

Sobre el diseño de un observador proporcional-integral generalizado para sistemas LPV

On the design of Generalized Proportional-Integral Observer for LPV systems

Ríos Bolívar, Addison
Universidad de Los Andes
Facultad de Ingeniería
Mérida, 5101, Venezuela
ilich@ula.ve

Resumen

Considerando los sistemas lineales a parámetros variantes (LPV), en esta contribución se presenta un método para la síntesis de Observadores Proporcional+Integral (PIO) robustos. Vistos los sistemas LPV con incertidumbres politópicas, el método está basado en considerar una dinámica extendida del PIO, para luego transformar el diseño de las matrices de la dinámica de tal observador, como un diseño de la ganancia de realimentación estática de la salida (SOF) de un problema de control robusto. Bajo esas condiciones, se establecen, a partir de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ descritas como desigualdades matriciales lineales, LMIs, los criterios para obtener la ganancia de problema de SOF, considerando índices de desempeño en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ , bajo la presencia de incertidumbres y perturbaciones. Para ilustrar los resultados y el desempeño de la estimación de estados robusta, se presentan ejemplos numéricos.

Palabras clave: Sistemas LPV. Observadores Proporcional+Integral (PIO). LMI. Normas \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ .

Abstract

Considering the Linear Parameter Varying (LPV) systems, in this paper an approach for the synthesis of robust Proportional+Integral Observers (PIO) is presented. From LPV systems characterized with polytopical uncertainties, the method of design is based on considering a dynamics extended of the typical PIO, in order to transform the design of the matrices of the dynamics of the observer, as a design of the gain of Static Output Feedback (SOF) of a problem of robust control. Under these conditions and from the norms $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ described as Linear Matrix Inequalities (LMI), the criteria to obtain the gain in the SOF problem are established; taking into account performance indices in \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ , under the presence of uncertainties and disturbances. In order to illustrate the results and the performance of the state robust estimation of states, some numerical examples are evaluated.

Key words: LPV systems. Proportional+Integral observers (PIO). Linear matrix inequalities (LMI). \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ Norms.

1 Introducción

El contexto de los sistemas lineales a parámetros variables (LPV, por sus siglas en inglés), se refiere a los sistemas dinámicos lineales cuyas representaciones en espacio de estados dependen de parámetros no estacionarios exógenos (Shamma 2012). Los sistemas LPV son una generalización de los sistemas LTV, estableciendo un modelo intermedio entre dinámicas lineales y no lineales, por lo que pueden constituirse en un modelo representativo para el control de

procesos no lineales, permitiendo el uso de toda la maquinaria de control de sistemas lineales al caso de esos procesos no lineales particulares (Duan y col., 2013, Briat 2008).

Si para un sistema LTV se extiende la variabilidad temporal como la variación de un parámetro α , que depende del tiempo, entonces se describe el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t); & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C(\alpha(t))x(t)\end{aligned}\quad (1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ son los controles y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ las salidas medidas, y además $\alpha(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$. El modelo representa un sistema LPV. Es claro que si $\alpha(t) = t$, $l = 1$, el modelo LPV describe un sistema LTV.

Desde un punto de vista práctico, un sistema LPV tiene, al menos, dos interpretaciones interesantes (Bruzelius y col., 2004):

- 1) Puede ser visto como un sistema LTI con incertidumbre paramétrica, donde la incertidumbre está dada por el parámetro variante en el tiempo $\alpha(t)$.
- 2) Puede ser visto como un modelo LTV, o un modelo resultante de la linealización de un sistema no lineal (SNL) a lo largo de las trayectorias del parámetro α , aplicando linealización extendida, lo cual permite aplicar el análisis y síntesis de sistemas lineales muy bien conocidos.

Esta última aseveración es importante ya que el sistema LPV representa la descripción de un sistema intermedio que permite la síntesis de controladores para sistemas no lineales, de una manera sistemática tal como si fuera un sistema lineal. Además, si el modelo no lineal se formula como un sistema lineal parametrizado, donde la parametrización es dependiente de los estados, permite que una descripción LPV represente un sistema no lineal no localmente, tomando ventaja de las consecuencias de una estabilización global (Hangos y col., 2004, Briat 2008).

En ese contexto, la representación LPV de un sistema no lineal describe una clase de sistemas mayor que el sistema no lineal original. De modo que un sistema LPV es una inclusión diferencial lineal, donde las no linealidades del proceso original son capturadas por un vector de parámetros (vector de *scheduling*) (Hangos y col., 2004).

Es importante recalcar que, cuando α , en el sistema (1), es una señal exógena verdadera, el sistema es referido como LPV propiamente dicho, y cuando el vector de parámetros contiene los estados o la salida de (1), se dice que es un sistema cuasi-LPV. Con los sistemas cuasi-LPV se pueden describir sistemas no lineales con no linealidades que puedan ser medidas o estimadas.

Desde el punto de vista de análisis y síntesis, los sistemas de LPV son distinguidos de los LTV en perspectivas como la estabilidad. En efecto, para los sistemas LPV, las restricciones típicas en los parámetros exógenos son límites en magnitudes y en sus índices de variaciones, esto es, $\forall t \geq 0$

$$\underline{\rho} \leq \alpha(t) \leq \bar{\rho}, \quad \underline{\mu} \leq \dot{\alpha}(t) \leq \bar{\mu} \quad (2)$$

Esta caracterización define una familia de trayectorias de parámetro admisible. Por consiguiente, el análisis para sistemas LPV se refiere a determinar características (tales como estabilidad, rechazo a perturbaciones, seguimiento, etc.) que deben mantenerse para una familia de sistemas LTV (fijando una trayectoria del parámetro), en vez de un solo sistema LTV.

Definición 1 *Un sistema LPV es una dinámica en la cual las*

matrices contienen funciones que dependen de un vector de parámetros variantes conocidos. Los sistemas LPV pueden ser vistos como sistemas LTI sujetos a variaciones de incertidumbres paramétricas, o pueden ser modelos de sistemas LTV o modelos resultantes de la linealización de SNL a lo largo de las trayectorias de los parámetros.

Por otro lado y en un marco general, la observación causal es el problema de encontrar las estimaciones para los valores actuales de un conjunto de señales a partir de los valores presentes y pasados de otro conjunto de señales, donde ambos conjuntos de señales son inter-conectados por la acción de un sistema dinámico. Éste último se denominada *observador*, y el procedimiento se conoce como estimación o reconstrucción de estados. Así, en el observador de Luenberger se describe un método de como, a partir de las señales de entrada y de salida, para sistemas LTI de dimensión finita, se pueden estimar los estados, de modo que la idea principal es alimentar las señales observadas en un sistema auxiliar, el observador, y utilizar su salida como la estimación deseada (Ríos-Bolívar 2001).

Una característica importante es que la estimación sea asintóticamente exacta, es decir, converja al valor real de las señales observadas cuando el tiempo va al infinito (observabilidad asintótica). Para el caso de sistemas LPV, se sigue esta idea. La construcción de un sistema dinámica que permita la estimación asintótica de los estados, bajo la presencia de variaciones paramétricas.

En principio, el problema de diseño de observadores para sistemas LPV implica un análisis de la observabilidad de dichos sistemas. Así, en (Balas y col., 2003) se presenta la noción de sub-espacios invariantes para sistemas LPV, introduciendo el concepto de subespacios invariantes de parámetros variantes, que es muy importante para el diseño de observadores de estado, ya que caracteriza una condición geométrica de la observabilidad. Los resultados son aplicados al diseño de filtros de detección de fallas en sistemas LPV (Bokor y col., 2004).

En ese mismo orden de ideas, en (Trumpf 2007) se presentan unas caracterizaciones y unas condiciones necesarias y suficientes para la existencia de observadores de seguimientos y asintóticos para funciones lineales del estado de sistemas variantes en el tiempo finito dimensional. Los resultados son evaluados en sistemas afines a parámetros variantes y sistemas de control bilineales.

Para el diseño de observadores en sistemas LPV, en (Bara y col., 2001) se aborda un método de síntesis de observadores programados. Allí, el estado y las matrices de ganancia del observador son programadas usando un método de la interpolación que es lineal según cada parámetro, pero que es no lineal respecto el vector de parámetros variantes. La estabilidad del error estimación se evalúa mediante la existencia de una función de Lyapunov dependiente, de manera afín, respecto a parámetros. En (Hammouri y col., 2010)

se trata el diseño de un observador de entrada desconocidas (UIO) para sistemas afines en el estado. A partir de un método geométrico se establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de un observador UIO. La técnica también es evaluada en (Rodrigues y col., 2005, Aguilera-González y col., 2011).

En este trabajo se presenta un método de diseño de observadores para sistemas LPV a partir de los estimadores Proporcional+Integral (PI), considerando variaciones paramétricas en el proceso y en los sensores. Se analiza la estabilidad del sistema observador mediante estabilidad Lyapunov de sistemas LPV politópicos. El observador dinámico se construye mediante una formulación de control por realimentación estática de la salida (SOF).

Notación. \mathbb{R} es el conjunto de números reales. Para una matriz A , A^T denota su transpuesta. $\text{tr}(A)$ define la traza de la matriz A . En las particiones de matrices simétricas \star denota cada uno de sus bloques simétricos. \mathbb{I}_n define la matriz identidad de dimensión n .

2 Preliminares Básicos

Unos resultados importantes que se deben tomar en cuenta, ya que serán utilizados en el desarrollo de la técnica propuesta, corresponde a las caracterizaciones como desigualdades matriciales lineales (LMI)s extendidas de las norma \mathcal{H}_∞ y \mathcal{H}_2 de sistemas (Wei 2003, Pipeleersa y col., 2009). Sea el sistema LTI

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\omega \\ y &= Cx + D\omega \end{aligned} \quad (3)$$

Lema 1 (Desempeño \mathcal{H}_2 relajado) *Considérese el sistema (3) con $D = 0$. Para $P = P^T > 0$, las siguientes declaraciones son equivalentes*

- i) *A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B\|_2^2 < \mu$.*
- ii) *Existen P y Z , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0, \quad (4)$$

- iii) *Existen P , Z y G tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y*

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P & G^T B & G^T \\ A^T G + P & -P & 0 & 0 \\ B^T G & 0 & -\mu \mathbb{I} & 0 \\ G & 0 & 0 & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0,$$

- iv) *Existen P , Z y G , tales que: $\text{tr}(Z) < 1$ y*

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + G^T & G^T B \\ A^T G + P + G & -2P & 0 \\ B^T G & 0 & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0,$$

Demostración

La equivalencia entre las tres primeras declaraciones han sido mostrada en el Teorema 3.3 de (Apkarian y col., 2001), que se basa en el lema de proyección y su recíproco. La equivalencia entre ii) y iv) es mostrada en (Wei 2003). ■

Se sabe que cuando existen relaciones entre la matriz dinámica del sistema y la matriz de Lyapunov se obtienen resultados conservativos, tal como es el caso de sistemas con incertidumbres politópicas, (Oliveira y col., 1999). Esta situación se solventa, en cierto grado, desacoplando ambas matrices. Además, la declaración iv) en el Lema 1 provee una representación mejorada de la condición de desempeño en \mathcal{H}_2 presentada en (Apkarian y col., 2001).

De la misma forma que para el caso \mathcal{H}_2 , existen algunos resultados para mejorar el desempeño en \mathcal{H}_∞ , tal como se muestra a continuación.

Lema 2 (Desempeño \mathcal{H}_∞ Relajado) *Considérese el sistema (3). Con $P = P^T > 0$ y la matriz G , las siguientes declaraciones son equivalentes:*

- i) *A es estable y $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$.*
- ii) *Existe P , tal que*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 \mathbb{I} & D^T \\ C & D & -\mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

- iii) *Existen P y G tal que, para $\tau \gg 1$*

$$\begin{bmatrix} -(G + G^T) & G^T A + P + \tau G^T & 0 & G^T B \\ A^T G + P + \tau G & -2\tau P & C^T & 0 \\ 0 & C & -\mathbb{I} & D \\ B^T G & 0 & D^T & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

Demostración

Las condiciones i) y ii) representan el bien conocido *Lema Real Acotado*. La equivalencia entre ii) y iii) puede ser vista en (Wei 2003). ■

2.1 Sistemas LPV

Sea el sistema (1), tal que se puede caracterizar como un politopo a partir de que si se define

$$\mathcal{P} := \begin{pmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ C(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \in \Omega. \quad (9)$$

donde Ω es un conjunto politópico, el cual se define como:

$$\Omega := \left\{ \mathcal{P} : \mathcal{P} = \sum_{i=1}^l \alpha_i \mathcal{P}_i; \quad \alpha_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1 \right\}; \quad (10)$$

por lo que cualquier matriz admisible \mathcal{P} del sistema se puede escribir como una combinación convexa desconocida de l matrices vértices dadas, tal que

$$\mathcal{P}_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde $A_i, B_i, C_i, i = 1, \dots, l$, son matrices dadas, vértices del politopo. Así, ese sistema se puede caracterizar por el *hull* convexo de Ω considerando los vértices del politopo, es decir

$$C_o \Omega = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_l & B_l \\ C_l & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (12)$$

donde esos vértices matriciales son conocidos, siempre que $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, l, \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$.

Así, de la dependencia de las matrices del sistema con respecto al parámetro α , y de la pertenencia de dichas matrices al politopo Ω , entonces, con $x(t_0) = x_0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\sum_{i=1}^l A_i \alpha_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^l B_i \alpha_i \right) u(t); \\ y(t) &= \left(\sum_{i=1}^l C_i \alpha_i \right) x(t) \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, l, \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$.

2.2 Estabilidad de Sistemas LPV

La estabilidad será analizada siguiendo criterios de Lyapunov. Así, considérese la versión autónoma del sistema LPV dado por (1):

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (14)$$

asumiendo, sin pérdida de generalidad, que $\alpha = \alpha(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$. El parámetro no es conocido *a priori*, pero limitado por un conjunto cerrado y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^l$. En consecuencia, un sistema LPV puede ser interpretado como una Inclusión Diferencial Lineal (IDL), donde el conjunto de la función valuada de la IDL es parametrizado por $\alpha \in \Omega$.

En primer lugar, el sistema LPV (14) se puede ver como una generalización de sistemas LTI, puesto que una trayectoria posible del parámetro es una constante $\alpha(t) = \alpha_0$. En este caso el análisis de estabilidad corresponde al estudio de estabilidad para sistemas LTI. En segundo lugar, el sistema LPV (14) también puede ser visto como una generalización de los sistemas LTV. Para una trayectoria dada $\delta(t)$ del parámetro $\alpha(t)$. Por lo tanto, se puede esperar que los sistemas LPV tengan, bajo estas condiciones, características similares a los sistemas LTV.

En tercer lugar, una trayectoria posible del parámetro se puede dar por una dependencia del espacio de estado. Esto implica que los sistemas LPV pueden representar SNL, de modo que la trayectoria de un sistema LPV puede ser también, la trayectoria de un sistema no lineal, siempre que el parámetro α esté en el interior del politopo Ω .

Siguiendo el análisis de estabilidad Lyapunov, y dado que el sistema LPV (14) tiene un conjunto de soluciones para cada condición inicial $x(t_0) = x_0$, las definiciones de estabilidad necesitan ser redefinidas. En vez de hablar de la estabilidad de una sola solución para un $x(t_0) = x_0$ dado, todas las soluciones posibles (14) requieren tener la característica de la estabilidad asintótica. Esto corresponde a la *estabilidad asintótica fuerte* de la inclusión diferencial (Ríos-Bolívar 2014).

Definición 2 Estabilidad Cuadrática. *El sistema LPV (14) se dice cuadráticamente estable si existe P , una matriz simétrica definida positiva $P > 0$, y una función de Lyapunov cuadrática $V(x) = x^T P x$ tal que,*

$$A(\alpha)^T P + P A(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Omega. \quad (15)$$

En efecto, aplicando el método directo de Lyapunov, es necesario que $\dot{V}(x) < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T A(\alpha)^T P x + x^T P A(\alpha) x \\ &= x^T [A(\alpha)^T P + P A(\alpha)] x, \end{aligned}$$

para lo cual $\dot{V}(x) < 0$ siempre que $A(\alpha)^T P + P A(\alpha) < 0$ ya que es cuadrática en x y $P > 0$.

Se puede observar que la estabilidad cuadrática del sistema LPV (14) es más fuerte que la estabilidad asintótica en el sentido de que la estabilidad cuadrática implica la estabilidad asintótica del sistema LPV, pero no el inverso. Esto puede ser verificada fácilmente observando que una función de Lyapunov cuadrática es una clase especial entre la clase de funciones que obedecen las condiciones para una función de Lyapunov. El concepto de estabilidad cuadrática tiene la ventaja de que puede ser comprobado fácilmente usando métodos de programación semi-definida (métodos numéricos), para la solución de la LMI dada por (15), ver (Hangos y col., 2004).

Bajo los mismos criterios de Lyapunov, si se considera la estabilidad del sistema LPV politópico (13), en su concepción autónoma, dicho sistema será estable si existe $P > 0$ tal que $\forall i = 1, \dots, l$

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i = 1. \quad (16)$$

En este caso se tiene un conjunto de LMIs, definidas por el número de vértices del politopo, y esas LMIs se resuelven para una única matriz P generando conservatismo (He y col., 2005). Versiones generalizadas para reducir el conservatismo han sido propuestas, que se basan en el lema de proyección y representan una prueba directa y unificada de todos los resultados de LMIs extendidas (Pipeleers y col., 2009, Wei 2004).

Una definición de estabilidad menos conservativa se basa en la existencia de una función de Lyapunov dependiente

de parámetro, es decir $V = x^T P(\alpha)x$, $P : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que, $\forall \alpha \in \Omega$ y $P(\alpha) > 0$,

$$A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + \dot{P}(\alpha) < 0. \quad (17)$$

Puesto que la derivada parámetro aparece en (17), esto es $\dot{P}(\alpha)$, es necesario acotar dicha derivada del parámetro a un determinado conjunto compacto acotado $\tilde{\Omega}$, también. En (17) la función $P(\alpha)$ es una matriz desconocida, lo cual hace el problema difícil de solucionar (Bruzelius y col., 2004). Sea

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_l P_l. \quad (18)$$

En este punto, el interés es analizar la estabilidad cuadrática del sistema (14) con funciones de Lyapunov dependiente de parámetros $V = x^T P(\alpha)x$, donde $P(\alpha)$ está dado por (18).

Definición 3 Estabilidad cuadrática afín: *El sistema (14) es cuadráticamente estable afín si existen matrices constantes P_0, P_1, \dots, P_l tal que las siguientes desigualdades matriciales sean satisfechas para todos los valores y trayectorias admisibles del vector de parámetros $\alpha \in \Omega$*

$$P(\alpha) := P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_l P_l > I_n \quad (19)$$

$$A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + \dot{P}(\alpha) < 0 \quad (20)$$

Si $P_1 = P_2 = \dots = P_l = 0$, corresponde al caso de estabilidad cuadrática.

Si se considera que los parámetros variantes en el tiempo α tienen una tasa de variación limitada, esto corresponde a lo establecido por (2), se puede utilizar funciones de Lyapunov con dependencia paramétrica, generando condiciones de estabilidad menos conservativas (Trofino 2000). Esto último tiene el inconveniente de que surgen unos términos $\dot{\alpha}_i$ en la determinación de la derivada de la función de Lyapunov. Así, para el sistema (14) con variación paramétrica con tasa de cambio limitada a una región politópica, es decir, $\dot{\alpha}_i \in \tilde{\Omega}$, se tiene que

$$\dot{P}(\alpha) = \sum_{i=1}^l \dot{\alpha}_i P_i = P(\dot{\alpha}) - P_0 \quad (21)$$

Las condiciones de suficiencia para la estabilidad cuadrática afín son dadas en (Gahinet y col., 1996), donde surgen restricciones LMIs por requerimientos de multi-convexidad. A partir de los resultados allí reportados, varias condiciones han sido establecidas a objeto de reducir el conservatismo, además de las expresiones de estabilidad cuadrática robusta para sistemas politópicos, tal como ha sido dada en (16), (Bruzelius 2004, Briat 2008).

2.3 Controlabilidad y Observabilidad de Sistemas LPV

Nuevamente, si el sistema LPV (1) con $\alpha = \alpha_0$ constante, representa un sistema LTI y el estudio de la controlabilidad y la observabilidad se puede realizar en el marco de dichos sistemas LTI (Ríos-Bolívar 2014). Cuando $\alpha = \delta(t)$ fija una trayectoria, se tiene un sistema LTV y las condiciones

de controlabilidad y observabilidad se pueden analizar para estos sistemas (Ríos-Bolívar 2001).

El estudio de la controlabilidad y de la observabilidad de sistemas LPV ha sido presentado como extensión de los subespacios invariantes de los sistemas LTV (Balas y col., 2003, Bokor y col., 2005). Ello permite establecer las siguientes definiciones:

Definición 4 *Controlabilidad LPV.* *Sea el sistema (1). Se dice que el par $(A(\alpha), B(\alpha))$ es controlable si existe un compensador, posiblemente dinámico, por realimentación de estado, cuyas ecuaciones son funciones del parámetro variable,*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, x, \alpha) \\ u &= g(z, x, \alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

tal que el sistema en lazo cerrado resultante sea afín cuadráticamente estable.

De manera análoga se describe la observabilidad.

Definición 5 *Observabilidad LPV.* *Sea el sistema (1). Se dice que el par $(C(\alpha), A(\alpha))$ es observable si existe un sistema (estimador), posiblemente dinámico, cuyas ecuaciones son funciones del parámetro variable,*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, u, y, \alpha) \\ \hat{x} &= g(z, y, \alpha) \end{aligned} \quad (23)$$

tal que la dinámica del error de estimación sea afín cuadráticamente estable, en el sentido de que: para todo $x(t_0), z(t_0), \alpha(\cdot)$, la condición $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$ es asegurada.

Importante recalcar que, como es el interés de este trabajo, la condición de controlabilidad y de observabilidad será robusta si las ecuaciones dinámicas (22) y (23) no dependen del parámetro variable α . Además, se particulariza el caso de dependencia lineal de (22) y (23) con respecto a x, z, y , y u . En consecuencia, el interés de la última definición corresponde al describir un procedimiento para el diseño de observadores de estados.

3 Un PIO para sistemas LPV

A diferencia de los UIO, (Hammouri y col., 2010), de los observadores de ganancia programada e interpolación, (Bara y col., 2001), en esta sección se presenta un método de diseño de observadores por generalización de la técnica observadores PI (PIO).

En (Wu y col., 2008) se presenta una generalización de diseño de observadores PIO que consiste en una solución paramétrica explícita a ecuaciones matriciales de Sylvester para las ganancias del observador. En la siguiente propuesta, el diseño de las ganancias del observador PIO generalizado se obtiene por solución de un problema de control por SOF, considerando la estabilidad en lazo cerrado y siguiendo la

caracterización de la estabilidad afín cuadrática como un problema de factibilidad LMIs. Por consiguiente, sea el sistema LPV

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + Bu(t); & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) \end{aligned} \quad (24)$$

con las mismas consideración para el modelo (1), excepto que en este caso se tiene certeza del funcionamiento de los accionadores, ya que la matriz de control B se supone conocida y constante. Se admite que el par $(C(\alpha), A(\alpha))$ es observable, para todo α .

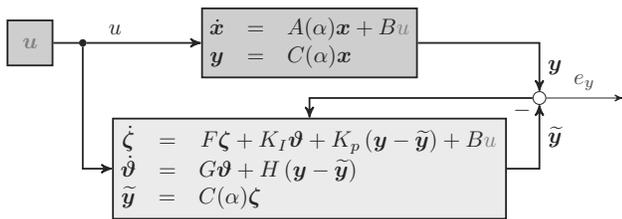


Fig. 1. Diagrama de bloques de un PIO.

Siguiendo la Definición 5 y a partir del modelo de un PIO, (Kaczorek 1978), considérese la siguiente versión generalizada, cuyo diagrama de bloques se muestra en la Figura 1:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + K_I\vartheta + K_P(y(t) - \tilde{y}(t)) + Bu(t), \\ \dot{\vartheta}(t) &= G\vartheta + H(y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) &= J\zeta(t) \end{aligned} \quad (25)$$

donde las matrices F, G, H, J, K_P (ganancia proporcional) y K_I (ganancia integral), de dimensiones apropiadas, se definen como las matrices del observador a ser determinadas, a condición de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (26)$$

siendo $e(t) = x(t) - \zeta(t)$ el error de la estimación. La variable ϑ está relacionada con la integral “pesada” del error de estimación de la salida. La matriz G representa un coeficiente de efecto de desvanecimiento que permite regular la respuesta transitoria del observador. La matriz H es un coeficiente de efecto integral que permite mejorar el margen de estabilidad.

Nótese que si $G = 0$ se tiene un PIO clásico. Al asumir que dicha matriz puede ser distinta de cero, se puede interpretar como un PIO generalizado, ya que se enriquece la dinámica del observador, lo cual permite ofrecer ciertos grados de libertad. Ello reafirma el comportamiento como PIO, importante, por ejemplo, en aplicaciones de diagnóstico de fallas basado en observadores. Además, si en estado estacionario $\vartheta(t) = 0$, implica que $y(t) - J\zeta(t) = 0$.

Definición 6 El sistema dinámico (25) se dice que es un PIO generalizado de orden completo para el sistema (24), si y solamente si, las matrices F, G, H, J, K_P y K_I son tales que la expresión (26) se satisface.

En consecuencia, se puede establecer el siguiente teorema:

Teorema 7 Sea el sistema (24) con el par $(C(\alpha), A(\alpha))$ observable. El sistema dinámico (25) es un PIO generalizado de orden completo para (24), si y solamente si, las matrices F, G, H, J, K_P y K_I son tales que

- 1) $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$.
- 2) La matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ es estable en el sentido de Lyapunov, la cual está dada por

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ HC(\alpha) & G \end{pmatrix} \quad (27)$$

Demostración

La condición de necesaria viene de la observabilidad del par $(C(\alpha), A(\alpha))$, ya que la estabilización de la dinámica del error de estimación de estados depende de esa condición. De la dinámica del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\zeta} = (A(\alpha) - K_P C(\alpha))x - \\ &\quad (F - K_P J)\zeta - K_I \vartheta \\ \dot{\vartheta} &= G\vartheta + H(C(\alpha)x - J\zeta) \end{aligned}$$

Por consiguiente, si $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ HC(\alpha) & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{A}(\alpha) \begin{pmatrix} e(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

El sistema dinámico (28) debe ser afín cuadráticamente estable para que se cumpla la condición (26), lo cual implica la estabilización cuadrática de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$. ■

Se puede verificar que la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ se expresa como

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix} \quad (29)$$

Así, sean las matrices

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{B}_o &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C}_o(\alpha) &= \begin{pmatrix} C(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (30)$$

y la matriz

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ H & G \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Las matrices en (30) definen el sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z(t) + \mathcal{B}_o v(t) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z(t)\end{aligned}\quad (32)$$

Es fácilmente verificable que el par $(\mathcal{A}_o(\alpha), \mathcal{B}_o)$ es controlable. Además, el sistema cumple las condiciones para el diseño de una ganancia para el problema de SOF (Ríos-Bolívar 2014). En efecto, en este caso particular, debido a la conformación de la matriz \mathcal{B}_o , la condición de SOF corresponde a que el par $(\mathcal{C}_o, \mathcal{A}_o(\alpha))$ sea observable, lo cual es equivalente a la observabilidad del par $(C(\alpha), A(\alpha))$. Por consiguiente, existe la matriz \mathbb{K} que corresponde a la ganancia de realimentación para el problema de control por SOF del sistema (32).

Comentario 8 Si bien se ha considerado que la matriz B es plenamente conocida, ello tiene una implicación meramente práctica, ya que si se asume que es incierta, esto es una matriz $B(\alpha)$, en la dinámica del error aparecerá un término de la forma $B(\alpha)u(t)$ que se puede considerar como una perturbación y luego abordar el diseño de acuerdo al planteamiento que se presenta en la Sección 4. En consecuencia, se tiene un método de diseño de PIO para sistemas LPV completamente incierto.

Lema 3 Sea el sistema (32). Dicho sistema admite un control por SOF de la forma $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$ tal que, en lazo cerrado, la dinámica es asintóticamente estable.

Demostración

La condición necesaria es que el par $(C(\alpha), A(\alpha))$, lo cual se asume. Luego, si $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$, entonces la matriz dinámica de lazo cerrado es

$$A_o(\alpha) + \mathcal{B}_o \mathbb{K} \mathcal{C}_o(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha)$$

■

En consecuencia, la estabilización de la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ del observador PIO generalizado corresponde al diseño de la ganancia \mathbb{K} para el problema de estabilización por SOF del sistema (32). Esto tiene la ventaja de que el diseño se obtiene por solución directa de un problema de control estabilizante para sistemas LPV, lo cual ha sido ampliamente estudiado en los sistemas LPV.

3.1 Diseño del PIO generalizado por SOF

El resultado principal de este trabajo se describe mediante el siguiente teorema:

Teorema 9 Sea el sistema (32), con el par $(\mathcal{C}_o, \mathcal{A}_o(\alpha))$ observable. Existe una ganancia \mathbb{K} para el control por SOF, a condición de que la matriz $\mathfrak{A}(\alpha)$ sea estable, si y solamente

si, existe una matriz $Q = Q^T > 0$ y la matriz Y de modo que la LMI siguiente se satisfice

$$Q\mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{A}_{o_i}^T Q + \mathcal{B}_o Y \mathcal{C}_{o_i} + \mathcal{C}_{o_i}^T Y^T \mathcal{B}_o^T < 0 \quad (33)$$

y la ganancia \mathbb{K} se obtiene por

$$\mathbb{K} = M^{-1}Y, \quad \text{donde } M = \mathcal{B}_o^{-1}Q\mathcal{B}_o \quad (34)$$

Demostración

La condición de observabilidad de $(\mathcal{C}_o, \mathcal{A}_o(\alpha))$ es equivalente a que el par $(C(\alpha), A(\alpha))$ sea observable, lo cual es asumido. De acuerdo a la estabilidad para matrices politópicas dada por (16), $\mathfrak{A}(\alpha)$ será estable si existe $Q = Q^T > 0$ tal que

$$Q\mathfrak{A}(\alpha) + \mathfrak{A}^T(\alpha)Q < 0$$

Por sustitución

$$\begin{aligned}Q\mathcal{A}_o(\alpha) + \mathcal{A}_o^T(\alpha)Q + Q\mathcal{B}_o\mathbb{K}\mathcal{C}_o(\alpha) + \mathcal{C}_o^T(\alpha)\mathbb{K}^T\mathcal{B}_o^T Q < 0 \\ Q\mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{A}_{o_i}^T Q + Q\mathcal{B}_o\mathbb{K}\mathcal{C}_{o_i} + \mathcal{C}_{o_i}^T\mathbb{K}^T\mathcal{B}_o^T Q < 0\end{aligned}$$

Para la linealización de las desigualdades matriciales, se consideran los cambios de variables $Q\mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M$ y $Y = M\mathbb{K}$. Por consiguiente

$$Q\mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{A}_{o_i}^T Q + \mathcal{B}_o Y \mathcal{C}_{o_i} + \mathcal{C}_{o_i}^T Y^T \mathcal{B}_o^T < 0$$

resultando una LMI definida por (33) y la expresión (34) que permite calcular \mathbb{K} . ■

Del cálculo de la ganancia \mathbb{K} se obtienen las matrices G , H , K_P y K_I de observador PIO generalizado. Dado que $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, para efectos de implantación práctica del observador PIO generalizado, como en la mayoría de los observadores para sistemas LPV, se debe considerar la matriz $F = A_0$ y $J = C_0$, donde A_0 y C_0 son las matrices centrales de los respectivos politopos, conservándose la robustez en el diseño del PIO.

4 Diseño del PIO generalizado con desempeño en $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$

Como en todo proceso técnico, se considera en el este momento, la presencia de perturbaciones. Así, sea el sistema LPV

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)\omega(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)\omega(t),\end{aligned}\quad (35)$$

donde $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ son perturbaciones desconocidas. Se asume que el par $(C(\alpha), A(\alpha))$ es observable. Además, se considera que las matrices inciertas $A(\alpha), B_1(\alpha), C(\alpha), D(\alpha)$ pertenecen a un conjunto politópico convexo, $\forall \alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$, definido como

$$\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^l \alpha_i \left(A^{(i)}, B_1^{(i)}, C^{(i)}, D^{(i)} \right) \right\}. \quad (36)$$

Para el PIO generalizado dado por (25), si $F = A(\alpha)$ y $J = C(\alpha)$, entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ HC(\alpha) & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(\alpha) - K_P D(\alpha) \\ HD(\alpha) \end{pmatrix} \omega(t) \quad (37)$$

Tomando en consideración las matrices definidas en (30), la matriz de ganancia dada por (31), y las siguientes matrices

$$B_{1_o}(\alpha) = \begin{pmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_o(\alpha) = \begin{pmatrix} D(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

se deriva el sistema dinámico siguiente

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{A}_o(\alpha)z(t) + \mathcal{B}_{1_o}(\alpha)\omega + \mathcal{B}_o v(t) \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z(t) + D_o(\alpha)\omega \end{aligned} \quad (39)$$

el cual admite un control por SOF de la forma $v(t) = \mathbb{K}\eta(t)$, debido a que el par $(\mathcal{C}_o, \mathcal{A}_o(\alpha))$ es observable, de manera que la dinámica de lazo cerrado (37), con la salida $\eta(t)$ satisfaga un índice de desempeño en $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$. La ganancia \mathbb{K} , que define el PIO generalizado, se obtiene por solución del problema de control óptimo robusto en $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$. En consecuencia, en lazo cerrado se tiene

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (\mathcal{A}_o(\alpha) + \mathcal{B}_o \mathbb{K} \mathcal{C}_o(\alpha))z(t) + (\mathcal{B}_{1_o}(\alpha) + \mathcal{B}_o \mathbb{K} D_o(\alpha))\omega \\ \eta(t) &= \mathcal{C}_o(\alpha)z(t) + D_o(\alpha)\omega \end{aligned} \quad (40)$$

4.1 Diseño en \mathcal{H}_2

Teorema 10 *Considérese el sistema (35), con $(C(\alpha), A(\alpha))$ observable. El sistema se define sobre el politopo (36), con $D(\alpha) = 0$. Un PIO generalizado de la forma (25), se determina mediante la ganancia \mathbb{K} por solución del problema de control por SOF para el sistema (39), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_2 para (40), es decir, $\|T_{\omega\eta}(s)\|_2^2 < \mu$, a partir del siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} \min_{Q, Y, Z, P} \quad & \text{tr}(Z), \quad \text{tal que} \\ & i = 1, \dots, l, \\ & \begin{bmatrix} -Q - Q^T & \Upsilon_{o_i} & Q^T \mathcal{B}_{1_{oi}} \\ \star & -2P & 0 \\ \star & \star & -\mu \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{C}_{o_i} & Z \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (41)$$

donde $\Upsilon_{o_i} = Q^T \mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{B}_o Y \mathcal{C}_{o_i} + P + Q^T$, $P = P^T > 0$, y las matrices Q (con $Q + Q^T > 0$), Y son de dimensiones apropiadas. Así, la ganancia \mathbb{K} se obtiene por

$$\mathbb{K} = M^{-1}Y, \quad \text{donde} \quad M = \mathcal{B}_o^{-1}Q^T \mathcal{B}_o \quad (42)$$

Demostración

Si se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $Y = \mathcal{B}_o M$, donde $Q^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M$, para la declaración iv) del

Lema 1, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (41). ■

Para este problema de optimización se puede usar una función de Lyapunov dependiente de parámetro $P(\alpha) = \sum_{i=1}^l \alpha_i P_i$. Este hecho es una alternativa al conservatismo que se tiene cuando se usa una matriz de Lyapunov fija, $P^T = P$. De esta manera, es posible obtener una función de Lyapunov para cada vértice del politopo, sin forzar una única matriz de Lyapunov para todo el sistema de estimación.

4.2 Diseño en \mathcal{H}_∞

Teorema 11 *Considérese el sistema (35), con $(C(\alpha), A(\alpha))$ observable. El sistema se define sobre el politopo (36). Un PIO generalizado de la forma (25) se determina mediante la ganancia \mathbb{K} , por solución del problema de control por SOF para el sistema (39), garantizando un desempeño sub-óptimo en \mathcal{H}_∞ para (40), es decir, $\|T_{\omega\eta}(s)\|_\infty < \gamma$, a partir del siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} \min_{Q, Y, P, \tau} \quad & \|T_{\omega\eta}(s)\|_\infty, \quad \text{tal que} \\ & i = 1, \dots, l. \\ & \begin{bmatrix} -(Q + Q^T) & \Gamma_{o_i} & 0 & Q^T \mathcal{B}_{1_{oi}} + \mathcal{B}_o Y \mathcal{D}_{o_i} \\ \star & -2\tau P & \mathcal{C}_{o_i}^T & 0 \\ \star & \star & -\mathbb{I} & \mathcal{D}_{o_i} \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (43)$$

donde $\Gamma_{o_i} = Q^T \mathcal{A}_{o_i} + \mathcal{B}_o Y \mathcal{C}_{o_i} + P + \tau Q^T$, $P = P^T > 0$, y las matrices Q (con $Q + Q^T > 0$), Y son de dimensiones apropiadas. Así, la ganancia \mathbb{K} se obtiene por

$$\mathbb{K} = M^{-1}Y, \quad \text{donde} \quad M = \mathcal{B}_o^{-1}Q^T \mathcal{B}_o \quad (44)$$

Demostración

De manera similar, si se asume que hay una solución factible para el problema de optimización formulado. Mediante el cambio de variable $Y = \mathcal{B}_o M$, donde $Q^T \mathcal{B}_o = \mathcal{B}_o M$, para el inciso iii) del Lema 2, se hacen las sustituciones respectivas y se llega a la LMI dado por (43). ■

Los resultados en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ se pueden combinar para establecer índices de desempeño mezclados. Es importante recalcar que, una vez obtenida la ganancia \mathbb{K} se procede a determinar las matrices del PIO generalizado.

Comentario 12 *En las técnicas clásicas de diseño de PIO con LMI, las expresiones de la forma $A^T P + P A$ involucran productos entre las matrices de Lyapunov y las matrices de diseño, lo que se traduce en conservatismo y en dificultades para la obtención de las matrices del observador. A fin de garantizar la convexidad del problema, es necesario hacer una consideración fundamental, reforzando todas las especificaciones a partir de una única función de Lyapunov. En el caso presentado, mediante la resolución de un problema de*

control por SOF, y si se emplean las versiones extendidas de las caracterizaciones de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ como LMIs, presentadas en la sección 2, no se generan productos que involucren matrices de Lyapunov, y la matriz de diseño \mathbb{K} no dependerá de ellas, evitándose la necesidad de usar la misma matriz de Lyapunov para todas las especificaciones, lo cual facilita el cálculo de las matrices del PIO y se puede mejorar la técnica de diseño al reducirse el conservatismo.

En el caso que se ha demostrado, en virtud de orientar los resultados al diseño de un PIO generalizado específicamente, se ha utilizado única matriz P , pero los resultados pueden ser fácilmente extendidos al emplear generalizaciones de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ como LMIs con diferentes matrices P_i , $i = 1, 2, \dots, l$. Además, para efectos de evaluación con otras técnicas de diseño, lo cual no es el caso, esta técnica generalizada toma relevancia.

Por otro lado, para imponer condiciones de desempeño transitorio en la dinámica del observador, representando un método de sintonización de los parámetros de diseño, se pueden incorporar LMIs que caractericen la ubicación de polos en regiones específicas, tal como han sido utilizadas en el diseño de controladores óptimos robustos.

5 Evaluación Numérica

En esta sección, a partir de ejemplos numéricos, se evalúa el método de diseño antes descrito.

5.1 PIO robusto

Considérese el modelo LPV siguiente, (Bara y col., 2001)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 + 0,4\rho_1 + 1,5\rho_2 & 0,4 + 1,5\rho_1 + 0,1\rho_2 \\ 3,7 + 1,1\rho_1 + 0,2\rho_2 & 1,4 + 0,9\rho_1 + ,44\rho_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0,5] x$$

Donde $\rho_1 \in [-0,2 \quad 0,2]$ y $\rho_2 \in [-0,1 \quad 0,1]$. Se requiere diseñar la ganancia \mathbb{K} para el PIO dado por (25), según el Teorema 9. Así, la ganancia obtenida es

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -4,4277 & 52,6882 \\ -2,2757 & -28,2888 \\ -9,6368 & -0,9000 \end{bmatrix},$$

$$K_P = \begin{bmatrix} 4,4277 \\ 2,2757 \end{bmatrix}, \quad K_I = \begin{bmatrix} -52,6882 \\ 28,2888 \end{bmatrix},$$

$$G = -0,9 \quad H = -9,6368$$

Para la verificación de la estabilización robusta del PIO, la Fig. 2 muestra la distribución de los polos en función de la variabilidad de los parámetros ρ_1 y ρ_2 . Tal como se puede observar, todos los polos son estables.

A los efectos de evaluar el comportamiento dinámico del PIO, se han realizados simulaciones, considerando que los parámetros varían en forma sinusoidal, tal como se muestra en la Fig. 3.

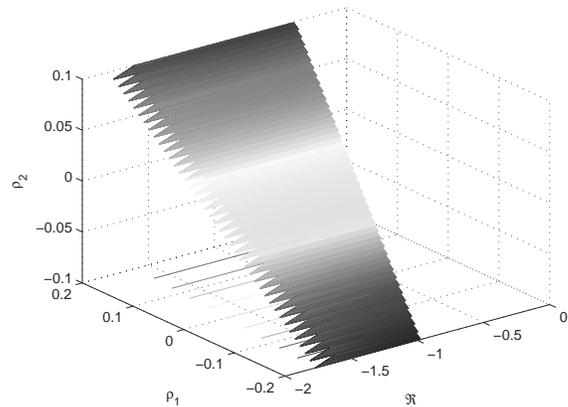


Fig. 2. Distribución de polos en lazo cerrado del PIO.

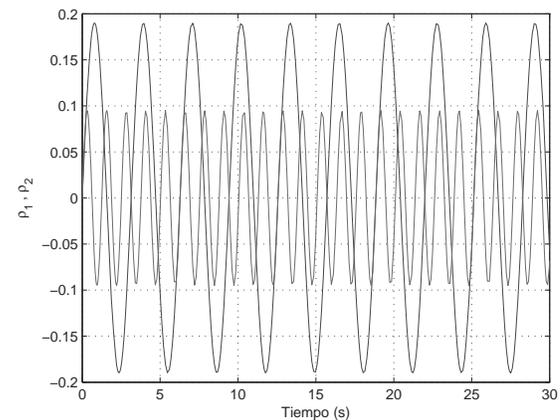


Fig. 3. Variación temporal de ρ_1 y ρ_2 .

En la Fig. 4 se presenta la comparación del desempeño temporal de los estados verdaderos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ con respecto a sus estimados $\zeta_1(t)$ y $\zeta_2(t)$. Se puede observar un seguimiento muy aceptable de los estimados.

La Fig. 5 y la Fig. 6 muestra el comportamiento temporal de la dinámica del error $e(t)$ y de la señal $\vartheta(t)$. Se puede observar que dichas señales convergen al cero, tal como se exige como condición de diseño del PIO.

5.2 Observador robusto en \mathcal{H}_∞

Considérese el modelo LPV siguiente, (Bara y col., 2001)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4,1 - 0,3\rho & 1 \\ -2\rho & 2 - 3,2\rho \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 - 0,6\rho \\ 2 + 0,9\rho \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] x$$

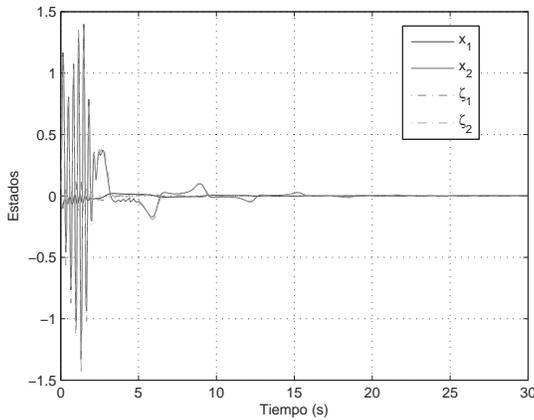


Fig. 4. Evolución temporal de los estados verdaderos y estimados.

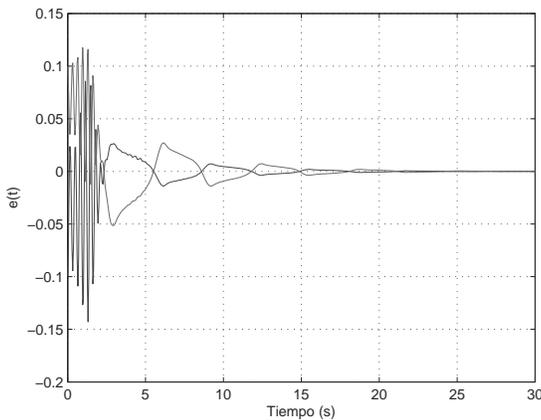


Fig. 5. Comportamiento temporal de $e(t)$.

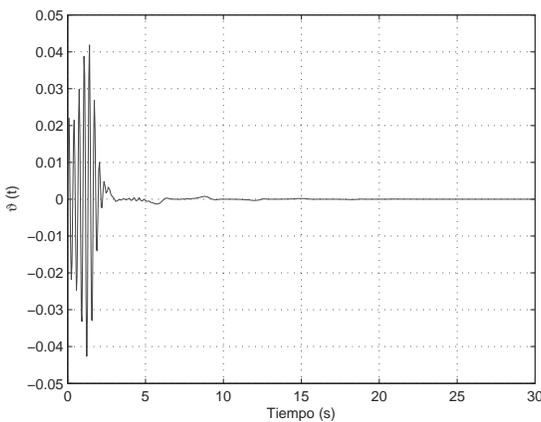


Fig. 6. Comportamiento temporal de $v(t)$.

Donde $\rho_1 \in [-2 \ 3]$. Se tiene incertidumbre en la matriz de control. Así, la dinámica del error será de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - K_P C(\alpha) & -K_I \\ HC(\alpha) & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \quad (45)$$

de modo que se asume, en esa dinámica, que $u(t)$ es una perturbación y se aplicará el Teorema 11 para calcular la ganancia \mathbb{K} .

Los resultados, para un $\gamma = 1,0216$, son

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 27,2568 & 0,1474 \\ -76,1510 & -0,4980 \\ 0,0024 & -0,4863 \end{bmatrix}$$

$$K_P = \begin{bmatrix} -27,2568 \\ 76,1510 \end{bmatrix}, \quad K_I = \begin{bmatrix} -0,1474 \\ 0,4980 \end{bmatrix},$$

$$G = -0,4863 \quad H = 0,0024$$

La Fig. 7 muestra la distribución de los polos en función de ρ . Tal como se puede observar, todos los polos son estables.

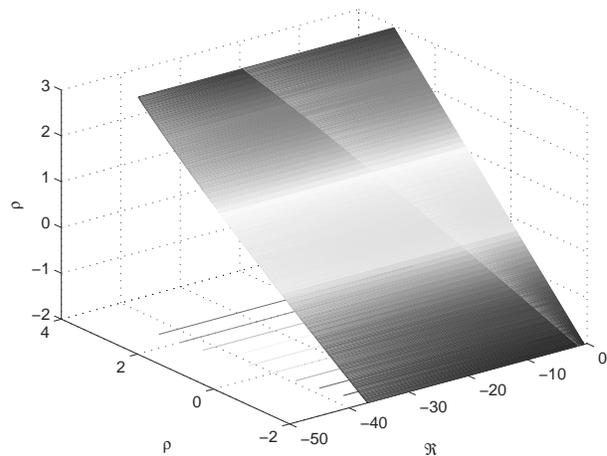


Fig. 7. Distribución de polos del PIO con desempeño en \mathcal{H}^∞ .

Considerando variaciones en el parámetro ρ , tal como se muestra en la Fig. 8, se realizaron las simulaciones correspondientes para evaluar la estimación.

En la Fig. 9 se muestra el comportamiento temporal de los estados verdaderos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ con respecto a sus estimados $\zeta_1(t)$ y $\zeta_2(t)$. Se puede observar un seguimiento muy aceptable de los estimados.

La Fig. 10 y la Fig. 11 muestran la evolución temporal del error $e(t)$ y de la señal $v(t)$. Se puede observar que dichas señales convergen al cero. La convergencia al cero de $v(t)$, después de $t = 6s$, implica una estimación aceptable de la salida $y(t)$.

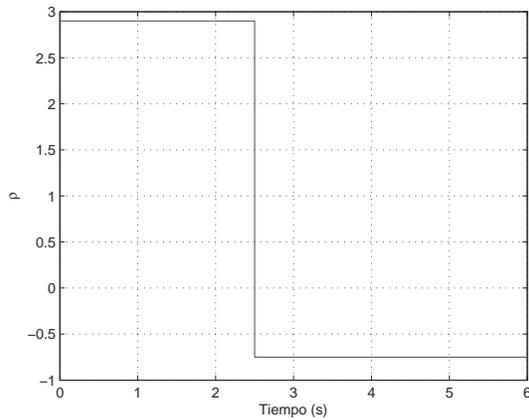
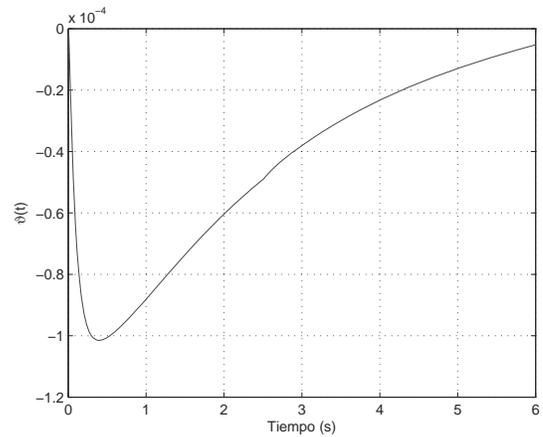
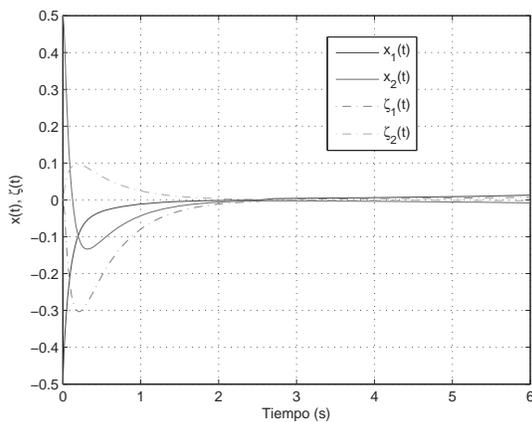
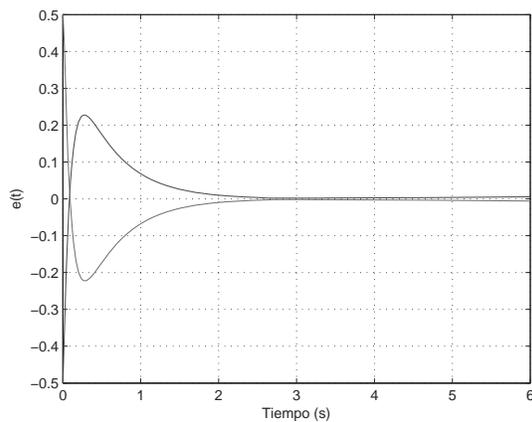
Fig. 8. Variación de ρ .Fig. 11. Comportamiento temporal de $\vartheta(t)$.

Fig. 9. Evolución temporal de los estados verdaderos y estimados.

Fig. 10. Comportamiento temporal de $e(t)$.

6 Comentarios Concluyentes

En este trabajo se ha presentado una técnica para el diseño de observadores Proporcional+Integral generalizado en sistemas lineales con incertidumbres politópicas. La generalización consiste en incorporar, en la dinámica del observador PI, una matriz de diseño que representa un coeficiente de efecto de desvanecimiento, la cual permite regular la respuesta transitoria del observador. A partir de allí, el método consiste en extender la dinámica del PIO a partir de la cual, la síntesis de las matrices de dicho observador se transforma en un problema de control por realimentación estática de la salida para sistemas LPV. Luego, considerando las caracterizaciones LMIs extendidas de las normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, la técnica de diseño se generaliza para sistemas LPV con perturbaciones, imponiendo índices de desempeño en $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para la síntesis de la ganancia en el problema de control por SOF, la cual deriva en la matrices del PIO. Así, La síntesis puede extenderse a especificaciones multiobjetivos. Se han presentado ejemplo numéricos que, mediante evaluación, han permitido mostrar la efectividad de la técnica.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto *No. I-1302-12-02-B*, por lo que gratamente se reconoce este soporte.

Referencias

Aguilera-González A, Flores-Montiel M, Adam-Medina M, Astorga-Zaragoza C, Quintero-Mármol E, García-Beltrán C, 2011, Unknown input estimation for linear parameter varying (LPV) singular systems: Application to a binary distillation column. In AMCA, editor, *Proc. Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático*, volume 1, pages 129–134, Saltillo, Coahuila.

- Apkarian P, Tuan H, Bernussou J, 2001, Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 46(12):1941–1946.
- Balas G. J, Bokor J, Szabó Z, 2003, Invariant subspaces for lpv systems and their applications. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48:2065–2069.
- Bara G, Daafouz J, Ragot J, Kratz F, 2001, State estimation for affine LPV systems. Technical report, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy, France.
- Bokor J, Balas G, 2004, Detection filter design for lpv systems—a geometric approach. *Automática*, 40:511–518.
- Bokor J, Balas G, 2005, Linear parameter varying systems: A geometric theory and applications. In *16th IFAC World Congress, Prague*, pages 1–11.
- Briat C, 2008, *Robust control and observation of LPV time-delay systems*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Bruzelius F, 2004, *Linear Parameter-Varying Systems: an approach to gain scheduling*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.
- Bruzelius F, Pettersson S, Breitholtz C, 2004, Linear parameter-varying descriptions of nonlinear systems. In *Proc. American Control Conf.*, pages 1374–1379, Boston, Massachusetts. ACC.
- Duan G, Yu H.-H, 2013, *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, Center for Control Theory and Guidance Technology, China.
- Gahinet P, Apkarian P, Chilali M, 1996, Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(3):436–442.
- Hammouri H, Tmar Z, 2010, Unknown input observer for state affine systems: A necessary and sufficient condition. *Automatica*, 46(2):271 – 278.
- Hangos K. M, Bokor J, Szederkényi G, 2004, *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*. Springer, London.
- He Y, Wu M, She J, 2005, Improved bounded-real-lemma representation and \mathcal{H}_∞ control of systems with polytopic uncertainties. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 52(7):380–383.
- Kaczorek T, 1978, *Pole-Zero Assignment Techniques and Some Their Applications*. Number 159 in III. IAC Istituto per le Applicazioni del Calcolo.
- Oliveira M, Bernussou J, Geromel J, 1999, A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37:261–265.
- Pipeleersa G, Demeulenaere B, Swevers J, Vandenberghe L, 2009, Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, 58(7):510–518.
- Ríos-Bolívar A, 2001, *Sur la Synthèse de Filtres de Détection de Défaillances*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Ríos-Bolívar A, 2014, *Control de Sistemas Lineales: Realimentando la salida*. Talleres Gráficos Universitarios, ULA, Mérida.
- Rodrigues M, Theilliol D, Sauter D, 2005, Design of a robust polytopic unknown input observer for FDI: Application for systems described by a multi-model representation. In *Proc. of 44th Conference on Decision and Control, and European Control Conference*, pages 6268–6273.
- Shamma J. S, 2012, *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, chapter An Overview of LPV Systems, pages 3–26. Springer.
- Trofino A, 2000, *Controle robusto*. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
- Trumpf J, 2007, Observers for linear time-varying systems. *Linear Algebra and its Applications*, 425:303–312.
- Wei C, 2003, On applications of the projection lemma to analysis and design of continuous-time systems. Master's thesis, National Sun Yat-Set University.
- Wei C, 2004, On applications of the projection lemma to analysis and design of continuous-time systems. Master's thesis, National Sun Yat-Set University.
- Wu A.-G, Duan G.-R, 2008, Generalized PI observer design for linear systems. *IMA J. of Math. Control & Information*, 25(2):239–250.

Recibido: 19 de febrero de 2015

Aceptado: 11 de octubre de 2015

Ríos Bolívar, Addison: *Profesor Titular en la Universidad de Los Andes. Ha publicado mas de 300 artículos científicos en revistas, libros y actas de conferencias. El es co-autor de los libros intitutados: “Sistemas multiAgentes y sus aplicaciones en automatización industrial”, “Implementando técnicas de control acotado: un enfoque basado en tolerancia a fallos” y “Control de sistemas lineales: realimentando la salida”.*