

Programa para el modelado de la dinámica de rotores usando elementos finitos

Vergara*, Leonardo; Vergara, Mary y Provenzano, Sebastián
Universidad de Los Andes. Facultad de Ingeniería. Escuela de Mecánica
*lvergara@ula.ve, vmary@ula.ve, prse@ula.ve

Resumen

En este trabajo se desarrolla un programa que utiliza como interfaz un programa comercial de elementos finitos capaz de simular y determinar las características dinámicas de rotores, las cuales juegan un rol importante tanto en el diseño, como en la producción, la operación y el mantenimiento de maquinaria rotativa. El modelado y análisis de una maquinaria complicada con componentes rotativos se realiza en varias etapas. Inicialmente se necesita establecer la complejidad del modelo del sistema. Esta elección está basada en los objetivos del análisis, los cuales implican, determinar las características dinámicas de las vibraciones del sistema amortiguado o no; representar por frecuencias naturales, modos de vibración, velocidades críticas y respuesta armónica cuando el sistema es sometido a desbalance. Para proporcionar una estimación razonable de estas características se utiliza un modelo simple conformado por componentes identificados como primarios por su constitución e interacción entre ellos: disco, cojinete y masa desbalanceada. Posteriormente, con el fin de validar el modelado se comparan los resultados obtenidos experimentalmente y con otros reportados en la literatura.

Palabras clave: Dinámica de rotores, elementos finitos, vibración, velocidades crítica, modos de vibración.

Finite element rotor dynamics modeling program

Abstract

This work presents the use of a finite element commercial program to simulate and define dynamic characteristics of rotating systems. This is an important requirement for proper design, operation and maintenance of rotating machinery. Modeling and analysis of complex machinery with rotating components involve different stages. First, model complexity must be established on the basis of its objectives and this implies to determine vibration characteristics of either damped or undamped system, and the natural frequencies, vibration modes, critical velocities and harmonic response of the rotating system under unbalanced conditions. A reasonable estimate of these dynamic characteristics is obtained with a simple model built with primary interacting elements: shaft, disk, bearing, unbalanced mass. Finally, the model response is compared with experimental measurements and the results of other investigators.

Key words: Rotordynamics, finite elements, vibration, mode shape, critical velocity.

Recibido: 02-05-05 Revisado: 23-03-07

1. Introducción

Las características dinámicas de una máquina deben ser conocidas antes de que un problema de vibración pueda ser diagnosticado y/o corregido. Éstas tienen dos formas de ser determinadas: la primera a través de técnicas o pruebas de identificación de parámetros y la segunda por técnicas de predicción analítica en las cuales se modelan sistemas rotativos. Las técnicas de modelado de rotores asociadas con una comprensión práctica del comportamiento de la maquinaria están siendo reconocidas como un valioso enfoque en el campo de diagnóstico y detección de fallas por lo tanto juegan un rol significativo para certificar la operación segura y confiable de los equipos rotativos. Los modelos analíticos son estudiados para proveer comprensión y guía durante la prueba de una máquina nueva, para la mejora del diseño original o para la detección y corrección de fallas cuando ocurra un comportamiento inesperado en la operación.

En la siguiente sección, se explican los elementos básicos para modelar un sistema rotativo aplicando las ecuaciones de Lagrange y se presentan las ecuaciones que representan estos elementos para un modelo discreto a través del Método de Elementos Finitos (MEF).

Posteriormente en la sección tres se introducen las ecuaciones que representan los elementos del sistema rotativo y la ecuación de movimiento del mismo, y se presenta un método para estimar las frecuencias naturales, modos de vibración, velocidades críticas y respuesta armónica a fuerzas de excitación.

En la sección cuatro se verifican resultados obtenidos a través de ejemplos de sistemas rotativos hacia

comparaciones con valores de referencia. Finalmente se presentan las conclusiones.

2. Modelo numérico

La ecuación general de la dinámica que rige el comportamiento del rotor puede encontrarse siguiendo los siguientes pasos (Lalanne, 2001):

- Se deben calcular la energía cinética T , la energía de deformación U y el trabajo virtual de las fuerzas externas dW
- Aplicar la ecuación de Lagrange's para obtener:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = Fq_i \quad (1)$$

donde Fq_i son las fuerzas generalizadas, q_i coordenadas generalizadas independientes.

- El modelo numérico viene representado por una discretización del dominio, que lleva a obtener las siguientes expresiones matriciales que considera la presencia de discos, eje y cojinetes que forman el rotor.

2.1 El disco:

El disco está construido a partir de un elemento con capacidades de tensión-compresión, torsión y flexión. El elemento tiene seis grados de libertad en 2 nodos. A estos se les restringen 2 grados de libertad con lo que las libertades están limitadas a: dos desplazamientos y dos giros alrededor de los ejes X y Z con sus respectivos ángulos θ y ψ , de tal forma que el vector desplazamiento de el centro del disco está dado según: $d = [u, w, q, y]^T$ de tal manera que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde la primera matriz es la matriz de masas y la segunda es la matriz Giroscópica y los vectores representan velocidades y aceleraciones presentes en el disco.

2.2 El eje:

Este se modela como una viga de sección circular, el elemento finito que simula el eje tiene tres nodos y las matrices son de orden superior con cuatro desplazamientos, según el vector:

$$d = [u_1, w_1, q_1, y_1, u_2, w_2, q_2, y_2, u_3, w_3, q_3, y_3]^T \quad (3)$$

El elemento finito se construye según las funciones de interpolación:

$$\begin{aligned} u &= N_1(y) \delta u \\ w &= N_2(y) \delta w \end{aligned} \quad (4)$$

donde N_1 y N_2 son las funciones de desplazamiento. Finalmente la energía cinética del eje puede expresarse según:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + C \dot{\delta} \quad (5)$$

donde M_s y M corresponde a las matrices de masa y C a la matriz de amortiguamiento viscoso. El eje usa elemento cuadrático (3 nodos) que tiene 6 grados de libertad en cada nodo, restringiendo 2 grados de libertad basado en la teoría de vigas de Timoshenko (Timoshenko and Goodier, 1970)

2.3 Los Cojinetes:

El cojinete es modelado con un elemento de tensión-compresión uniaxial con cuatro grados de libertad en cada nodo. Este se define a través de la constante de amortiguamiento C y la constante de elasticidad K . El trabajo virtual d

Este se define a través de la constante de amortiguamiento C y la constante de elasticidad K . El trabajo virtual de las fuerzas que actúan en el eje, según los cojinetes puede expresarse según:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx} & 0 & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{zx} & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde la primera matriz representa la rigidez en los cojinetes y la segunda la matriz de amortiguamiento viscoso. Los vectores representan el desplazamiento y la velocidad en los cojinetes.

3. Formulación general de la ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento de un sistema rotodinámico, modelado para análisis de vibraciones laterales formulada en variables reales en la forma de una ecuación matricial puede ser escrita como:

$$[M] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (7)$$

donde: $[M]$, $[C]$ y $[K]$, son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente.

La matriz $[C]$ incluye tanto los efectos de amortiguamiento como los efectos giroscópicos:

$$[C] = C^0 + \Omega G^0 \quad (8)$$

En la Ec.(7) las coordenadas nodales del sistema y , z , f_y y f_z se pueden llevar a coordenadas globales: desplazamiento q y al vector fuerza f respectivamente (D.C. Han, Choi and Lee, 1995).

$$[M] \ddot{q} + [C] \dot{q} + [K] q = 0 \quad (9)$$

Al asumir que todos los grados de libertad oscilan con la misma frecuencia y en fase, la solución puede ser expresada como:

$$q = \phi e^{\lambda t} \quad (10)$$

En esta expresión λ corresponde a la frecuencia y ϕ al vector de modo de vibración correspondiente.

Sustituyendo la expresión para q en Ec. (9) se obtiene:

$$[K - \lambda^2 M + i\lambda C] \phi = 0 \quad (11)$$

Donde: λ = autovalores
 ϕ_i = autovectores

$[K]$, $[M]$, y $[C]$ son matrices de orden n con lo que la Ec. (11) se transforma en la ecuación generalizada:

$$[A]y = Q[B]y \quad (12)$$

La Ec. (12) se transforma en la forma estándar de los autovalores por el método de Lanczos (Z. Bai, 1996). Utilizando como entrada, las matrices A y B de la Ec. (12), cuatro vectores de prueba, y el número m de autovalores deseados.

Comenzando con cuatro vectores aleatorios $[V_1]$, $[W_1]$, $[P_1]$, $[q_1]$, el sistema de matrices $[K]$, $[M]$ y $[C]$ transformadas en una matriz tridiagonal $[T]$ de tamaño m ($m \ll n$), a través de la transformación biortogonal Lanczos. Los autovalores Q_i de la matriz $[T]$, son calculados como una buena aproximación del sistema generalizado. Los autovalores λ_i y extraídos a través del algoritmo QR (Wilkinson, 1988). El problema transformado es dado en la Ec.(13).

$$[T] U_i = Q_i U_i \quad (13)$$

Posteriormente los autovalores y autovectores de las Ecs.(11) y (13) son relacionados por:

$$\lambda_i = \frac{1}{\Theta_i} \tag{14}$$

$$j_i = [V] U_i \tag{15}$$

donde [V]= matriz de vectores Lanczos (tamaño $n \times m$)

Esta técnica del block Lanczos es muy eficiente para obtener los autovalores, y estos serán más exactos a me que aumente el tamaño del espacio m.

4. Determinación de las características dinámicas de diferentes modelos

A continuación en Fig. 1, se presenta un ejemplo modelado a través del programa que tiene solución teórica Lalanne y Ferraris, 2001.

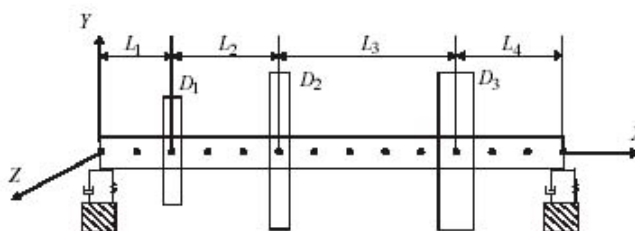


Fig. 1. Rotor con tres discos y sección transversal constante

Tabla 1. Datos del disco

Disco	D1	D2	D3
Ancho (m)	0.05	0.05	0.06
Radio interno (m)	0.05	0.05	0.05
Radio externo (m)	0.12	0.20	0.20

El rotor dispone de un eje de 13 elementos tipo barra los cuales tienen la misma longitud en metros. Su dimen está definida por: $L_1=0.2, L_2=0.3, L_3=0.5, L_4=0.3$; el diámetro de la sección transversal es 0.1 m y los datos disco están dados en la Tabla 1.

En el rotor mostrado, el disco y el eje son de acero y caracterizados por:

- $\nu=0.3$
- $E=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$.

Los dos cojinetes son asumidos idénticos con las siguientes propiedades:

- $K_y=5 \times 10^7 \text{ N/m}$
- $K_z=7 \times 10^7 \text{ N/m}$
- $C_y=5 \times 10^2 \text{ N.s/m}$
- $C_z=7 \times 10^2 \text{ N.s/m}$

El rango de velocidad de rotación del rotor se estudia desde 0 hasta 30.000 rpm.

4.1 Frecuencias naturales, velocidades críticas y modos de vibración

Se buscaron las primeras 7 frecuencias naturales en 25.000 rpm y los resultados encontrados están resumidos en la tabla 2 en la cual se puede observar que el error más elevado es de 3.05% en la quinta frecuencia natural a la velocidad dada.

Tabla 2. Frecuencias en Hertz a 25.000 rpm

Frecuencia	A : [Hz]	B : [Hz]	%Error (n=1)
------------	----------	----------	--------------

Frecuencia	Referencia	Determinado	$= \frac{(B-A)}{A} \times 100$
F1	55.64	55.62	0.04
F2	67.20	66.83	0.55
F3	157.9	157.42	0.30
F4	193.6	192.48	0.58
F5	249.9	242.26	3.05
F6	407.5	402.14	1.31
F7	446.7	434.54	2.72

El diagrama de Campbell obtenido es el siguiente:

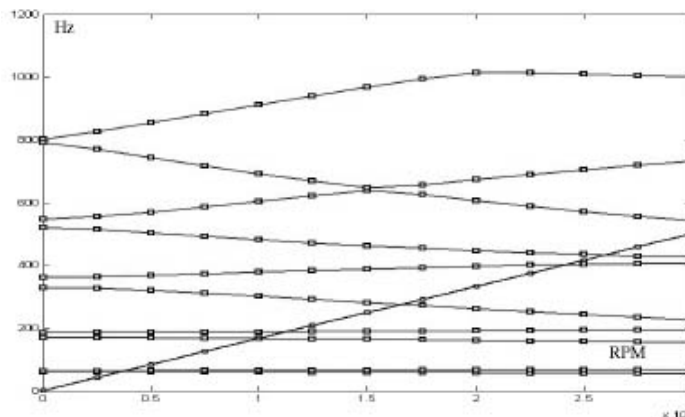


Fig. 2. Diagrama de Campbell y velocidades críticas

Las velocidades críticas son las intersecciones de la línea de frecuencia $F = RPM / 60$ (línea azul), con las línea frecuencia (en rojo). Los resultados obtenidos se especifican en la tabla 3.

Tabla 3. Velocidades críticas

Velocidad crítica	A [rpm] Referencia	B [rpm] Determinado	%Error $= \frac{(B-A)}{A} \times 100$
1	3620.4	3619.76	0.02
2	3798.1	3796.31	0.05
3	10018	10008.35	0.09
4	11279	11250.61	0.25
5	16785	16499.90	1.69
6	24408	24064.88	1.41
7	26615	25955.04	2.48

Para los resultados de velocidades críticas dados en la tabla 3 se encontraron valores muy aproximados a los d en Lalanne con un error máximo de 2.48% para la séptima velocidad crítica y 1.69% para la quinta velocidad crí

4.2 Respuesta al desbalance de masa

Utilizando el mismo modelo rotativo anterior se tiene una masa desbalanceada de 0.0002 kg.m en el disco D; rango de frecuencias a estudiar va desde 0 hasta 500 Hz (30.000 rpm); los resultados son medidos en el nodo de esta centrado el disco D2. Los resultados para el nodo de referencia son mostrados en la Fig. 3. en es logarítmica.

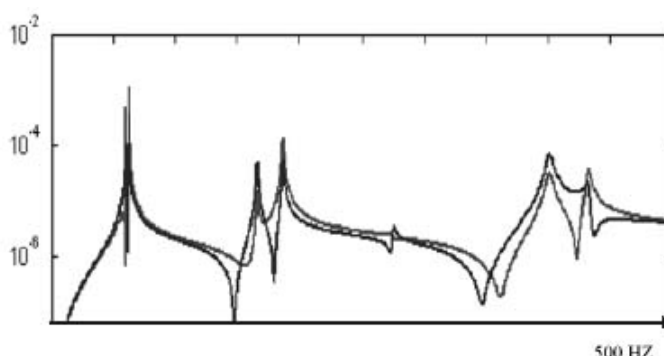


Fig. 3. Respuesta armónica

Entre las características del sistema rotativo modelado con este ejemplo se puede resaltar cojinetes con diferentes propiedades en las dos direcciones ortogonales. También pusieron a prueba los módulos de: frecuencias naturales, velocidades críticas y respuesta al desbalance. Por otra parte en este ejemplo se probó la caracterización del disco a través de su geometría.

A continuación en Fig. 4, se presenta un ejemplo modelado que tiene solución teórica en Feng y Chun, 2001.

El eje está compuesto por 13 nodos, y está dividido en 6 secciones longitudinales, cada una formada por 3 nodos.

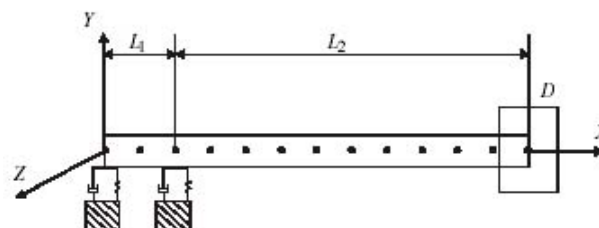


Fig. 4. Vista lateral del rotor Overhung

Las dimensiones son longitud $L_1 = 0.096\text{m}$ y $L_2 = 0.48\text{m}$.

El disco y el eje están caracterizados por:

Tabla 4. Material del eje y disco

Módulo de Poisson ν	Módulo de elasticidad E	Densidad ρ
0.3	$2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	7800 kg/m^3

El eje tiene sección transversal constante, diámetro exterior = 0.016m y longitud=0.576m

Tabla 5. Propiedades del disco

Ubicación [m]	Masa	$I_p \text{ kgm}^2$	$I_T \text{ kgm}^2$
0.576	0.8247 kg	3.9750×10^{-4}	3.0871×10^{-4}

Tabla 6. Ubicación y propiedades de los cojinetes

Cojinete	Posición [m]	$K_y \text{ (N/m)}$	$K_z \text{ (N/m)}$	$C_y = C_z \text{ (Ns/m)}$
1	0.00	3.0×10^7	3.0×10^7	100
2	0.096	3.0×10^7	3.0×10^7	100

El rango de velocidad de rotación del rotor se estudia desde 0 hasta 13.000 rpm.

Tabla 7. Frecuencias en RPM con una velocidad del rotor de 1000 rad/s

Frecuencia	A: [RPM] Referencia	B: [RPM] Determinado	%Error $= \frac{(B-A)}{A} \times 100$
F1	1079.36	1055.4	2.21
F2	1079.58	1087.08	0.69
F3	11142.08	11145.6	0.03
F4	11154.67	11984.4	7.43

F5	35210.10	32377.8	8.74
F6	35256.47	35236.8	0.06

4.3 Frecuencias naturales y velocidades críticas

Se buscaron las primeras 6 frecuencias naturales en 1000 rad/s = (9549 rpm) y los resultados encontrados e resumidos en la tabla 7.

Los resultados en las velocidades críticas obtenidas y su error se especifican en la Tabla 8.

Tabla 8. Velocidades críticas

Velocidad crítica	A: [RPM] Referencia	B: [RPM] Determinado	%Error $= \frac{(B-A)}{A} \times 100$
1	1076.86	1069.53	0.68
2	1081.19	1073.08	0.75
3	10624.70	11074.29	4.23
4	11363.90	12087.65	6.36
5	30554.85	29402.13	3.77
6	36099.65	38673.48	7.12

En este ejemplo se caracterizó el disco a través de sus propiedades. Los mayores errores encontrados para frecuencias naturales a 1000 rad/s son de 7.43 y 8.74 %. No obstante, para la mayoría de ellas no supera el %. Además se puede observar que los mayores errores encontrados para las velocidades críticas son de 6.36 y %; sin embargo, para la mayoría no supera el 4.23 %.

5. Agradecimientos

Los autores de este trabajo agradecen al CDCHT por la colaboración y financiamiento otorgados a este trabajo designado bajo el código: N° ZG-DIM-I-02-04.

6. Conclusiones

Se ha elaborado un modelo partiendo de un estudio de los principales componentes: ejes, discos, cojinetes y fue inerciales; puesto que cada uno de ellos tiene una función y comportamiento particular que influye en la actuación total de un rotor en general.

El programa de elementos finitos permite hacer análisis de frecuencias naturales, modos de vibración, velocidades críticas, de la respuesta a una masa desbalanceada y de la respuesta a fuerzas fijas en el espacio en un rango de frecuencia especificado, y con un mínimo error. Sin embargo, la entrada de los valores, variables, elección de elementos y de los comandos resulta una tarea ardua y requiere del conocimiento muy preciso de un experto en herramienta, asimismo es una desventaja el hecho que la salida de los resultados requieren muchas corridas de análisis. Por esta razón en esta investigación se crearon subrutinas que funcionan como interfaz y permite entrada de datos de una manera fácil y secuencial y además permite realizar las corridas necesarias para obtener resultados requeridos.

Con los ejemplos realizados se observan errores pequeños lo que permite validar la simulación utilizando elementos finitos.

Referencias

1. Bai Z, 1996, An adaptive block lanczos method for nonhermitian eigenvalue problems. Department Mathematics, University of Kentucky.
2. Han DC, Choi SH, y Lee YH, 1995, Analysis of vibration characteristics for a rotor-bearing system using distributed spring and damper model, Int. J. of Rotating Machinery, Vol. 1, No.3-4, pp. 277-284.
3. Lalanne M y Ferraris G, 2001, Rotordynamics prediction in engineering, John Wiley & Sons.
4. Timoshenko S y Goodier JN, 1970, Theory of elasticity, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, NY.
5. Tyan F y Huang CT, 2001, The Building and mode shape analysis of flexible rotor system by using AD/ Department of Aerospace Engineering, TamKang University.

6. Wilkinson J.H, 1988, The algebraic eigenvalue problem, Clarendon Press, Oxford, pp. 515-569.