

Comparación de modelos para flujo isotérmico transitorio de gas en tuberías

Model comparison for isothermal unsteady gas flow in pipelines

Vieira, Ronald¹ y Torres-Monzón, Carlos^{2*}

¹Maestría en Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, ULA

²Departamento de Ciencias Térmicas, Facultad de Ingeniería, ULA

Mérida, 5101 Venezuela

*ctorres@ula.ve

Resumen

En el presente estudio se comparan diferentes métodos para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que describen el flujo isotérmico de gas en tuberías. Tres de estos esquemas emplean el método de las características incluyen un multiplicador de inercia. La diferencia principal entre dos de estos modelos es determinada por el planteamiento de los términos de la ecuación de momento para flujo unidimensional. El tercer modelo comparado, plantea la solución utilizando un procedimiento semi-analítico que involucra la teoría de impedancia para las variables con oscilaciones estables. Los dos últimos modelos presentados, se basan en la resolución implícita de la aproximación por diferencias finitas del sistema de ecuaciones. Se presentan ejemplos numéricos, que permiten establecer comparaciones para diferentes condiciones de flujo en una sección de tubería.

Palabras clave: Flujo transitorio de gas, método de las características, diferencias finitas implícitas.

Abstract

This paper presents different methods for solving the system of nonlinear partial differential equations that describe isothermal transient gas flow in pipelines. Three of these schemes include a multiplier of inertia, using the method of characteristics. The main difference between two of these models is determined by the approach of the terms of the momentum equation for one-dimensional flow. The third model obtained the solution using a semi-analytical procedure that involves the theory of variable impedance for stable oscillations. The final two models presented are based on the resolution of implicit finite difference approximations of mass flow rate and pressure. Numerical examples are presented, allowing comparisons for different flow conditions in a pipeline. The effects of the balance term in the momentum equation for the method of characteristics and the effects of the convective term in the momentum equation for the implicit method are analyzed.

Key words: Unsteady gas flow, method of characteristics, implicit finite differences.

1 Introducción

Las operaciones de transporte y distribución de gas son realizadas en muchos países a través de redes de tuberías de gasoductos. Debido a los controles en línea y razones accidentales o incidentales, la operación de estas redes de gas comúnmente ocurre en flujo transitorio, y solo excepcionalmente operan en flujo estable. La ocurrencia de diferentes tipos de flujos transitorios en un sistema depende básicamente de la geometría y de la causa de la inestabilidad. El flujo transitorio puede ser de muy larga duración, como en el arranque de líneas de transmisión largas, o puede ser cor-

to como en el caso de falla mecánica o un corte de energía. Idealmente, un modelo para el cálculo de flujo transitorio debe producir un resultado satisfactorio para todas estas condiciones.

Las ecuaciones que gobiernan el flujo isotérmico transitorio de gas en tuberías son la ecuación de conservación de masa y la ecuación de conservación de momento. Estas constituyen un conjunto ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no-lineales de primer orden que se complementan con la ecuación de estado para gases reales y con condiciones iniciales de frontera apropiadas. Estas ecuaciones diferenciales parciales deben ser resueltas empleando méto-

dos numéricos apropiados.

El método de las características aplicado a tuberías de gas (Wylie et al, 1971), y posteriores modificaciones como el multiplicador de inercia (Yow, 1971) y el término de balance (Liou, 1983), constituyen la base de muchos esquemas de solución numérica. Estos esquemas usualmente desprecian el término convectivo en la ecuación de momento. Métodos basados en diferencias finitas implícitas, también han sido propuestos para resolver el problema, considerando y sin considerar, el término convectivo en la ecuación de momento (Kiuchi, 1994; Vieira, 2010).

En el presente estudio, se analiza el comportamiento de los modelos numéricos citados mediante la comparación de los resultados ante dos situaciones específicas de flujo: la variación sinusoidal de flujo en la salida de una tubería con presión constante en la entrada; y la apertura y cierre total de una válvula ubicada a la salida de una tubería.

2 Ecuaciones Básicas

Para describir el movimiento de gas en una tubería se realizan las siguientes suposiciones: 1) flujo compresible isotérmico unidimensional; 2) factor de fricción para estado estable; 3) expansión despreciable de las paredes de la tubería debido a los cambios de presión. Siguiendo este planteamiento, las ecuaciones que describen el flujo de gas en tuberías bajo condiciones no estables son la ecuación de estado (1), la ecuación de continuidad (2) y la ecuación de momento (3):

$$P = z\rho RT \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{V_w^2}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{m}^2 V_w^2}{PA^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f V_w^2 \dot{m}^2}{2DA^2 P} + \frac{Pg}{V_w^2} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

donde P es la presión absoluta, z es el factor de compresibilidad, R es la constante del gas, T es la temperatura absoluta, $\dot{m}$ es el flujo másico de gas, A es el área transversal de la tubería, D es el diámetro de la tubería, θ es el ángulo de inclinación de la tubería, g es la constante de aceleración debida a la gravedad, y f es el factor de fricción de Darcy. En el presente estudio se asume un factor de compresibilidad constante de $z = 1$. Bajo la suposición de flujo isotérmico con temperatura constante, la velocidad de onda, V_w es $\sqrt{zRT}$.

Asumiendo que velocidad de flujo es pequeña en relación a la velocidad isotérmica de onda ($v/V_w \ll 1$) se considera que el segundo término de la ecuación (3), llamado término convectivo, puede ser despreciado (Wylie et al,

1971), lo cual resulta en:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f V_w^2 \dot{m}^2}{2DA^2 P} + \frac{Pg}{V_w^2} \sin \theta = 0 \quad (4)$$

Para la ecuación (4) se incrementa el primer término de inercia ($\partial \dot{m} / \partial t$), mediante la multiplicación por una constante α^2 :

$$\frac{\alpha^2}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f V_w^2 \dot{m}^2}{2DA^2 P} + \frac{Pg}{V_w^2} \sin \theta = 0 \quad (5)$$

donde la constante $\alpha = V_w \Delta t / L_i$, es el multiplicador de inercia, y se usa para aumentar el tamaño del paso temporal y para obtener un mayor control sobre la solución en el caso de flujos transitorios rápidos (Yow, 1971).

3 Método de las Características

3.1 Modelo MOC-I

Empleando el método de las características, (Wylie et al., 1971), se obtienen las ecuaciones de compatibilidad para las ecuaciones de flujo transitorio (2) y (5). Aplicando el método de los intervalos de tiempo específicos, al multiplicar e integrar las ecuaciones características (Wylie y Streeter, 1978), se obtienen las ecuaciones de compatibilidad discretizadas:

$$C^+ = \frac{\alpha V_w}{A} (\dot{m}_P - \dot{m}_A) + (P_P - P_A) + \frac{P_P^2 (e^s - 1)}{P_P + P_A} + (\dot{m}_P + \dot{m}_A) \frac{|\dot{m}_P + \dot{m}_A|}{4} \frac{f V_w^2 \Delta x (e^s - 1)}{s (P_P + P_A) DA^2} = 0 \quad (6)$$

$$C^- = \frac{\alpha V_w}{A} (\dot{m}_P - \dot{m}_B) - (P_P - P_B) + \frac{P_B^2 (e^s - 1)}{P_P + P_A} + (\dot{m}_P + \dot{m}_B) \frac{|\dot{m}_P + \dot{m}_B|}{4} \frac{f V_w^2 \Delta x (e^s - 1)}{s (P_P + P_B) DA^2} = 0 \quad (7)$$

donde $s = 2g\Delta x \sin \theta / V_w^2$ y los subíndices de las ecuaciones indican la posición de las variables en el plano x-t (fig. 1).

Las ecuaciones (6) y (7) son resueltas empleando una técnica iterativa para resolver la presión y el flujo másico en punto P simultáneamente.

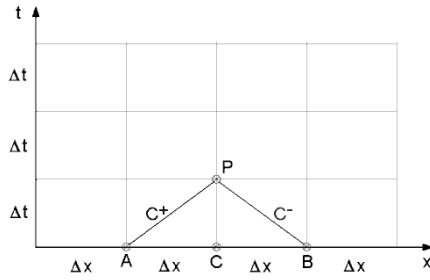


Fig. 1. Método de los intervalos de tiempo específicos

3.2 Modelo MOC-II

Introduciendo un término de balance adicional en la ecuación (5) (Liou, 1983), se resuelve la ecuación original de momento (4), considerando el multiplicador de inercia:

$$\frac{\alpha^2}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f V_w^2 \dot{m}^2}{2 D A^2 P} + \frac{P g}{V_w^2} \sin \theta + \frac{(1 - \alpha^2)}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

El método desarrollado para el modelo *MOC-I* se aplica de manera similar, obteniéndose las formas discretizadas de las ecuaciones de compatibilidad para el segundo modelo basado en el método de las características. Los términos adicionales en las ecuaciones (6) y (7) son respectivamente:

$$C_{Liou}^+ = C^+ + \frac{V_w}{2A} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) (\dot{m}_P + \dot{m}_A) = 0 \quad (9)$$

$$C_{Liou}^- = C^- + \frac{V_w}{2A} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) (\dot{m}_P + \dot{m}_B) = 0 \quad (10)$$

4 Modelos Implícitos

4.1 Modelo Implicit-I

El modelo *Implicit-I* resuelve las ecuaciones (2) y (4), empleando la aproximación por diferencias finitas centradas para la celda computacional mostrada en la figura 2:

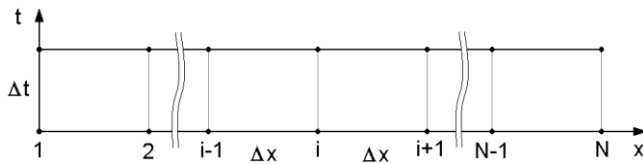


Fig. 2. Discretización para modelos implícitos

El resultado de esta aproximación es:

$$\left(\frac{P_{i+1}^{n+1} + P_i^{n+1} - P_{i+1}^n - P_i^n}{2 \Delta t} \right) + \frac{V_w^2}{A} \left(\frac{\dot{m}_{i+1}^{n+1} - \dot{m}_i^{n+1}}{\Delta x} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\dot{m}_{i+1}^{n+1} + \dot{m}_i^{n+1} - \dot{m}_{i+1}^n - \dot{m}_i^n}{2 \Delta t A} \right) + \frac{f V_w^2}{D A^2 (P_{i+1}^{n+1} + P_i^{n+1})} \left(\frac{\dot{m}_{i+1}^{n+1} + \dot{m}_i^{n+1}}{2} \right) + \left(\frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{P_{i+1}^{n+1} + P_i^{n+1}}{2} \right) \frac{g}{V_w^2} \sin \theta = 0 \quad (12)$$

Las ecuaciones (11) y (12) algebraicas no-lineales forman un sistema de ecuaciones que debe resolverse simultáneamente. Así, para cada tamaño de paso temporal (Δt), si existen N secciones en el sistema, existirán N pares de ecuaciones más una condición de frontera para cada extremo. Este conjunto de $2N + 2$ ecuaciones no-lineales debe ser resuelto para las $2N + 2$ variables desconocidas de presión y flujo másico aplicando el método de Newton-Raphson (Burden y Fayres, 2002).

4.2 Modelo Implicit-II

El modelo *Implicit-II* resuelve las ecuaciones (2) y (3), empleando la aproximación por diferencias finitas centradas (Vieira, 2010). La discretización de la ecuación 2 resulta en la ecuación (11), y la de la ecuación (3) resulta en:

$$\frac{\dot{m}_{i+1}^{n+1} + \dot{m}_i^{n+1} - \dot{m}_{i+1}^n - \dot{m}_i^n}{2 \Delta t A} + \frac{2 (\dot{m}_{i+1}^{n+1} + \dot{m}_i^{n+1}) (\dot{m}_{i+1}^{n+1} - \dot{m}_i^{n+1})}{\Delta x (P_{i+1}^{n+1} + P_i^{n+1}) A^2 / V_w^2} - \frac{(\dot{m}_{i+1}^{n+1} + \dot{m}_i^{n+1})^2 (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1})}{\Delta x (P_{i+1}^{n+1} + P_i^{n+1})^2 A^2 / V_w^2} + \frac{f V_w^2}{D A^2 (P_{i+1}^{n+1} + P_i^{n+1})} \frac{\dot{m}_{i+1}^{n+1} + \dot{m}_i^{n+1}}{2} + \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x} + \frac{P_{i+1}^{n+1} + P_i^{n+1}}{2} \frac{g}{V_w^2} \sin \theta = 0 \quad (13)$$

Al igual que en el modelo *Implicit-I*, las ecuaciones presentadas conforman un sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales de $2N + 2$ ecuaciones con $2N + 2$ incógnitas que deben resolverse simultáneamente.

5 Modelo Semi-Analítico

Yow (1971), desarrolló un método semi-analítico para

obtener una solución de las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales (1), (2) y (4). El procedimiento utilizado para obtener la solución, involucra la teoría de impedancias para las variables con oscilaciones estables junto a una técnica numérica empleada para obtener la matriz de transferencia a lo largo de la longitud de la tubería. Las ecuaciones no-lineales resultantes de la aplicación del método se obtienen a través de un proceso de aproximaciones sucesivas. Este modelo fue utilizado para validar y estimar los errores de los esquemas numéricos empleados.

6 Ejemplos Numéricos

6.1 Variación sinusoidal de flujo en la salida de una tubería

En este caso la solución semi-analítica (Yow, 1971) de las ecuaciones características se compara con los modelos MOC-I y MOC-II y con los modelos Implicit-I e Implicit-II. El ejemplo considerado es una tubería horizontal de 5000 m, 500 mm de diámetro interno, como se muestra en la figura 3:

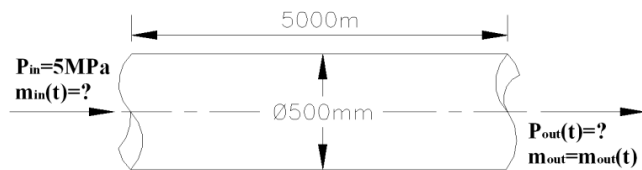


Fig. 3. Esquema de la tubería para el ejemplo 6.1

Para este caso, se mantiene una presión fija en la entrada de 5 MPa y un flujo másico variable a la salida de $\dot{m}_{out} = \dot{m}_0 + \Delta \dot{m} \sin(2\pi t / \tau)$. El flujo másico inicial en estado estable es de $\dot{m}_0 = 80 \text{ kg/s}$, la amplitud de la variación del flujo es $\Delta \dot{m} = 40 \text{ kg/s}$, t es el tiempo en s, y τ es el periodo de la oscilación en s. La velocidad isotérmica de onda V_w es de 340.2 m/s con $f = 0.009$. El tiempo de simulación fue de 3600 s. Se realizaron simulaciones para dos periodos (τ) 1800 s y 500 s. Para la simulación con los modelos MOC-I y MOC-II se utilizó un multiplicador de inercia y una discretización espacial de $\alpha = 0.68$ y $\Delta t = 0.2 \text{ s}$, respectivamente. Las simulaciones de los métodos Implicit-I e Implicit-II fueron realizadas usando diferentes densidades de malla (11, 21, 31, 41 y 51 nodos) para asegurar independencia de la malla en los resultados, y se consiguió que la densidad de 51 nodos ($\Delta x = 100 \text{ m}$) es suficiente para este problema.

En las figuras 4 y 5 se muestran los resultados de flujo másico y presión respectivamente, para un periodo de 1800 s. Se observa que todos los métodos se superponen, y se visualiza la pequeña discrepancia de los mismos con la solución semi-analítica. La amplitud del flujo másico predi-

cha por todos los métodos numéricos aparece desplazada ligeramente hacia abajo, la amplitud de la presión predicha por todos los métodos numéricos es un poco menor, y el periodo es ligeramente diferente entre los métodos numéricos y la solución semi-analítica.

Las figuras 6 y 7 muestran los resultados de flujo másico y presión respectivamente para un periodo de 500 s. Para estas figuras se presenta un comportamiento similar al de las figuras 4 y 5 desde el punto de vista de la amplitud del flujo másico y la presión, sin embargo, las diferencias en el periodo disminuyen.

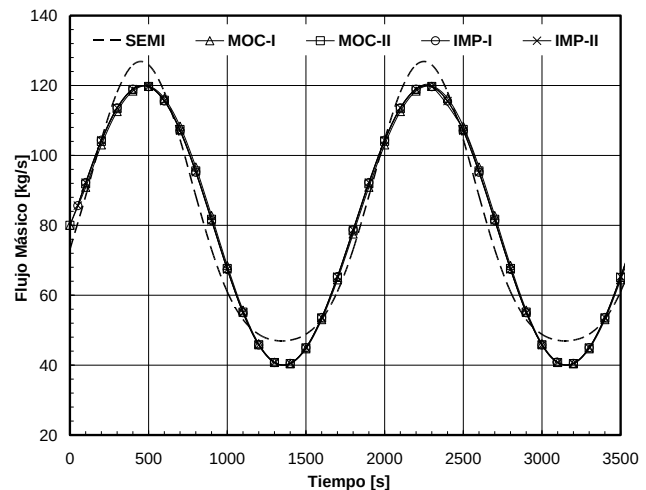


Fig. 4. Comparación de los modelos para flujo másico en la entrada de la tubería, $\tau = 1800 \text{ s}$

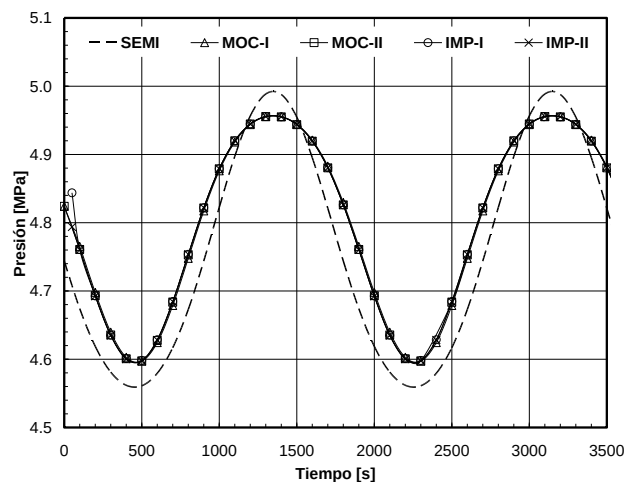


Fig. 5. Comparación de los modelos para presión en la salida de la tubería, $\tau = 1800 \text{ s}$

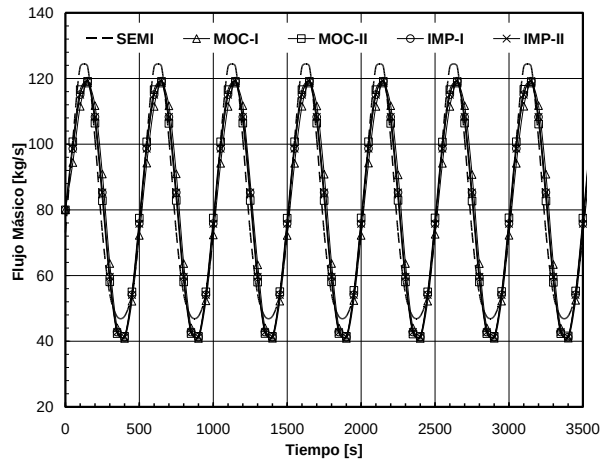


Fig.6. Comparación de los modelos para flujo másico en la entrada de la tubería, $\tau = 500s$

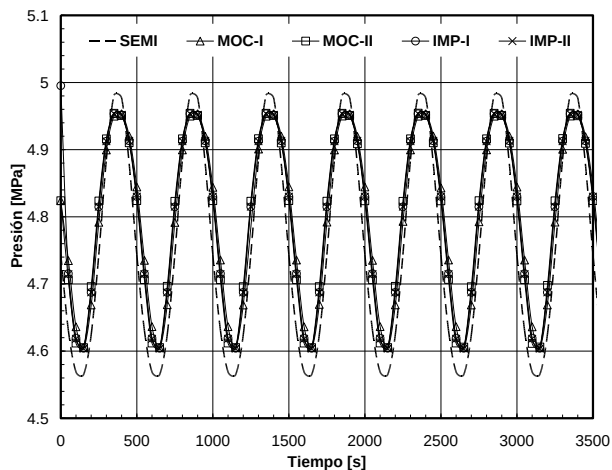


Fig.7. Comparación de los modelos para presión en la salida de la tubería, $\tau = 500s$

6.2 Apertura y cierre de válvula a la salida de una tubería

En este caso, se considera el flujo de gas a través de una tubería horizontal de $5000m$, $500mm$ de diámetro interno, con una presión fija en la entrada de $5MPa$.

En determinado instante, la válvula instalada al final de la tubería se abre, y el flujo de gas se incrementa de cero a $\dot{m} = 80kg/s$. Luego de mantener esta condición por $150s$, la válvula se cierra totalmente. Para las pruebas se seleccionó un factor de fricción constante de $f = 0.009$. La velocidad isotérmica de onda fue de $340.2m/s$. Este sistema es similar al empleado por Kiuchi, (1994) y Abbaspour y Chapman (2008) para comparar modelos de flujo transitorio. Se determinó que una densidad de malla de 51 nodos ($\Delta x = 100m$) es adecuada para este problema.

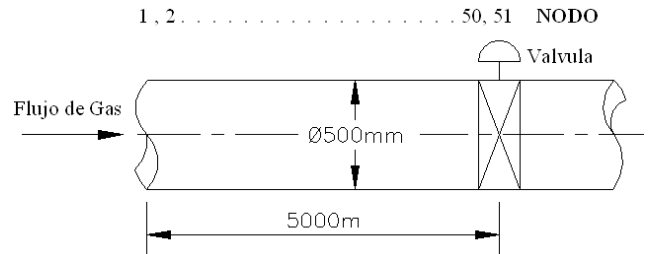


Fig. 8. Esquema de la tubería para el ejemplo 6.2

Las figuras 9 y 10 comparan los resultados de los métodos MOC-I y MOC-II respectivamente para el flujo másico en la entrada. La diferencia entre estos dos modelos es el término de balance en la ecuación de momento. Este no afecta la frecuencia de las oscilaciones, pero si afecta la amplitud de las mismas.

Las figuras 11 y 12 muestran los resultados del flujo másico en la entrada para los modelos Implicit-I e Implicit-II. El modelo Implicit-II, resuelve la ecuación de momento considerando el término convectivo. Se observa la poca influencia este término, y en cambio resaltan la marcada influencia de la discretización temporal en estos métodos.

Las figuras 13 y 14, presentan los resultados de la presión en la entrada y salida de la tubería usando los métodos MOC-I y MOC-II respectivamente. Existe una significativa diferencia en la predicción de las presiones entre estos dos métodos, esto se debe principalmente al término de balance y su influencia en la predicción de la magnitud del flujo másico, a mayor amplitud en la oscilación del flujo másico, mayor amplitud en oscilación de la presión, pero invirtiendo su dirección respecto a la media en cada caso.

Finalmente, las figuras 15 y 16 exhiben el comportamiento de la presión a la entrada y la salida de la tubería para los modelos Implicit-I e Implicit-II, donde la influencia del término convectivo es nuevamente muy baja, y el paso del tiempo resulta determinante en la magnitud y frecuencia de las oscilaciones.

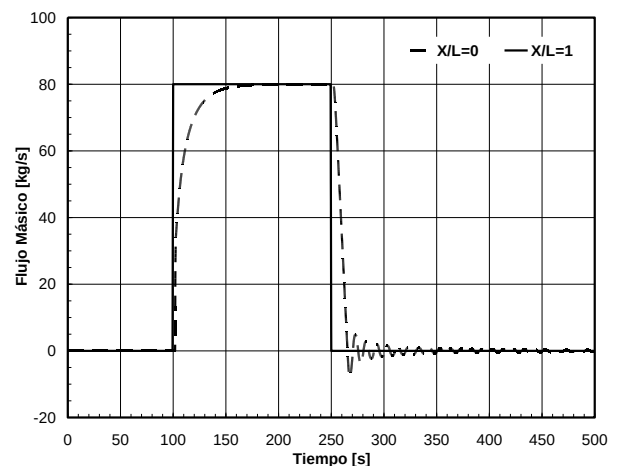


Fig.9. Flujo másico en la entrada de la tubería
Método MOC-I ($\alpha = 0.17$, $\Delta t = 0.05s$)

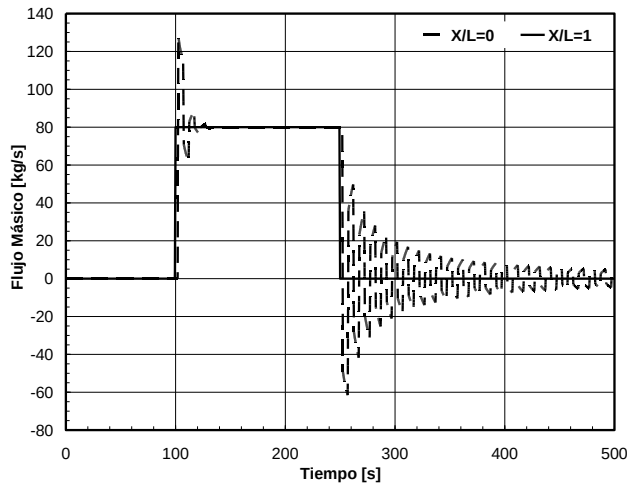


Fig.10. Flujo másico en la entrada de la tubería
Método MOC-II ($\alpha = 0.17$, $\Delta t = 0.05$ s)

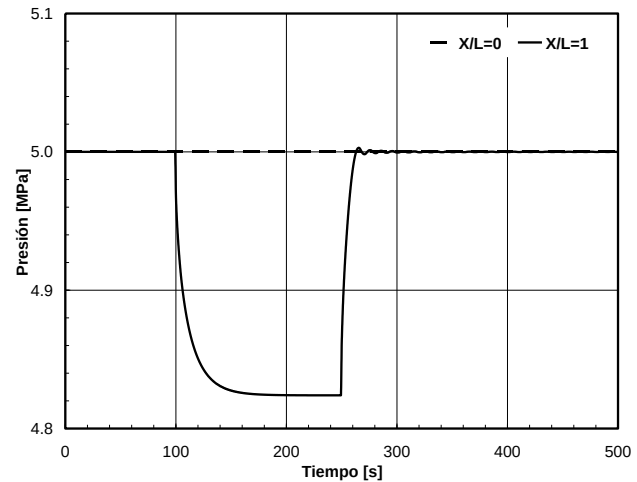


Fig.13. Presión en la entrada y en la salida de la tubería
Método MOC-I ($\alpha = 0.17$, $\Delta t = 0.05$ s)

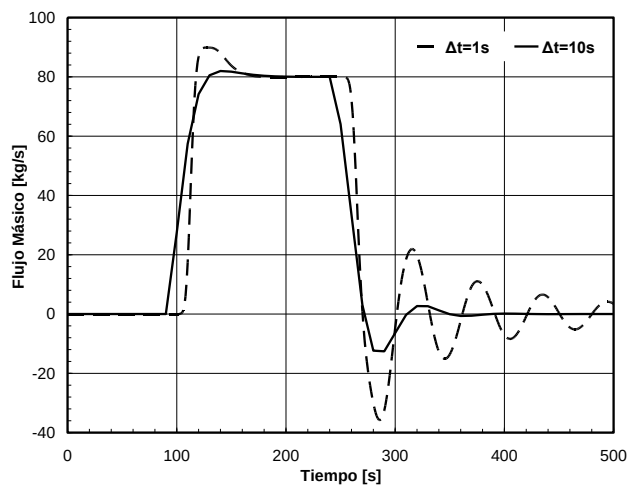


Fig.11. Flujo másico en la entrada de la tubería para
diferentes pasos de tiempo. Método Implicit-I ($\Delta x = 100$ m)

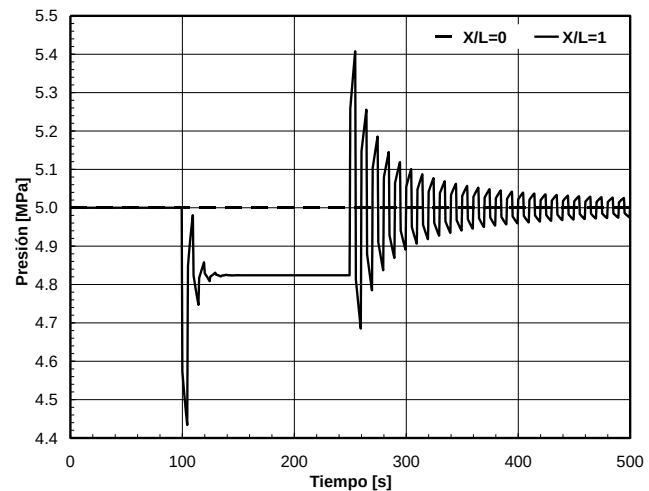


Fig.14. Presión en la entrada y en la salida de la tubería
Método MOC-II ($\alpha = 0.17$, $\Delta t = 0.05$ s)

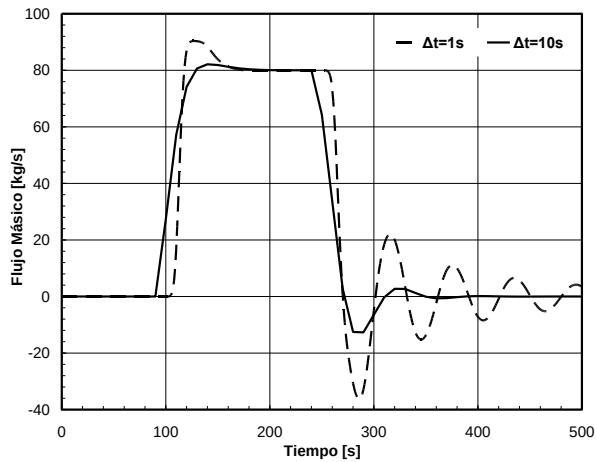


Fig.12. Flujo másico en la entrada de la tubería para diferentes
pasos de tiempo. Método Implicit-II ($\Delta x = 100$ m)

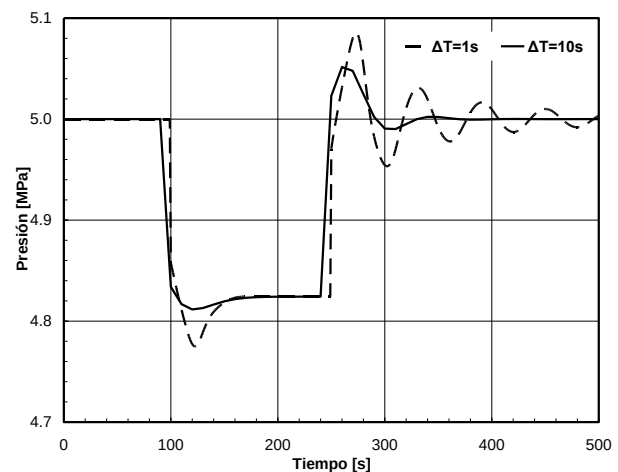


Fig.15. Presión en la salida de la tubería para diferentes
pasos de tiempo Método Implicit-I ($\Delta x = 100$ m)

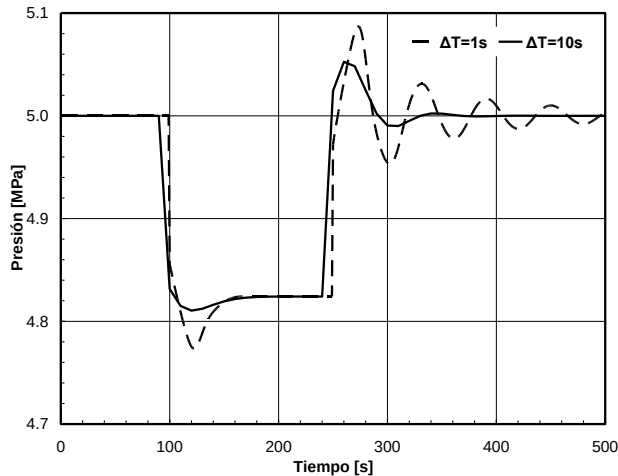


Fig.16. Presión en la salida de la tubería para diferentes pasos de tiempo. Método *Implicit-II* ($\Delta x = 100\text{ m}$)

7 Conclusiones

En el presente estudio, se compararon mediante ejemplos numéricos, los modelos para la simulación de las condiciones transitorias de flujo isotérmica de gas en tuberías.

Los valores obtenidos para los modelos, en el caso de la variación sinusoidal de flujo a la salida de una tubería con presión constante en la entrada, concuerdan satisfactoriamente con los obtenidos para la solución semi-analítica de las ecuaciones, verificando así los modelos numéricos implementados.

Para el caso de cierre de válvula a la salida de una tubería, los modelos MOC-II, Implicit-I e Implicit-II, se observa un buen comportamiento físico, pues la capa de fluido aguas arriba de la válvula es desacelerada instantáneamente, lo que causa que la presión en este punto se incremente. Como la onda de presión comienza a viajar hacia la entrada de la tubería, el incremento de la presión en extremo final de la tubería es mayor que en resto de la tubería aguas arriba, resultando en una inversión del sentido del flujo másico. El flujo másico inverso hace que la presión descienda nuevamente, creando un flujo oscilatorio como mostró en las figuras 9 a la 16. La magnitud de estas oscilaciones y su frecuencia, dependen del modelo usado y de los pasos espaciales y temporales implementados. Para el modelo MOC-I, se observan bajas oscilaciones, y por tanto un comportamiento físico pobre.

Los resultados numéricos muestran:

- El MOC-I falla en las predicciones por carecer de término de balance.
- El término de balance en la ecuación de momento no afecta las predicciones de flujos transitorios lentos. Sin embargo, debe ser considerado en los modelos de flujos transitorios rápidos.

- Los métodos implícitos de diferencias finitas Implicit-I e Implicit-II, son estables y capaces de predecir simulación de largo de plazo.

Referencias

- Abbaspour M, y Chapman, K.S, 2008, Nonisothermal Transient Flow in Natural Gas Pipeline, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol. 75, Issue 3, pp. 0310181-0310188.
- Burden R. L, Faires D. J, 2002, Numerical Analysis, Brooks Cole.
- Kiuchi T, 1994, An Implicit Method for Transient Gas Flows in Pipe Networks, Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 15, No. 5, pp. 378-383.
- Liou C.P, 1983, Calculations of Transients in Batched Pipelines, 4th Int. Conf. Pressure Surges. BHRA, Bath, UK, pp. 13-25.
- Vieira R, 2010, Estudio comparativo de modelos de flujo transitorio en redes de gas, Maestría en Ingeniería Mecánica. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
- Wylie E.B, Streeter, V.L. y Stoner. M. A, 1971, Unsteady-state natural-gas calculations in complex pipe systems, SPE Journal, Vol. 14, pp. 35-43.
- Wylie E.B. y Streeter V.L, 1978, Fluid Transients, McGraw Hill, New York.
- Yow W, 1971, Analysis and Control of Transient Flow in Natural Gas Piping Systems, Ph.D. Thesis, Civil Engineering Dept, University of Michigan, USA.

Recibido: 10 de septiembre de 2012

Revisado: 15 de julio de 2013

Vieira, Ronald: Ingeniero Mecánico egresado de la Universidad de Los Andes en 2005. Obtuvo su título de Maestría en Ingeniería Mecánica, Mención Termodinámica en la Universidad de Los Andes en 2010. Actualmente es Candidato a Doctor en Ingeniería Mecánica en la Universidad de Tulsa, Oklahoma. Correo electrónico: rev87@utulsa.edu.

Torres-Monzón, Carlos: Profesor Titular del Departamento de Ciencias Térmicas de la Universidad de Los Andes (ULA). Ingeniero Mecánico y M.Sc. en Matemática Aplicada, (ULA). Ph.D en Ingeniería Mecánica, The University of Tulsa - USA. Postdoctorado en University College London - UK. Investigador Asociado, Tulsa University Fluid Flow Projects - USA.

