θ representa la coordenada angular del cilindro, estos valores son adimensionalizados para obtener:

- Coeficiente de arrastre

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho DU_\infty^2} \quad (26)$$

- Coeficiente de sustentación

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho DU_\infty^2} \quad (27)$$

donde U_∞ representa la velocidad libre de perturbación pre-escrita en el contorno de entrada del dominio.

Obtenidos estos valores se procede a calcular el movimiento del cilindro, de acuerdo a un movimiento sinusoidal pre-escrito, luego se ajusta el dominio a este movimiento para posteriormente avanzar al siguiente paso de tiempo.

3 Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados de los experimentos numéricos ejecutados a través del procedimiento

presentado en la sección anterior. Inicialmente se presentan los resultados obtenidos sobre un cilindro circular fijo, lo cual permitirá validar el código desarrollado desde el punto de vista de la Dinámica de Fluidos Computacional. Posteriormente, se exhiben los resultados hallados para el caso donde el cilindro se le permite oscilar bajo un movimiento periódico pre-escrito, comparando los resultados con valores que ya han sido publicados por otros. Finalmente, se presentan resultados para distintas amplitudes y distintos números de Reynolds, enfocando la atención alrededor de la región de sincronización.

El dominio computacional utilizado para llevar a cabo todos los ensayos numéricos se encuentra definido por el diámetro del cilindro $D = 1$. El dominio posee las siguientes dimensiones $40D \times 40D$, donde todos los contornos están localizados a una distancia igual a $20D$ medida desde el centro del cilindro. La razón esencial para este dimensionamiento es evitar el reflejo del campo de presión desde la frontera de salida de flujo hacia el interior del dominio. La malla de elementos finitos utilizada en este estudio se muestra en la figura 1.

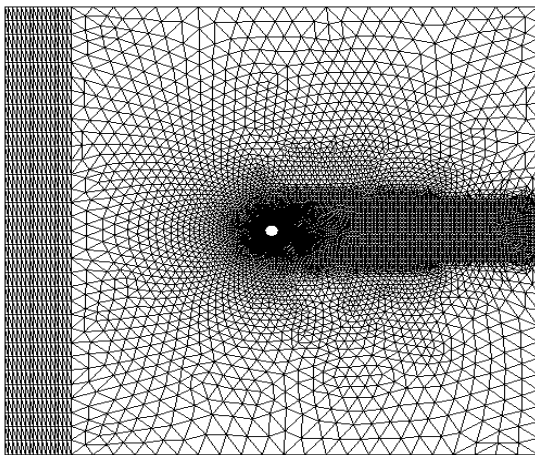


Fig. 1 - Malla de elementos finitos utilizada para las simulaciones

Esta malla se encuentra constituida por 18892 elementos triangulares lineales, y 9581 nodos. Concentrando la mayor cantidad de elementos alrededor del cuerpo y su región posterior, con el fin de capturar la estela de vórtices. Sobre la frontera que representa el cuerpo cilíndrico se definieron 112 nodos para así obtener una buena resolución de la capa límite.

Con el fin de validar el código desarrollado, desde el punto de vista de la Dinámica de Fluidos Computacional se procedió a simular el caso para un cilindro en su condición estática para un número de Reynolds de 200, y comparar los resultados obtenidos con resultados ampliamente publicados. En la tabla 1 se presenta la comparación de los coeficientes de arrastre promedio \bar{C}_D de sustentación C_L y la frecuencia de desprendimiento de vórtices o número de

Strouhal S_t obtenidos con aquellos publicados por otros autores.

Tabla 1. Resumen de resultados sobre el cilindro estático con $Re = 200$

Referencia	\bar{C}_D	C_L	S_t	Comentarios
Presente trabajo	1.38	0.72	0.1875	FEM
Herfjord (1995)	1.395	0.57	0.195	FEM
Meneghini (2001)	1.30	0.47	0.196	FEM
Braza et al (1986)	1.35	0.54	0.200	FVM
So et al (2003)	1.33	0.43	0.18	FEM
Sarpkaya y Isaacson (1981)	--	0.75	0.18-0.19	Experimental

Como se observa, los resultados obtenidos concuerdan bastante bien con los resultados numéricos y experimentales extraídos de la literatura. A continuación, en la figura 2 se muestra la evolución temporal de los coeficientes de arrastre y sustentación obtenidos para este caso en particular.

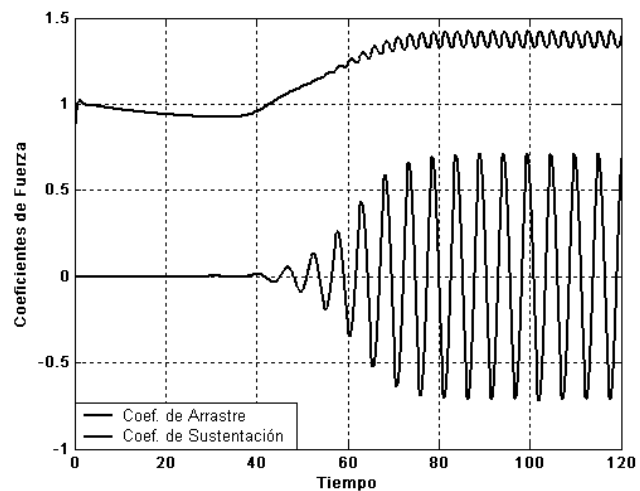


Fig. 2 - Evolución temporal de los coeficientes de fuerza para $Re = 200$

De acuerdo con los ensayos experimentales de Sarpkaya (1995) y Moe y Wu (1990), se puede aplicar un simple modelo armónico que obliga al cilindro a moverse perpendicular a la dirección de la corriente de flujo que incide sobre él y restringe su movimiento en la dirección del flujo. Para ello se pre-escibe el siguiente movimiento al centro de gravedad del cilindro

$$\begin{aligned}
 x &= \text{constante} \\
 y &= A \sin 2\pi ft
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

donde A representa la amplitud y f la frecuencia de

oscilación impuesta. Considerando lo anterior, en este trabajo las simulaciones fueron llevadas a cabo para tres números de Reynolds 100, 200 y 300, para valores de amplitud comprendidos entre 0.2 y 0.7 y para razones de frecuencia $F = f / f_s$ en el intervalo de 0.6 hasta 1.3, donde f_s corresponde al número de Strouhal para el cilindro estático, para los respectivos números de Reynolds.

Como condición inicial para estas simulaciones se utilizó el campo de velocidad del cilindro estático, obtenido para el número de Reynolds bajo estudio, una vez que la estela de vórtices desprendidos llega a ser estable.

En la figura 3 se muestra el rango de sincronización para diferentes amplitudes y un número de Reynolds de 200. Se presenta una región encerrada por dos fronteras, entre ellas persiste el fenómeno de sincronización, fuera de ellas no existe acoplamiento entre las frecuencias de desprendimientos de vórtices y las frecuencias de oscilación del cuerpo. Los límites representados por los símbolos cuadrados corresponden a los valores hallados en los experimentos realizados por Gopalkrishnan (1993) para Reynolds de 10000. Los triángulos superiores corresponden a simulaciones donde la frecuencia de desprendimiento de vórtices coincidió con la frecuencia de oscilación del cuerpo, mientras que los círculos denotan no coincidencia.

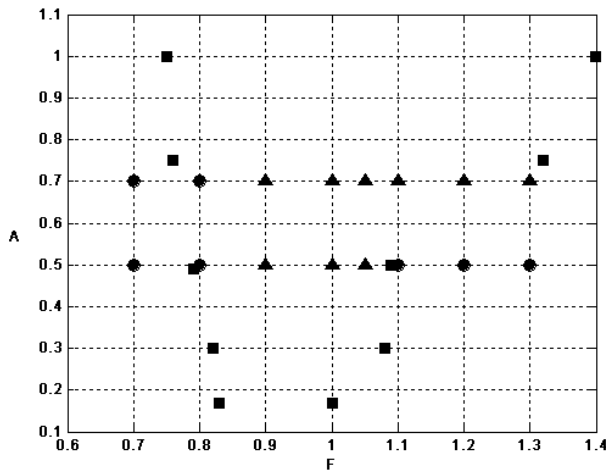


Fig. 3 - Fronteras de régimen de sincronización

En la figura 4 se muestra la evolución temporal de los coeficientes de sustentación y arrastre para el caso correspondiente a un número de Reynolds de 200, con amplitud de 0.2 y la razón de frecuencias de 1.0.

Al comparar la figura 2 con la figura 4, se puede observar que los coeficientes de fuerzas experimentan un incremento cuando la frecuencia de desprendimiento de vórtices se acopla a la frecuencia de oscilación del cuerpo. En virtud del incremento experimentado por los coeficientes de fuerza en el rango de sincronización, en la figura 5 se presenta una comparación entre el coeficiente de arrastre promedio en función de F obtenido en este trabajo y los resultados publicados por Blackburn y Karniadakis (1993), para un número de Reynolds de 200 y una amplitud de $A = 0.2$.

En cuanto al comportamiento de este coeficiente, se observa que cuando la relación de frecuencias F , se encuentra alejada de la región donde la frecuencia de oscilación y el número de Strouhal coinciden, este tiende a un valor similar al coeficiente de arrastre promedio del cilindro en su condición estacionaria. De la tabla 1 se puede extraer para este número de Reynolds que este valor para un cilindro estático es de 1.38. Por otra parte, en la figura 6 se presenta la comparación de la media cuadrática (root means square) del coeficiente de sustentación.

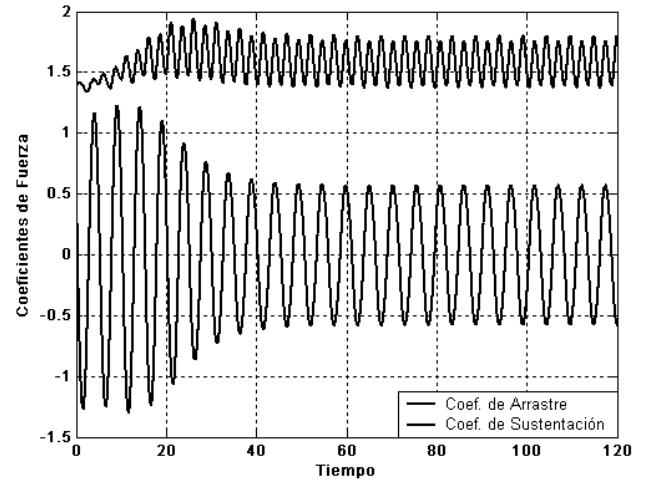


Fig. 4 - Evolución temporal de los coeficientes de fuerza para $Re = 200$, $A = 0.2$ y $F = 1.0$

Los coeficientes de arrastre así como los coeficientes de sustentación, poseen una buena correspondencia con los resultados publicados por Blackburn y Karniadakis (1993), para este caso en particular, encontrándose la mayor discrepancia para una relación de frecuencias de 0.8 en ambos casos.

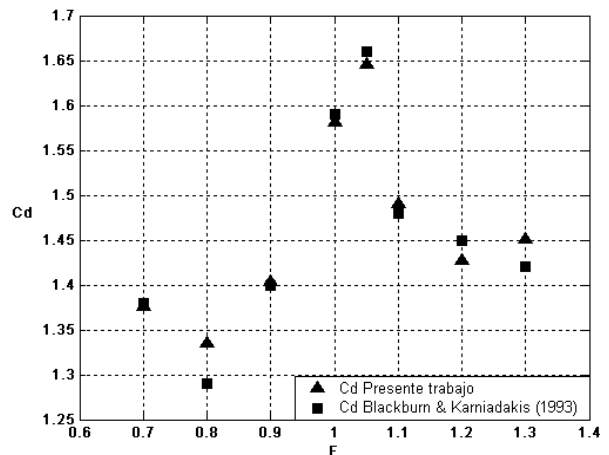


Fig. 5 - Coeficiente de arrastre promedio en función de la relación de frecuencias

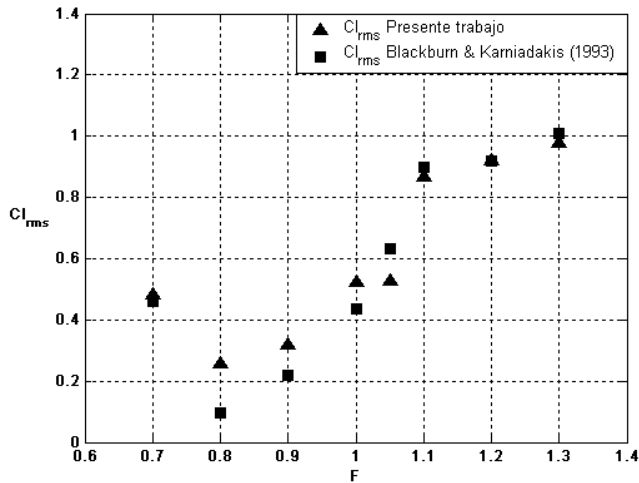


Fig. 6 - Coeficiente de sustentación (rms) en función de la relación de Frecuencias

Cuando se aborda el fenómeno de oscilaciones forzadas, es costumbre aproximar las fuerzas de sustentación de manera armónica y separarlas en dos componentes, una en fase con la aceleración transversal y la otra en fase con la velocidad, (Moe y Wu., 1990). La primera componente ha sido denominada por los investigadores como coeficiente de inercia o masa añadida, la cual no realiza trabajo neto sobre un ciclo de oscilación, mientras que la otra componente es denominada coeficiente de amortiguamiento hidrodinámico, la cual añade o sustrae energía al cilindro oscilatorio.

Es así como el coeficiente de fuerza de sustentación puede ser aproximado bajo la siguiente expresión

$$C_L = C_{my} \sin \omega t - C_{dy} \cos \omega t \quad (29)$$

donde C_{my} representa el coeficiente de inercia o masa añadida, mientras que C_{dy} representa el coeficiente de amortiguamiento hidrodinámico, los cuales a su vez han sido definidos como

$$C_{my} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T C_L \sin \omega t \, dt \quad (30)$$

$$C_{dy} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T C_L \cos \omega t \, dt \quad (31)$$

En la figura 7 se presenta la comparación del coeficiente de inercia en función de F obtenido en este estudio con los resultados presentados por Herfjord (1995). Mientras que en la figura 8 se muestra la comparación del coeficiente de amortiguamiento hidrodinámico en función de F. En ambos casos, los resultados obtenidos a través del código computacional logran aproximarse de buena forma con los valores de Herfjord (1995).

El coeficiente de amortiguamiento hidrodinámico, representa una medida de la transferencia de energía desde el fluido hacia el cuerpo, esto tiene su explicación basado en el hecho que una vez alcanzado el estado estable, la energía global hacia el sistema mecánico debe ser cero. Por ello, si algún amortiguamiento se encuentra presente en el sistema, se espera que el trabajo realizado sobre el cilindro por el fluido sea igual al trabajo realizado por el amortiguamiento mecánico (Leontini et al., 2005).

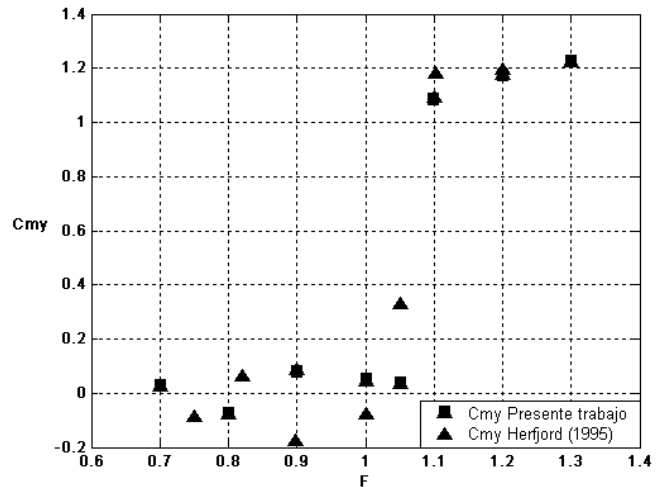


Fig. 7 - Coeficiente de inercia en función de la relación de frecuencias

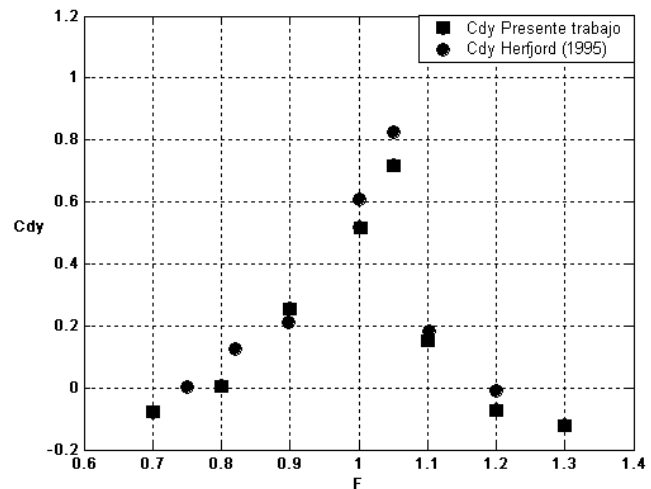


Fig. 8 - Coeficiente de amortiguamiento en función de la relación de Frecuencias

Si el coeficiente de transferencia de energía obtenido de un experimento de oscilaciones forzadas posee un valor positivo, es indicativo que si el cilindro es libre de oscilar bajo las mismas condiciones, este oscilará por acción del desprendimiento de vórtices. El signo del coeficiente de transferencia de energía es inferido del intervalo en el cual se encuentre el ángulo de fase entre la fuerza de sustentación sobre el cilindro y el desplazamiento del cilindro, (Leontini et al, 2005) y (Griffin y Ramberg, 1976).

A continuación se presentan los resultados obtenidos para un número de Reynolds de 200, aumentando la amplitud de la oscilación forzada desde 0.2 hasta 0.7. En la figura 9 se exhibe el comportamiento del coeficiente de arrastre promedio, mientras que en la figura 10 se muestra el coeficiente de sustentación (rms) todos en función de F . El coeficiente de arrastre crece en magnitud a medida que se aumenta la amplitud; se observa que para una relación de frecuencias de 0.7 posee prácticamente el mismo valor hallado para la condición estática, mientras que para amplitudes menores a 0.7 el valor máximo se encuentra en una relación de frecuencias de 1.05. Por otra parte, el coeficiente de sustentación (rms) crece de forma abrupta para relaciones de frecuencias de 1.1 hasta 1.3, para el caso donde la amplitud corresponde a 0.5. Aunque para las otras amplitudes estudiadas en este rango de frecuencias el coeficiente de sustentación es creciente, no lo hace de forma tan acentuada.

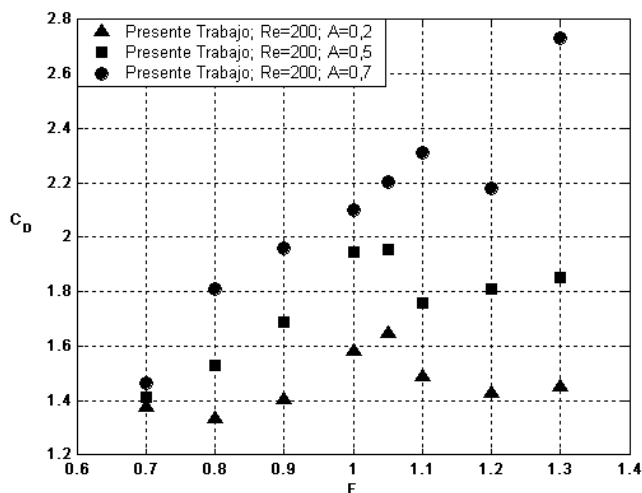


Fig. 9 - Coeficiente de arrastre promedio en función de la relación de frecuencias para varias amplitudes y $Re = 200$

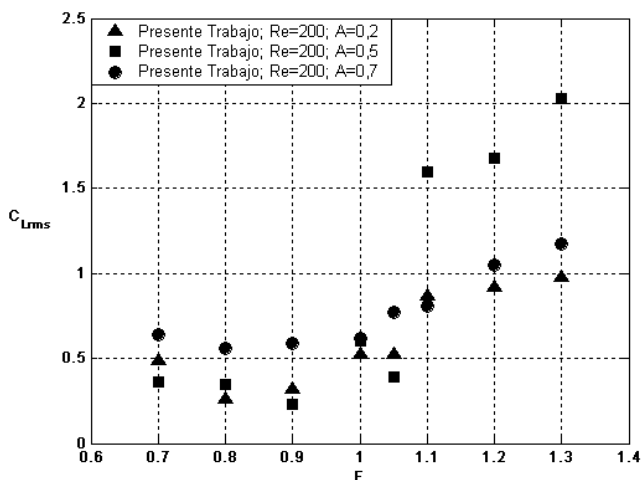


Fig. 10 - Coeficiente de sustentación en función de la relación de frecuencias para varias amplitudes y $Re = 200$

El patrón de la estela de vórtices, para amplitudes de 0.2 y 0.5, en el rango de sincronización posee características similares. Aquí se desprenden dos vórtices con circulación de signos opuestos desde la región superior e inferior del cuerpo, por ciclo de oscilación. En la figura 11 se presenta la estela de vórtices para una amplitud de 0.2 y una relación de frecuencias de 1.05. Este patrón hallado es denominado por Williamson y Roshko (1988) como "2S", lo que significa un par de vórtices sencillos. Por otra parte, cuando la amplitud alcanza el valor de 0.7, para el mismo número de Reynolds, el patrón de la estela cambia liberando un par de vórtices con circulación de signos opuestos sobre la región inferior y un vórtice sencillo desde la región superior del cilindro, lo cual provoca un desbalance en la distribución local del campo de presión así como en los esfuerzos viscosos sobre el cilindro, logrando que la fuerza de sustentación promedio sobre cilindro posea un valor distinto de cero. Este patrón ha sido denominado por Williamson y Roshko (1988) como "P+S".

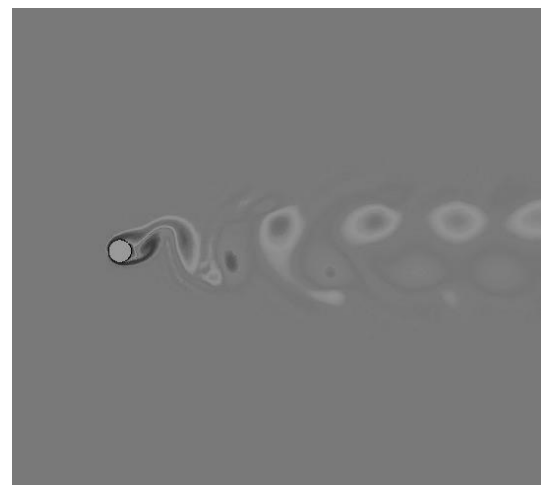


Fig. 11 - Estela de vórtices para $Re = 200$, $A = 0.2$ y $F = 1.0$

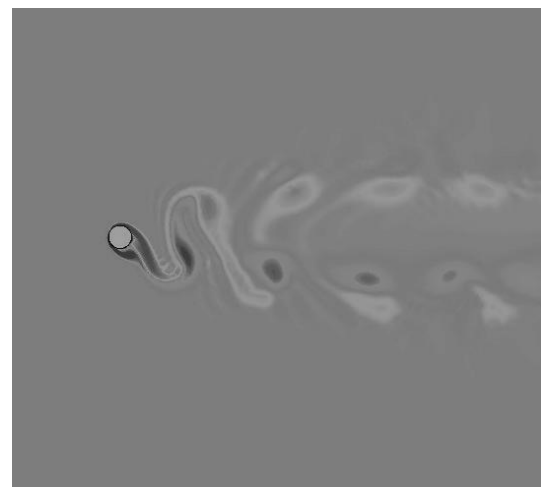


Fig. 12 - Estela de vórtices para $Re = 200$, $A = 0.7$ y $F = 1.1$

En virtud de la asimetría hallada para el coeficiente de sustentación, explicada anteriormente, se debe señalar que la aproximación dada por la ecuación (29) carece de validez, ya que como se puede observar, ésta supone un comportamiento armónico regular para este parámetro. Es por ello que el coeficiente de inercia y el coeficiente de transferencia de energía no son obtenidos con precisión bajo estas condiciones.

Los siguientes resultados corresponden al caso donde se mantuvo fija una amplitud de 0.2, pero se incrementó el número de Reynolds desde 100 hasta 300. En la figura 13 se exhibe el comportamiento del coeficiente de arrastre promedio en función de F bajo estas condiciones; se observa que para los números de Reynolds de 200 y 300, este parámetro sufrió un incremento, sin embargo sorprende el hecho que para el número de Reynolds más bajo, en relaciones de frecuencias en el intervalo de sincronización, el valor del coeficiente de arrastre supera a los obtenidos para números de Reynolds mayores en el mismo intervalo.

En cuanto al coeficiente de sustentación (rms) en función de F para números de Reynolds de 100, 200 y 300, mostrado en la figura 14 se advierte que a medida que aumenta el número de Reynolds, los valores de este parámetro también experimentan un crecimiento, mientras que para relaciones de frecuencias mayores a 0.9 el coeficiente de sustentación crece aproximadamente en proporción lineal, independientemente del número de Reynolds.

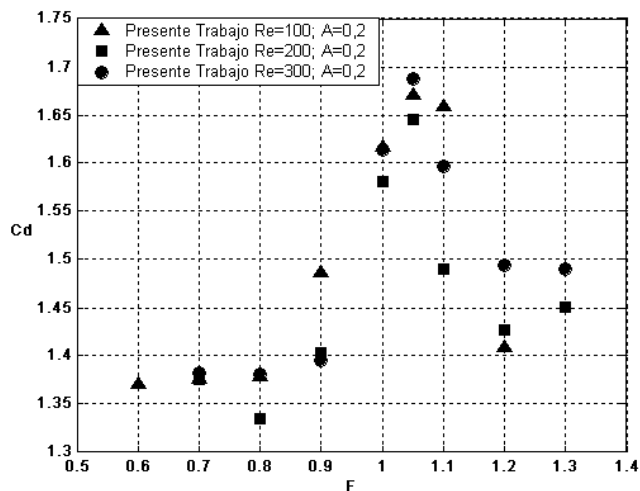


Fig. 13 - Coeficiente de arrastre promedio en función de la relación de frecuencias para varios números de Reynolds

4 Comentarios

Se ha desarrollado un procedimiento computacional capaz de simular el flujo viscoso incompresible bidimensional sobre un cilindro circular en su condición estática y en su condición oscilatoria. Se han comparados los resultados obteniéndose con este procedimiento con soluciones numéricas así como también con resultados experimentales, obteniendo buena correspondencia entre ellos.

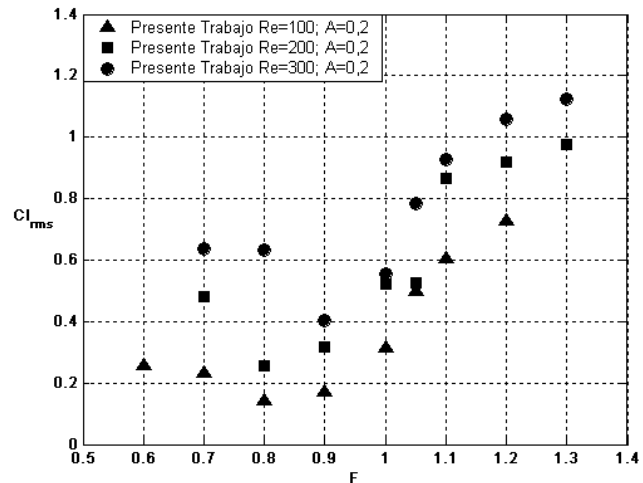


Fig. 14 - Coeficiente de sustentación en función de la relación de frecuencias para varios números de Reynolds

Para amplitudes menores o iguales a 0.5, el patrón de la estela obtenido en el rango de sincronización corresponde al tipo "2S", sin embargo para amplitudes mayores el patrón corresponde al tipo "P+S", en el caso del número de Reynolds de 200. Este último patrón provoca una distribución irregular de presión y esfuerzos viscosos sobre la superficie del cilindro, por ello el coeficiente de sustentación hallado en estas condiciones no posee un comportamiento armónico.

En el caso donde se varió el número de Reynolds desde 100 hasta 300, manteniendo una amplitud constante, se pudo observar que para el número de Reynolds más bajo la magnitud del coeficiente de sustentación promedio fue superior en una amplia gama de relaciones de frecuencias. En cuanto al coeficiente de sustentación (rms) su valor se incrementó a medida que el número de Reynolds también crecía.

Referencias

- Blackburn H, Karniadakis G, 1993, Two and three dimensional simulations of vortex-induced vibration of a circular cylinder, ISOPE, Vol III, pp. 715-720.
- Braza M, Chassaing P, Ha Minh H, 1986, Numerical study and physical análisis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder, Journal of Fluids Mechanics, Vol. 165, pp. 79-130.
- Chorin AJ, 1968, Numerical Solutions of the Navier-Stokes equations, Mathematical Computations, Vol. 22, pp. 745-762.
- Dalheim JM, 1996, Numerical prediction of vortex-induced vibration by the finite element method, Dr. Eng. Thesis, NTNU, Norway.
- Donea J, Giuliani S, Halleux JP, 1982, An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamics fluid-structure interactions, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 33, pp. 689-723.

- Donea J, Huerta A, 2003, Finite element methods for flow problems, Editorial John Wiley & Sons.
- Floch A, 2000, A numerical formulation to solve the ALE Navier-Stokes equations applied to the withdrawal of magma chambers, Dr. Eng. Thesis, University Polytechnic of Catalunya, Barcelona, España.
- Gopalkrishnan R, 1993, Vortex-induced forces on oscillating bluff cylinders, PhD Thesis, MIT.
- Gresho PM., Sani RL, Engelman MS, 1991, Incompressible flow and the finite element method, John Wiley & Sons.
- Griffin O, Ramberg S, 1976, Vortex shedding from a cylinder vibrating inline with an incident uniform flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 75, parte 2, pp. 257-271.
- Herfjord K, 1995, A study of two-dimensional separated flow by a combination of the finite element method and Navier-Stokes equations, Dr. Eng. Thesis, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway.
- Hirt CW, Amsden AA, Cook HK, 1974, An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speed. Journal of Computational Physics, Vol. 14, pp. 227-253.
- Hughes TJR, Brooks A, 1982, Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-Stokes equations, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 32, pp. 199-259.
- Leontini J, Thompson M, Hourigan K, 2005, Modelling vortex-induced vibration with driven oscillation, ANZIAM J, Vol. 46, pp. 365-378.
- Masud A, Hughes TJR., 1997, A space-time galerkin/least squares finite element formulation of the Navier-Stokes Equations for moving domain problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 146, pp. 91-126.
- Meneghini J R, Saltara F, Siquiera CLR, Ferrari JA, 2001, Numerical simulation of flow interference between two circular cilindres in tandem and side by side arrangements. Journal of Fluids and Structures, Vol. 15, pp. 327-350.
- Moe G, Wu Z, 1990, The lift force on a cylinder vibrating in a current, Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vol. 112.
- Ramaswamy B, Kawahara M, 1987, Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 7, pp. 1053-1075.
- Sarpkaya T, 1995, Hydrodynamic damping, flow-induced oscillations, and biharmonic response, Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vol. 117, pp. 232-238.
- Sarpkaya T, Isaacson M, 1981, Mechanics of wave forces on offshore structures, Van Nostrand Reinhold Company.
- Shiels D, Leonard A Roshko A, 2001, Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters, Journal of Fluids and Structures, Vol. 15, pp. 3-21.
- So SMR, Liu Y, Lai YG, 2003, Mesh shape preservation for flow-induced vibration problems, Journal of Fluids and Structures, Vol. 18, pp. 287-304.
- Williamson CHK, Roshko A, 1988, Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder, Journal of Fluids and Structures, Vol. 2, pp. 355-381.
- Zienkiewicz OC, Taylor RL, 1991, The finite element method, Vol. 2, -Hill.

Recibido: 23 de noviembre de 2011

Revisado: 05 de Julio de 2013

Carrero Osuna José Alejandro: Ingeniero Mecánico; MSc (Universidad de Oriente). Miembro activo del Centro de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Rengel Hernández José Eduardo: Ingeniero Mecánico (Universidad de Oriente - Venezuela); M.Sc., D.Sc., (UFRJ - Brasil). Miembro activo del Centro de Métodos Numéricos en Ingeniería de la Universidad de Oriente, trabajando en Modelado y Simulación de Sistemas Dinámicos. Correo electrónico: rengel66@gmail.com

