Modelación de Exclusión Mutual de Sistemas de Eventos Discretos con Redes de Petri

Modeling Mutual Exclusion of Discrete Event Systems with Petri Nets

Mata, Guelvis[1]*; Méndez, Arnaldo[2]; Cardillo, Juan[3] y Chacón, Edgar[3]
[1]Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, ULA
Mérida 5101, Venezuela.
[2]Facultad de Ingeniería, Departamento de Física y Matemáticas, UNEFM
Falcón 4101, Venezuela.
[3]Facultad de Ingeniería, Escuela de Sistemas, ULA
Mérida 5101, Venezuela.
*gmata@ula.ve

Resumen

En este artículo incluiremos la terminología necesaria en un medio ambiente de manufactura para establecer una metodología de modelación de Sistemas de Eventos Discretos conteniendo una Exclusión Mutual. Nuestro problema general para la modelación de Sistemas de Manufactura con Redes de Petri es establecido como sigue: dadas las especificaciones o requerimientos en un Sistema de Manufactura, construir una Red de Petri cuya estructura contenga una Exclusión Mutual.

Palabras clave: Sistemas de Eventos Discretos, Redes de Petri y Exclusión Mutual.

Abstract

In this article, we will include the terminology needed in a manufacturing environment to establish a methodology for modeling Discrete Event Systems containing a Mutual Exclusion. Our general problem for Manufacturing System modeling with Petri nets is established as follows: Given the specifications or requirements into a Manufacturing System, construct a Petri net whose structure contains a Mutual Exclusion.

Key words: Discrete Event Systems, Petri Nets and Mutual Exclusion.

1 Introducción

Hay un conflicto en un Sistema de Eventos Discretos (SED) cuando dos o más procesos están listos para ejecutar acciones diferentes que dependen directamente de la utilización de un recurso compartido (más generalmente de n recursos compartidos, con $n \in \mathbb{N}$). Tales acciones o eventos son llamados exclusivos mutualmente en el sentido que ellos no pueden ocurrir al mismo tiempo. De hecho, cuando uno de ellos ocurre (lo cual significa que un proceso ocupa el recurso) el otro proceso debe esperar por la liberación de dicho recurso.

En este artículo incluiremos la terminología necesaria en un medio ambiente de manufactura para establecer una metodología de modelación de SED conteniendo una Exclusión Mutual (EM). Nuestro problema general para la modelación de Sistema de Manufactura con Redes de Petri (RP) es establecido como sigue: dadas las especificaciones o requerimientos en un Sistema de Manufactura, construir una RP cuya estructura contenga una EM.

La organización de este artículo comienza incluyendo las definiciones básicas de RP en un medio ambiente de manufactura; para posteriormente, incluir una metodología de modelación y la significación de propiedades en este contexto. Finalmente, clasificaremos los lugares de una RP para facilitar la representación de una EM.

2 Definiciones Básicas y Propiedades

Una Red de Petri (RP) es un cuádruple $R = (L, T, E, S)$ donde $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ es un conjunto finito de lugares, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ es un conjunto finito de transiciones, $L \cap T = \emptyset$, $E : T \to L^\infty$ es una función de entrada: para cada $t \in T, E(t) \in L^\infty$ es llamado multiconjunto de lugares de entrada para t (L^∞ denota el multiconjunto con números de ocurrencias ilimitado); y $S : T \to L^\infty$ es una función de salida: para cada $t \in T, S(t) \in L^\infty$ es llamado multiconjunto de lugares de salida para t (Castellano 2006, Peterson 1981)

Ahora para determinar el comportamiento dinámico de la red damos paso a la representación de estatus de lugares asociando a cada lugar de la red un número natural que especifica un significado preciso de la condición del lugar. Formalmente, una RP marcada es un par $M = (R, m)$, donde R es una RP y $m : L \to \mathbb{N}, \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, es una función de marcación (o marcación): para cada $l_i \in L, m(l_i) \in \mathbb{N}$ es llamado número de fichas en el lugar l_i; la cual especifica un vector $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $n = \text{card}L, m_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, n$ con $m(l_i) = m_i$.

Las RP marcadas pueden ser representadas por grafos dirigidos donde los lugares son representados por círculos y las transiciones por barras. Si un lugar l_i es un lugar de entrada para una transición t; es decir $l_i \in E(t)$, entonces hay $|l_i, E(t)|$ (número de veces que l_i está en el multiconjunto de lugares de entrada $E(t)$) arcos dirigidos del correspondiente círculo a la correspondiente barra (Castellano 2006). Si un lugar l_j es un lugar de salida para la transición t; es decir, $l_j \in S(t)$, entonces hay $|l_j, S(t)|$ (número de veces que l_j está en el multiconjunto de lugares de salida $S(t)$) arcos dirigidos de la correspondiente barra al correspondiente círculo. Finalmente, las fichas son representadas por puntos en el interior del círculo y, en consecuencia, la función de marcación es representada por el número de puntos en el interior de cada círculo.

En relación al comportamiento dinámico de una RP debemos considerar que una marcación representa el estatus de cada uno de los lugares en la red. Así, ésta especifica exactamente el estado actual del sistema que establece las condiciones lógicas para la ocurrencia de eventos, luego, una vez que ocurra un evento las condiciones del sistema varían dando lugar a una nueva marcación o estado. Más precisamente, una transición $t \in T$ en una RP marcada $M = (R, m)$ es llamada habilitada si $m(l_i) \geq |l_i, E(t)|$, para todo lugar $l_i \in L$. En este caso también diremos que la transición t es habilitada por la marcación m. El conjunto de transiciones habilitadas por la marcación m es dado por $\mathcal{E}(m) = \{t \in T / m(l_i) \geq |l_i, E(t)|, \forall\, l_i \in L\}$.

Ahora, si $t \in \mathcal{E}(m)$ entonces la marcación m' dada por $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|$, $i = 1, 2, \ldots, n; n = \text{card}\, L$, es llamada marcación alcanzable desde m por el disparo de t. Además, si $t' \in \mathcal{E}(m')$ y esta es disparada obtenemos como antes una marcación m'', y así sucesivamente. Por lo tanto, se obtiene una función de cambio de marcaciones, la cual puede ser extendida de manera natural; es decir, si la función de cambio de marcaciones $\delta : \mathbb{N}^n \times T \to \mathbb{N}^n, n = \text{card}\, L$, es dada por $\delta(m, t) = m'$ donde $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|, i = 1, 2, \ldots, n$; entonces su extensión es la función parcial $\widehat{\delta} : \mathbb{N}^n \times T^* \to \mathbb{N}^n$, dada por $\widehat{\delta}(m, \theta) = m$ y $\widehat{\delta}(m, \sigma t) = \delta(\widehat{\delta}(m, \sigma), t), m \in \mathbb{N}^n, t \in T, \sigma \in T^*$. Aquí, T^* denota el monoide libre con unidad θ: T^* es el conjunto de todas las combinaciones finitas de elementos de T. Finalmente, como $\widehat{\delta}$ es una extensión de δ no haremos distinción notacional entre ambas (Eilemberg 1974)

Note que la función parcial de cambio de marcaciones δ está definida en (m, t) sí, y solamente sí, $t \in \mathcal{E}\ (m)$.

Por su parte, en una RP marcada $M = (R, m_0)$, una marcación $m \in \mathbb{N}^n, n = \text{card}\ L$, será llamada alcanzable desde m_0 sí existe una sucesión de disparos de transiciones $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \ldots t_{j_k} \in T^*$ tal que $\delta(m_0, \sigma) = m$. Luego, el conjunto de alcanzabilidad de la RP desde la marcación m_0 es dado por $A(R, m_0) = \{m \in \mathbb{N}^n / \exists\, \sigma \in T^*, \delta(m_0, \sigma) = m\}$(Weiss y col., 2007).

Ahora incluiremos algunas propiedades (Riemann 1999) de RP las cuales serán útiles en el desarrollo de este artículo.

Sea $M = (R, m_0)$ una RP marcada. Un lugar $l \in L$ es llamado k-acotado si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m(l) \leq k$, para todo $m \in A(R, m_0)$. Si todos los lugares en la red son k-acotados, entonces la red es llamada k-acotada o simplemente acotada. En particular, si la red es 1-acotada diremos que la red es segura.

M es llamada persistente si para todo $m \in A(R, m_0)$, y todo par $t_i, t_j \in T; t_i \neq t_j; t_i, t_j \in \mathcal{E}(m)$, se tiene que $t_i \in \mathcal{E}(\delta(m, t_j))$.

Por otro lado, la red es llamada no bloqueada (viva) si para toda marcación $m \in A(R, m_0)$ y toda transición $t_i \in T$, existe una marcación $m' \in A(R, m_0)$ alcanzable desde m tal que $t_i \in \mathcal{E}(m')$.

$M = (R, m_0)$ es llamada conservativa si existe $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n), v_i \in \mathbb{N}, n = \text{card}\ L, V \neq 0$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} v_i m(l_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i m_0(l_i),$$

para toda marcación $m \in A(R, m_0)$. Si $V = (1, 1, \ldots, 1)$, entonces la red es llamada estrictamente conservativa (Peterson 1981).

Otra propiedad de interés es la reiniciabilidad, la cual, garantiza que para toda marcación $m \in A(R, m_0), m_0 \in A(R, m)$.

Finalmente, la RP es llamada consistente si existen una marcación $\overline{m}$ y una sucesión de disparos de transiciones σ, con $\delta(\overline{m}, \sigma) = \overline{m}$, tal que toda transición de T aparece por lo menos una vez en σ.

3 Metodología de Modelación en Manufactura

Un sistema de manufactura es un conjunto de actividades que interactúan con un conjunto de recursos para obtener un producto. Las actividades son los procesos de fabricación: maquinación, manejo de materiales y procesos de información; que son necesarios para la producción. Los recursos son el personal, las máquinas, los materiales, etc; que son necesarios para la ejecución de las actividades. Un sistema de manufactura incluye, por supuesto, un plan de proceso de producción (programa) que especifica las actividades y los recursos así como también las relaciones de precedencia entre actividades: algunas actividades podrían ocurrir antes que otras. Adicionalmente, el programa puede especificar varios recursos para diferentes actividades y dar prioridad a alguna de ellas para la utilización de estos recursos.

La metodología de modelación para sistemas de manufactura usando RP es fundamentada en las interpretaciones de lugares, transiciones y fichas tal como sigue (Murata 1989).

1) Identificar las actividades y recursos necesarios para la producción de un artículo (producto);
2) Ordenar las actividades por las relaciones de precedencia tal como lo establece el programa;
3) Para cada actividad, crear y etiquetar un lugar para representar su estatus; luego, etiquetar una transición (comienzo de actividad) creando finalmente un arco desde la transición hasta el lugar. Por último, crear una transición (completación de actividad) para incluir un arco desde el lugar a la transición. En general, la transición de Completación para una actividad será la transición de comienzo para la nueva actividad.
   Una ficha en un lugar de actividad especifica que la actividad está siendo ejecutada y la ausencia de fichas en el lugar indica que la actividad no está siendo ejecutada. Múltiples fichas indicarán que la actividad está ocurriendo de manera múltiple;
4) Para cada actividad, crear y etiquetar un lugar para cada recurso que sea necesario para el comienzo de la actividad; luego, conectar todos estos lugares con la transición de comienzo de la actividad mediante arcos dirigidos desde los lugares a la transición de comienzo. Finalmente, crear un arco desde la transición de completación de la actividad a cualquier lugar de recurso que se haga disponible luego de la completación de la actividad.
   Si un lugar representa un estatus de recurso, entonces una o más fichas en el lugar indican que el recurso está disponible y la ausencia de fichas indica la no disponibilidad del recurso.
5) Especificar la marcación inicial.

Fig. 1. Dos fragmentos de una RP para modelar un sistema de transferencia, indicando los comienzos y completaciones de las actividades l_3 y l_4.

Para aplicar la metodología de modelación dada anteriormente consideremos un sistema de transferencia. El sistema consiste de dos estaciones de trabajos E_1 y E_2 que producen F-partes y G-partes respectivamente, y de un transportador φ que es utilizado para transferir partes. Una vez que φ comienza a transferir una parte éste no puede ser interrumpido. Más aún, finalizado el traslado de una parte inmediatamente otra parte es hecha disponible y φ aleatoriamente transfiere una parte nuevamente.

1) Las actividades son transferencias de F-partes y G-partes por φ, y producciones de partes en las estaciones de trabajo E_1 y E_2. Los recursos son φ y las partes.
2) Aunque las actividades de producción de partes son operaciones establecidas en el sistema, éstas no serán incluidas en el modelo debido a las hipótesis consideradas. Así, las actividades son:
   $l_3 :=$ transferir una F-parte, y
   $l_4 =:$ transferir una G-parte.
   Estas actividades no incluyen relaciones de precedencia: cualquiera de ellas puede ocurrir antes que la otra.
3) Para una parte, cada actividad de transferencia es mostrada en la figura 1. La transición t_1 modela el comienzo de la actividad l_3, t_2 modela el comienzo de la actividad l_4 y, las transiciones t_3 y t_4 modelan las completaciones de las actividades l_3 y l_4 respectivamente. Cuando l_3 es marcado indicamos la ocurrencia de la actividad de transferencia de una F-parte; así mismo, la ocurrencia de la actividad de transferencia de una G-parte corresponde al marcaje de l_4.
4) Para la actividad l_3 requerimos tanto la disponibilidad de φ como de una F-parte. Así, sean

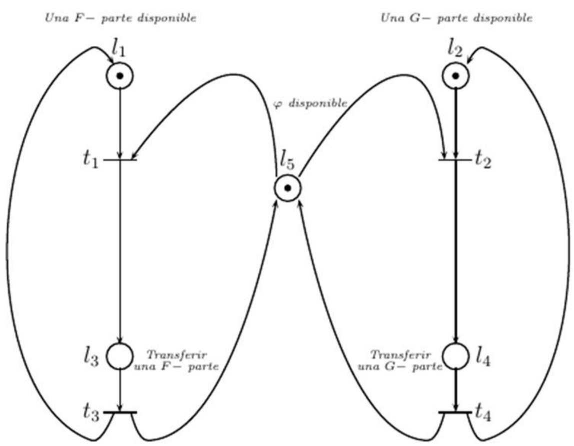

Fig. 2. Un modelo RP para una estación de transferencia.

$l_1 :=$ una F-parte en E_1 espera ser transferida,
$l_5 := \varphi$ está listo para transferir una parte.

Entonces, conectamos todos los lugares con arcos dirigidos hacia la transición de comienzo t_1; luego, ambos lugares, l_1 y l_5, se hacen disponibles al final de la completación de la actividad l_3. Por lo tanto, creamos dos arcos dirigidos desde t_3 hasta l_1 y l_5. Análogamente procedemos para la actividad l_4, con $l_2 :=$ una G-parte en E_2 espera ser transferida; y l_5. La figura 2 muestra esta situación.

Cuando el lugar l_1 es marcado con una ficha entonces una F-parte está disponible para ser transferida; mientras que la ausencia de fichas en l_1 indica la no disponibilidad de una F-parte. El número de fichas en l_1 indica la cantidad de F-partes disponibles. Análogamente interpretamos el marcaje o no del lugar l_2. El lugar l_5, cuando es marcado, representa la disponibilidad de φ para transferir una parte. Las marcaciones de los lugares l_1 y l_5 representan las condiciones para que la actividad de transferencia de una F-parte por φ pueda ocurrir; es decir, las marcaciones de l_1 y l_5 determinan las precondiciones para la actividad de transferencia de una F-parte. Análogamente interpretamos los marcajes simultáneos de l_2 y l_5 (ver figura 2).

5) La marcación inicial: $m_0 = (1, 1, 0, 0, 1)$; es establecida para el inicio del sistema. En efecto, m_0 determina la disponibilidad de una F-parte, de una G-parte y del transportador φ.

Para este sistema de transferencia, con la marcación inicial $m_0 = (1, 1, 0, 0, 1)$ tenemos que $t_1, t_2 \in \mathcal{E}(m_0)$. Si t_1 dispara en m_0 obtenemos la marcación $m_1 = (0, 1, 1, 0, 0)$. Si t_2 dispara en m_0 obtenemos la marcación $m_2 = (1, 0, 0, 1, 0)$. Ahora, $t_3 \in \mathcal{E}(m_1)$ y $t_4 \in \mathcal{E}(m_2)$, y ambas transiciones son las únicas que pueden disparar en las diferentes marcaciones. Una vez que una de ellas dispara la red regresa a su marcación inicial. Esta red es segura, conservativa, reiniciable y viva.

La reiniciabilidad implica consistencia: para esta red la consistencia es confirmada con la sucesión de disparos de transiciones $t_1t_3t_2t_4$.

La red no es estrictamente conservativa puesto que

$$\sum_{l \in L} m_0(l) = 3 \neq 2 = \sum_{l \in L} m_1(l)$$

Finalmente, la red no es persistente ya que el disparo de t_1 inhabilita a la transición $t_2 \ : \ t_2 \ \notin \ \mathcal{E}(m_1)$. En éste sistema la no persistencia nos informa como siempre sobre la existencia de injusticia: por ejemplo, φ, el cual es un recurso compartido, puede ser usado para transferir únicamente F-partes.

Un comentario adicional sobre la significación de las propiedades de acotamiento, seguridad, no bloqueo y reiniciabilidad en el contexto de manufactura es oportuno. En efecto, una de las ventajas de las RP es la habilidad para el análisis relativo al control en manufactura, puesto que siempre estamos interesados en hallar procedimientos de síntesis que preserven las propiedades mencionadas arriba.

El acotamiento implica ausencia de desbordamiento. La seguridad de un lugar de recurso implica la disponibilidad de un recurso simple, y es en general utilizado para garantizar la seguridad de algunos lugares de operación relacionados con éste; por ejemplo, en relación al sistema de transferencia, el lugar l_5 representa la disponibilidad de φ para transferir una parte y su marcaje inicial garantiza que los lugares l_3 y l_4 son seguros. Esto significa que φ nunca podrá transferir más de una parte al mismo tiempo.

El no bloqueo garantiza que el sistema no se estanca, lo cual implica que éste evoluciona exitosamente. Finalmente, la reiniciabilidad implica el comportamiento cíclico de un sistema.

4 Lugares en manufactura y condiciones

En relación a la metodología de modelación considerada en este artículo para sistemas de manufactura, hemos comentado que un lugar representa un estatus de recurso o de operación: si un lugar representa una operación, entonces una ficha en el lugar indica que la operación está siendo ejecutada, ninguna ficha en el lugar indica que la operación no está ocurriendo y múltiples fichas muestran que la operación está ocurriendo de manera múltiple. Sin embargo, cada lugar de operación debe ser seguro ya que la misma operación nunca puede ser ejecutada en la misma máquina más de una vez al mismo tiempo: una operación puede ser dividida en varias sub-operaciones; así, un lugar de operación puede ser reemplazado por una subred en un modelo RP (Zhou y col., 1990).

En lo que sigue usaremos $L_o$para denotar el conjunto de lugares de operaciones. Ahora, si un lugar representa un recurso entonces el número de fichas en este lugar puede ser constante: robots, máquinas, transportadores, etc; o variable: trabajos, instalaciones, etc. Por lo tanto, podemos dividir los lugares de recurso en dos clases disjuntas: L_f = conjunto de lugares de recursos cuyo número es fijo y L_v = conjunto de lugares de recursos cuyo número es variable. L_v juega un papel clave en el medio ambiente de recursos compartidos: el número inicial de fichas en cada lugar de L_v debe ser determinado de tal manera que el sistema modelado sea libre de estancamiento. Finalmente, hemos particionado el conjunto de lugares L como $L = L_o \cup L_f \cup L_v$.

Como un ejemplo, consideremos el sistema ilustrado en la figura 2. Aquí, admitimos que $L_o = \{l_3, l_4\}$, $L_f = \{l_5\}$ y $L_v = \{l_1, l_2\}$.

Establecidas las características que definen un sistema de manufactura junto con la metodología de modelación incluida en este artículo, para ésta clase de sistemas es claro que las funciones de entrada E y salida S tienen rango en el conjunto potencia de L : para cualesquiera $l \in L$ y $t \in T, |l, E(t)| \leq 1$ y $|l, S(t)| \leq 1$. Por lo tanto, en lo que sigue solamente haremos referencia a ésta clase de redes.

Sea $R = (L, T, E, S)$ una RP. Un nodo en R es un lugar $l \in L$ o una transición $t \in T$. En relación al grafo de R incluiremos las definiciones siguientes. Un camino elemental en R es una sucesión de nodos $x_1 x_2 \ldots x_k$, $k \geq 1$, tal que si $k > 1$ entonces $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$. Notación: $c(x_1, x_k)$ (Zhou y col., 1990).

Por su parte, un circuito elemental en R es una sucesión de nodos $x_1 x_2 \ldots x_k$, $k > 1$, tal que si $x_i = x_j$, $1 \leq i < j \leq k$, entonces $i = 1$ y $j = k$. Notación: $c(x_1)$.

Por otro lado, sea $L = L_o \cup L_f \cup L_v$ una partición dos a dos disjunta de L. Un O-camino entre los nodos x e y es un camino elemental $x x_1 x_2 \ldots x_k y$ tal que $x_i \in L_o \cup T$, $\forall i, 1 \leq i \leq k$; $x, y \notin L_o$. Note que, los arcos en los grafos asociados a RP contienen un nodo en T y el otro en L (grafos bipartitos). Así, un O-camino es una sucesión finita de arcos que expresa una sucesión finita de actividades u operaciones. En particular, si un O-camino comienza y finaliza con transiciones y los lugares constituyendo el O-camino no tienen fichas inicialmente, entonces esto podría representar en manufactura una secuencia para algún tipo de trabajo.

Por conveniencia trataremos a $c(x_1, x_n)$ como un conjunto; por lo tanto, $x \in c(x_1, x_n)$ significa que x es un nodo sobre el camino elemental entre x_1 y x_n. En este caso escribiremos $c(x_1, x_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. También, trataremos a $c(x_1, x_n)$ como el conjunto de todos los caminos elementales entre x_1 y x_n; análogamente, estas consideraciones son ajustadas a los circuitos $c(x_1)$. En consecuencia, si no hay caminos elementales entre x_1 y x_n escribiremos $c(x_1, x_n) = \emptyset$. Finalmente, si Y es un conjunto de nodos, entonces $c(x, Y) := \{w / \exists\, y \in Y, \exists\, c(x, y), w \in c(x, y)\}$ es el conjunto de todos los nodos sobre los caminos elementales entre x y Y.

Para la RP ilustrada en la figura 2, tenemos que

$$
\begin{aligned}
c(l_1, t_3) &= l_1 t_1 l_3 t_3 = \{l_1, t_1, l_3, t_3\}; \\
c(t_1, t_2) &= t_1 l_3 t_3 l_5 t_2 = \{t_1, l_3, t_3, l_5, t_2\}; \\
c(\{l_1, l_2\}, t_3) &= c(l_1, t_3) \cup c(l_2, t_3) \\
&= \{l_1, t_1, l_3, t_3, l_2, t_2, l_4, t_4, l_5\}; \\
c(t_1) &= \{t_1, l_3, t_3, l_1, l_5\} \\
c(l_5) &= \{l_5, t_1, l_3, t_3, t_2, l_4, t_4\}
\end{aligned}
$$

Más aún, $c(l_1, t_3)$ es un O-camino con $L_o = \{l_3, l_4\}$, $l_f = \{l_5\}$ y $L_v = \{l_1, l_2\}$.

Con la finalidad de formalizar el concepto de exclusión mutual, formulado en la próxima sección, incluiremos la definición siguiente que determina una condición para la clasificación de lugares en una estructura RP.

Condición CL : Una RP marcada $M = (R, m_0)$, $R = (L, T, E, S)$, con $L = L_o \cup L_f \cup L_v$ una partición dos a dos disjunta de L especificando los conjuntos de o-lugares, f-lugares y v-lugares, posee la condición **CL** si:

$$l' \in (L_f \cup L_v) \cap E(t_{j_i}), m_0(l') = 0,$$

$$m_0(l) = \begin{cases} 0, & \text{si } l \in L_o \\ \geq 1, & \text{si } l \in (L_f \cup L_v) \backslash \{l'\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_{j_i} \notin \mathcal{E}(m), \forall m \in A(R, m_0).$$

En este caso también diremos que $L_f \cup L_v$ satisface la condición **CL**.

Uno puede notar desde la condición **CL** que ningún recurso en un lugar de $L_f \cup L_v$ puede ser transformado en un recurso en otro lugar diferente de $L_f \cup L_v$.

Retomemos la figura 2. Con la Clasificación $L_o = \{l_3, l_4\}$, $L_f = \{l_5\}$ y $L_v = \{l_1, l_2\}$ tenemos que la red satisface la condición **CL**. En efecto, si $l' = l_5$ no hay nada que verificar (ninguna transición es permitida). Ahora, si $l' = l_1, t_{j_i} = t_1$, $m_0 = (0, k, 0, 0, k')$; $k, k' \geq 1$, entonces $t_1 \notin \mathcal{E}(m)$, $\forall m \in A(R, m_0)$. Análogamente es tratado el caso $l' = l_2$. Por lo tanto, la estructura RP posee la condición **CL**. Finalmente, note que si l_1 y l_5 son f-lugares en la red entonces l_3 no podría ser un f-lugar. En efecto, con $l' = l_3$ la condición **CL** falla. De hecho, l_3 es un o-lugar. Por otro lado, notemos que si hay fichas inicialmente en los lugares l_1, l_2 y l_5 entonces la red es acotada, no bloqueada y reiniciable.

Como comentamos anteriormente, en un contexto de manufactura los lugares de recurso son incluidos para representar estatus de disponibilidad de máquinas, robots, materia prima, instalaciones, etc. Más aún, si dos fichas representan situaciones diferentes entonces éstas no son surtidas en un mismo lugar (posiblemente representando alguna operación). De hecho, las fichas son incluidas para representar contenidos diferentes que van a un lugar idéntico mediante una transición común; es decir, mediante sincronización. Esta sincronización podría, por ejemplo, determinar el comienzo de una operación. Por lo tanto, las fichas de cualesquiera dos o más lugares de recursos fluyen en un lugar común solamente mediante la misma transición. Este comentario motiva la condición siguiente.

Condición S Una RP marcada $M = (R, m_0)$, $R = (L_o \cup L_f \cup L_v, T, E, S)$, posee la condición **S** si para cada par $l, l' \in L_f \cup L_v, l \neq l'$, $t \in T$ y O-caminos $c(l,t)$ y $c(l',t)$, si existen, se tiene que el primer encuentro (o intersección) entre los O-caminos ocurre en una transición.

Para ilustrar la condición **S** consideremos la RP dada en la figura 2, con la clasificación $L_o = \{l_3, l_4\}$, $L_f = \{l_5\}$ y $L_v = \{l_1, l_2\}$. Aquí, los O-caminos considerados son $c(l_1, t_3) = l_1 t_1 l_3 t_3$, $c(l_2, t_4) = l_2 t_2 l_4 t_4$, $c(l_5, t_3) = l_5 t_1 l_3 t_3$ y $c(l_5, t_4) = l_5 t_2 l_4 t_4$, que garantizan obviamente que la red posee la condición **S**.

Un comentario final corresponde al hecho de que la condición **S** no implica la condición **CL**; e inversamente, la condición **CL** no implica la condición **S**.

5 Exclusión Mutual en manufactura

En relación a la ejecución del modelo RP dado en la figura 2 correspondiente a un sistema de transferencia se puede observar que esencialmente hay dos procesos independientes: transferencia de F-partes y transferencia de G-partes, siempre que el lugar l_5 no sea considerado; y no hay limitación en relación al número de ocurrencias de ambos procesos. Por otro lado, si l_5 es considerado entonces los dos procesos dependen de l_5 y no pueden ser ejecutados simultáneamente, aunque ambos estén listos para ejecutar inicialmente alguna tarea. De hecho, cualquiera de ellos puede ser ejecutado luego de que el otro es completado. Finalmente, podemos representar los dos procesos por los pares de transiciones (t_1, t_3) y (t_2, t_4), y el recurso compartido por ambos procesos con $l_E = l_5$.

Esta sección está direccionada justamente hacia el problema de modelación para sistemas de manufactura con recursos compartidos por procesos independientes. Para esto, formularemos el concepto de **EM** en el contexto de RP.

En lo que sigue, el i-ésimo proceso, $i = 1, 2, \ldots, k$, será modelado por un par de transiciones (t_{a_i}, t_{b_i}) y el recurso compartido será modelado por un lugar l_E.

Definición 1 *Sea $M = (R, m_0)$, $R = (L, T, E, S)$, $L = L_o \cup L_f \cup L_v$, una RP marcada. Una k-exclusión mutual para M (k-**EM**) es un par (l_E, φ) tal que (Guernic y col., 2009, Riemann 1999, Zhou y col., 1991):*

1) $l_E \in L_f$, $m_0(l_E) = 1$ *y* $\varphi := \{(t_{a_1}, t_{b_1}), (t_{a_2}, t_{b_2}), \ldots, (t_{a_k}, t_{b_k})\}, k \geq 1$, *es un conjunto finito de pares de transiciones satisfaciendo las condiciones siguientes:*

(1.1) $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k \Rightarrow t_{a_i} \neq t_{b_j}$, $t_{a_i} \neq t_{a_j}$, $t_{b_i} \neq t_{b_j}$;

(1.2) $t_{a_i} \neq t_{b_i}$, $1 \leq i \leq k \Rightarrow |l_E, E(t_{a_i})| = |l_E, S(t_{b_i})| = 1$, $|l_E, S(t_{a_i})| = |l_E, E(t_{b_i})| = 0$; $t_u \notin T_a \cup T_b$, $T_a = \{t_{a_i}/1 \leq i \leq k\}$, $T_b = \{t_{b_i}/1 \leq i \leq k\} \Rightarrow |l_E, E(t_u)| = |l_E, S(t_u)| = 0$;

(1.3) $1 \leq i \leq k$, $l \in L_v, l \in c(t_{a_i}) \Rightarrow t_{b_i} \in c(t_{a_i})$;

(1.4) $1 \leq i \leq k$, $c(t_{a_i}) \cap (L_f \cup L_v) = \{l_E\} \Rightarrow t_{b_i} \in c(t_{a_i})$;

(1.5) $1 \leq i \leq k$, $t \in T$, $t \in c(t_{a_i}, t_{b_i}) \Rightarrow t \in c(t_{a_i}, t_{b_i}) =$ *O-camino.*

2) $L_f \cup L_v$ *satisface las condiciones **CL** y **S**;* $t \in T_b$, $t' \in T_a \Rightarrow \nexists\, c(t, t') =$ *O-camino.*

3) Existen una marcación m_1 y una sucesión de disparos de transiciones σ que no contiene transiciones en T_a tales que $t \in \mathcal{E}(\delta(m_1, \sigma))$, para todo $t \in T_a$.

4) Para toda marcación m_1, si t_{a_j} dispara en $m \in A(R, m_1)$ entonces para todo $t \in T$ tal que $c(t_{a_j}, t) \neq \emptyset$ y $t_{b_j} \notin c(t_{a_j}, t)$, t es permitida y para toda sucesión de disparos de transiciones σ_j que no contiene a t_{b_j} existe h_j tal que $t_{b_j} \in \mathcal{E}(\delta(m, t_{a_j} \sigma_j h_j))$; más aún, si $m(l_E) = 1$ y $t_u \in \mathcal{E}(m)$, entonces $t_u \notin T_b$.

En relación a la definición 1, las condiciones 1) y 2) definen la estructura de la exclusión mutual en una RP, y las condiciones 3) y 4) definen el comportamiento de una RP conteniendo dicha estructura. Más precisamente, (1.1) expresa que todas las transiciones incluidas en φ son diferentes excepto posiblemente t_{a_i} y t_{b_i}, (1.2) nos dice que cada par (t_{a_i}, t_{b_i}), $t_{a_i} \neq t_{b_i}$ está relacionado con L_E únicamente mediante un arco desde L_E a t_{a_i} y un arco desde t_{b_i} a L_E, y ninguna otra transición esta relacionada con L_E; (1.3) establece que cualquier camino elemental entre t_{a_i} y un v-lugar contiene a t_{b_i}, $1 \leq i \leq k$. Esto junto con (1.2) implica que después que t_{a_i} dispara, requiriendo para esto tanto del recurso compartido como de algunos v-lugares, los recursos utilizados para esto serán liberados únicamente disparando t_{b_i}; (1.4) expresa que todo circuito $c(t_{a_i})$ conteniendo únicamente a L_E como lugar de recurso contiene a t_{b_i}; (1.5) nos dice que toda transición en un camino elemental entre t_{a_i} y t_{b_i} está en un O-camino entre t_{a_i} y t_{b_i}. Esto asegura que los procesos concurrentes de operaciones en el sistema son sucesivos.

La condición 2) asegura que todos los recursos están bien modelados: todo lugar de recurso satisface la condición **CL**. La condición **CL** especifica que si un lugar de recurso no posee fichas inicialmente, entonces sus transiciones de salida no son permitidas en la evolución de la red. Esta condición también implica que cualesquiera sean los recursos cuyos estatus son modelados como lugares diferentes, no pueden ser convertidos en ningún otro lugar. Por su lado, la condición **S** asegura que las fichas para recursos diferentes tales como robots y máquinas no pueden ser surtidas juntas.

Finalmente, la condición 2) implica que no existe relación secuencial entre los k-procesos. La condición 3) inicialmente garantiza tanto la igualdad de oportunidad para la realización de cada proceso como la igualdad de oportunidad para la utilización del recurso compartido. La condición 4) garantiza el uso y liberación del recurso compartido por los procesos, y asegura que cualquier transición cuyo disparo depende del disparo de t_{a_i}, es permitida después que t_{a_i} dispara.

Para la RP marcada ilustrada en la figura 2 tenemos que el par

$$(l_5, \{(t_1, t_3), (t_2, t_4)\})$$

es una 2-**EM** con $L_o = \{l_3, l_4\}$, $L_f = \{l_5\}$ y $L_v = \{l_1, l_2\}$. La verificación es inmediata. Sin embargo, si la clasificación de los lugares es tal que $L_o = \{l_3, l_4\}$, $L_f = \{l_2, l_5\}$, $L_v = \{l_1\}$ y $m_0(l_2) = 0$, entonces el par $(l_5, \{(t_1, t_3), (t_2, t_4)\})$ no es una 2-**EM**. En efecto el par en cuestión no satisface la condición (3). Por otro lado, si eliminamos de la figura 2 los arcos (l_5, t_1) y (t_3, l_5) entonces el par $(l_5, \{(t_2, t_4)\})$ es una 1-**EM** (caso trivial).

6 Aplicación

Consideremos un sistema de ensamblaje constituido por dos estaciones de trabajos E_1 y E_2, y por dos robots R_1 y R_2 (ver figura 3).

Las especificaciones del sistema son dadas a continuación.

1) Cuando la estación de trabajo E_1 está lista para ejecutar la tarea de ensamblaje, ésta simultáneamente requiere la utilización de los robots R_1 y R_2, que son adquiridos por E_1 siempre que estén disponibles. Ahora, cuando E_2 está lista para ejecutar una tarea, ésta primeramente requiere la utilización de R_2, que es adquirido por E_2 siempre que esté disponible.
2) Después que la estación de trabajo E_2 adquiere R_2 esta requiere la utilización del robot R_1, y lo adquiere si esta disponible.
3) Cuando alguna estación de trabajo comienza una tarea de ensamblaje, ésta no puede ser interrumpida hasta su completación.

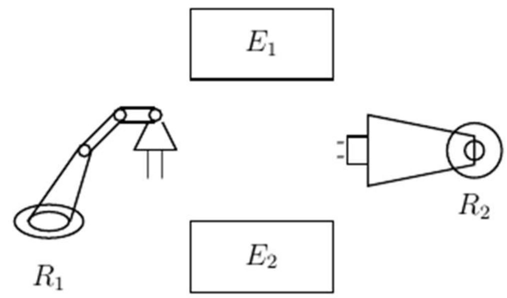

Fig. 3. Ilustración de un sistema de ensamblaje con dos robots y dos estaciones de trabajos.

4) Cuando alguna estación de trabajo completa una tarea de ensamblaje, ésta libera ambos robots.

Usando la metodología de modelación, para armar el diseño RP, tal como fue establecido tenemos que:

1) Las actividades son los procesos de adquisición de los robots R_1 y R_2, y ensamblajes por parte de las estaciones de trabajos E_1 y E_2.
2) El orden de las actividades es dado en la tabla siguiente:

E_1	E_2
Adquiriendo R_1	Adquiriendo R_2
Adquiriendo R_2	Adquiriendo R_1
Ensamblando	Ensamblando

3) En relación al orden de las actividades correspondientes a la estación de trabajo E_1, tal como fue establecido en 2, son creados respectivamente los lugares l_2, l_3 y l_4. La figura 4 muestra esta sucesión de actividades junto con sus transiciones de comienzos y completaciones: t_1 representa el comienzo de adquisición de R_1 por E_1, t_2 es el comienzo de adquisición de R_2 por E_1, t_3 representa el comienzo de ensamblaje en E_1 y t_4 modela la completación de ensamblaje en E_1. Análogamente se procede para la sucesión de actividades correspondiente a E_2.
4) Para la actividad l_2 es necesario $l_1 :=$ la solicitud de R_1 por E_1; así como también $l_9 :=$ la disponibilidad de R_1 y $l_{10} :=$ la disponibilidad de R_2. Luego, creamos un arco desde cada uno de estos lugares a la transición t_1. Ahora, una vez que R_1 y R_2 son adquirido, E_1 comienza la tarea de ensamblaje (esto es modelado por el arco desde l_3 a t_3 y el arco desde t_3 a l_4 tal como es mostrado en la figura 4). Después de la tarea de ensamblaje los dos

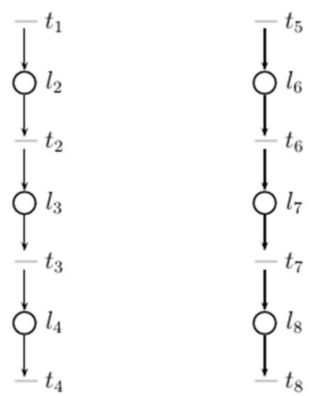

Fig. 4. Dos fragmentos de una RP modelando las sucesivas actividades de un sistema de ensamblaje.

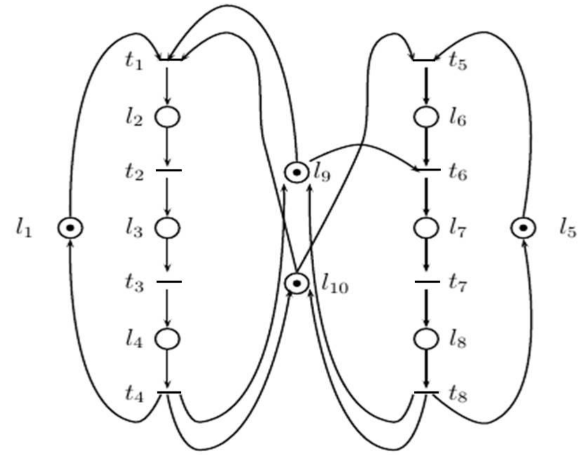

Fig. 5. Una RP marcada M representando un sistema de ensamblaje constituido por dos estaciones de trabajos y dos robots.

robots son liberados. Esto es representado por el par de arcos de salidas desde t_4 a l_9 y l_{10}. Finalmente, creamos un arco desde t_4 a l_1 para representar requerimientos repetidos. Por otro lado, en relación a la estación E_2, para la actividad l_6 es necesario $l_5 :=$ la solicitud de R_2 por E_2; así como también $l_{10} :=$ la disponibilidad de R_2. Luego, creamos un arco desde cada uno de estos lugares a la transición t_5. Después que R_2 es adquirido por E_2, la nueva operación es adquirir R_1 para lo cual es necesario $l_9 :=$ disponibilidad de R_1. Así, creamos un arco desde l_9 a t_6. Ahora, una vez que R_1 es adquirido, E_2 comienza la tarea de ensamblaje (esto es modelado por el arco desde l_7 a t_7 y el arco desde t_7 a l_8 tal como es mostrado en la figura 4). Después de la tarea de ensamblaje los dos robots son liberados. Esto es representado por el par de arcos de salidas desde t_8 a l_9 y l_{10}. Finalmente, creamos un arco desde t_8 a l_5 para representar requerimientos repetidos (ver figura 5).

Para la RP marcada M dada en la figura 5, sea la clasificación $L_o = \{l_2, l_3, l_4, l_6, l_7, l_8\}$, $L_f = \{l_1, l_5, l_9, l_{10}\}$ y $L_v = \emptyset$. $(l_{10}, \{(t_1, t_4), (t_5, t_8)\})$ es una 2-**EM** para M.

En efecto, las condiciones (1 y (2 de la definición 1 son claras. Por otro lado, la condición (3 es satisfecha tomando m_0: aquí t_1 y t_5 son permitidas. Finalmente, como $L_v = \emptyset$ entonces basta considerar únicamente a m_0. De hecho, si t_1 dispara entonces $t_2 t_3 t_4$ es la única sucesión disparable; asimismo, si t_5 dispara entonces $t_6 t_7 t_8$ es la única sucesión disparable. Luego, la condición (4 se satisface. Por lo tanto, $(l_{10}, \{(t_1, t_4), (t_5, t_8)\})$ es una 2-**EM** para M.

Conclusión

La representación por RP conteniendo una k-exclusión mutual en un contexto de manufactura expresa, en el proceso de construcción, la posibilidad para la evaluación de la preservación de propiedades cualitativas deseables en un SED.

Agradecimiento

Se hace especial agradecimiento al CDCHTA, ULA-Mérida por el financiamiento parcial de los proyectos de códigos: I-1442-15-02-ED y I-1441-15-02-ED, y al proyecto Eco-Nord: Automatización de Sistemas de Producción con supervisión autónoma y coordinación distribuida utilizando enfoque holónico N° 201000302.

Referencias

Castellano C, 2006, Consideraciones para el modelado de sistemas mediante Redes de Petri, Revista Ciencia e Ingeniería, UPM, Madrid, ISSN 1316-7081, Vol. 27, No. 2, pp. 49-58.

Eilemberg S, 1974, Automata, languages and machines, Academic Press, New York, Vol. A.

Guernic L, Girard A, 2009, Reachability analysis of linear systems using support funtions nonlinear analysis: Hybrid Systems, To appear I.

Murata T, 1989, Petri Nets: properties, analysis and applications, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 4.

Peterson J, 1981, Petri net theory and the modeling of systems, Prentice Hall, PTR Upper Saddle River, NJ, USA.

Riemann C, 1999, Modelling of concurrent systems: structural and semantical methods in the high level Petri Net calculus, PhD. thesis, Univ. Paris XI, Herbert Utz Verlag, ISBN. 3-89675-629-X.

Weiss G, Alur R, 2007, Automata based interfaces for control and scheduling, In. HSCC., Springer, Vol. 4416, pp 601-613.

Zhou M, Dicesare F, 1990, A Petri net design method for automated manufacturing systems with shared resources, Proc.

of IEEE int. Conf. on Roboties and Automation, Cincinnati, OH, pp. 526-531.
Zhou M, Dicesare F, 1991, Parallel and sequential mutual exclusions for Petri net modeling for manufacturing systems, IEEE trans. on Roboties and Automation, pp. 515-527.

***Recibido**: 25 de septiembre de 2014*

***Aceptado**: 01 de enero de 2015*

Mata, Guelvis: *Licenciado en Matemáticas, MsC en Matemáticas, Profesor Agregado activo, Facultad de Ciencias ULA.*

Méndez, Arnaldo: *Licenciado en Matemáticas, Profesor Asistente activo, Facultad de Ingeniería UNEFM, correo electrónico: mendez.arnaldo@ula.ve.*

Cardillo, Juan: *Ingeniero de Sistemas, Magister Sciencitae en Ingeniería de Control, Dr en Ciencias Aplicadas, Docteur Automatique, Profesor Titular activo, Facultad de Ingeniería ULA, Escuela de Sistemas,correo electrónico: ijuan@ula.ve.*

Chacón, Edgar: *Ingeniero de Sistemas, Docteur Ingenieur, en Automatic, Profesor Titular jubilado activo, Facultad de Ingeniería ULA, Escuela de Sistemas,correo electrónico: echacon@ula.ve.*