Economía, XXXVI, 31 (enero-junio, 2011), pp. 137-171
ISSN 1315-2467, Depósito legal pp: 198702me336

Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas*

History and differential calculus application's in the science of Economics: Didactic regards

Luis García, Mar Moreno***, Edelmira Badillo**** y Carmen Azcárate*******

Códigos JEL: A12; A22; B00; C60

Recibido: 28/05/2010, Revisado: 20/02/2011, Aceptado: 24/03/2011

Resumen

En el presente trabajo se muestra un breve recorrido histórico general de la derivada para luego hablar de manera específica de los inicios y desarrollo del cálculo diferencial dentro de las ciencias económicas, mejor conocido como *análisis marginal*. Por otra parte, se hace mención a las distintas notaciones e interpretaciones de la derivada que usualmente aparecen en los libros de texto y currículos oficiales por el valor histórico que éstas tienen, ya que las mismas están asociadas de manera directa a Leibinz y Newton. Finalmente, se muestra una introducción de la derivada mediante un ejemplo no matemático con el objeto de justificar una introducción de la derivada dentro del marco de la economía. Se finaliza con unas reflexiones y consideraciones que el docente debe tomar en cuenta si se apuesta por una enseñanza contextualizada de la derivada en el campo de las ciencias económicas, así como también los conflictos semióticos que esto implica.

Palabras clave: Cálculo, derivada, economía, contextualización.

* Esta investigación fue cofinanciada gracias al apoyo institucional del Consejo del Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes (CDCHTA) de la Universidad de Los Andes bajo el Código: NURR-H-343-06-04-C y Ministerio de Ciencia e Innovación del Estado Español bajo el Código: EDU2008-05254.

** Departamento de Economía. Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Núcleo Universitario Liria, Edificio H, Piso 3, Mérida, Venezuela. Correo electrónico: lgarcia@ula.ve.

*** Departament de Matemàtica, Universitat de Lleida, Escola Politècnica Superior, Campus Cappont, 25001, Lleida, España. Correo electrónico: mmoreno@matematica.udl.cat.

**** Departament de Didàctica de les Matemátiques y les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona, Facultat de Ciències de l'Educació, Bellaterra, Edifici G. 08193. España. Correo electrónico: edelmira.badillo@uab.cat.

***** Departament de Didàctica de les Matemátiques. y les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona, Facultat de Ciències de l'Educació, Bellaterra, Edifici G. 08193. España. Correo electrónico: carmen.azcarate@uab.cat.

Abstract

This paper presents a brief general history of the derivative and the beginnings and development of the differential calculus in economics, better known as *marginal analysis*. Moreover, we mention the various notations and interpretations of the derivative that usually appear in textbooks and official *curricula* for which they have historical value, since they are directly associated with Leibinz and Newton. Next, we show an overview of the derivative by a non-mathematical example in order to justify the introduction of the derivative within the economics framework. Finally, we close with some thoughts and considerations that teachers should take into account when teaching derivatives in the context of economics as well as the semiotic conflicts involved in the process.

Key words: Differential calculus, economy, contextualization.

1. Introducción

Como es bien sabido, las matemáticas forman parte de los *curricula* de estudios de casi todas las carreras universitarias a nivel mundial. Dentro de las matemáticas, el cálculo diferencial juega un papel fundamental. En este caso, se abordarán algunos aspectos del cálculo diferencial y su relación con las ciencias económicas desde la evolución de la derivada en un contexto general hasta su uso en la economía, y se finalizará con algunas aplicaciones de la derivada con un enfoque didáctico en carreras universitarias vinculadas a la economía. El hecho de hablar de la derivada conduce al campo del análisis matemático debido a que éste abarca temas que van desde los números reales y sus propiedades, y pasando por el estudio de las funciones (de una y varias variables), límites y continuidad, derivación, integración, sucesiones y series, teoría de la medida, hasta el álgebra lineal, análisis funcional y análisis complejo, entre otros (Artigue, 1991).

Con el objeto de aportar algunas ideas al proceso de enseñanza-aprendizaje, se ha tomado como foco de atención la formación de un profesional con un perfil más centrado en su carrera. Dado que hoy en día existen muchos libros de texto de matemáticas aplicadas a la economía (Arya y Lardner, 1987; Balbás *et al.*, 1989; Costa, 1989; Lial y Hungerford, 2000) que tocan el tema de la derivada y sus aplicaciones en esta área, se ha realizado un estudio de la derivada desde el punto de vista histórico, tanto en el campo matemático como en el económico.

El propósito es el llenar el vacío histórico en los programas oficiales y justificar una enseñanza contextualizada de la derivada.

Por tanto, esta reflexión se inicia con el concepto de derivada y su evolución histórica, se fija especial atención no sólo en las diferentes notaciones utilizadas hasta nuestros tiempos, sino en algunas interpretaciones de este concepto en un contexto general. Otro aspecto que llama la atención es lo que en la actualidad se denomina análisis marginal, en particular por las conexiones con el cálculo diferencial en el contexto económico. Si bien el objetivo del presente trabajo es ofrecer sugerencias de enseñanza de la derivada a partir de problemas propios de la economía, esta reflexión se inicia con dos ejemplos muy clásicos (oferta y demanda) que ilustran el tema objeto de discusión; conscientes de que los modelos económicos suelen trabajar con curvas más complejas. Desde el punto de vista de la enseñanza parece relevante establecer puentes entre el contexto matemático y el económico como un medio de dar significado a los conceptos matemáticos usados en otros ámbitos del conocimiento, lo que permite acercar las matemáticas a estudiantes poco entusiasmados, por lo general, con esta materia.

Dado que en este artículo se centra en la reflexión teórica sobre el papel que puede jugar la historia en la enseñanza de los conceptos económicos, este aspecto metodológico ha quedado en un segundo plano. Sin embargo, es necesario decir que desde el punto de vista metodológico se ha tenido cuidado en la selección de las fuentes de información. Muchas de las interpretaciones son el resultado del trabajo realizado en su momento con profesores, pero en esta ocasión con base en los hechos que la historia proporciona.

2. El concepto de derivada y su evolución histórica

En los programas de cálculo para carreras de economía y afines está contemplado enseñar el concepto de la derivada de una función, f, solamente desde el punto de vista de la *interpretación geométrica* y de la *razón de cambio*, aunque el profesor tenga la libertad de modificar e innovar en el contenido de los mismos. Estas dos interpretaciones son las más clásicas como se puedan leer en los libros de texto y sus causas bien las expresan de Guzmán y Rubio (1992).

> La noción de derivada surge al pretender determinar la inclinación de la tangente a una curva en un punto de ella, y al dar sentido matemático al concepto de velocidad instantánea. Las aproximaciones a la resolución de estos dos problemas tienen una formulación matemática común [...]. (Guzmán y Rubio, 1992, p. 179).

De hecho, son los problemas de la física y de las matemáticas los que dieron origen al concepto de derivada, motivo por el que tienen tanto valor en los libros de cálculo. Peralta (1995) sostiene que la derivada se tiene que mostrar en conexión con los conceptos de velocidad y recta tangente, ya que éstos fundamentan su origen. Asimismo, como argumenta Grabiner (1983), un buen conocimiento de los aspectos históricos y epistemológicos de los conceptos matemáticos, no sólo aporta conocimiento disciplinar, sino también didáctico y epistemológico, pues contribuye al desarrollo profesional del profesor y puede ayudarle a mejorar su práctica docente.

De esta forma, sin pretender detallar el extenso desarrollo histórico que ha tenido el cálculo diferencial, se pretende destacar el interés didáctico de la enseñanza del concepto a través de los problemas que condujeron al desarrollo y evolución del mismo. Se considera importante percibir la idea de la aparición del concepto, de su causa, y del aporte dentro de las matemáticas y fuera de éstas (Peralta, 1995). Es por ello, que es preferible ahorrarse los antecedentes y comenzar a hablar desde Newton y Leibinz (finales del siglo XVII y comienzos del XVIII) como los primeros en dar el gran paso al cálculo infinitesimal (Babini, 1969; Durán, 2000; Kleiner, 2001), no sin antes destacar lo que Bourbaki (1976, p. 15) dice respecto al cálculo "se ha forjado casi exactamente en el intervalo de un siglo, y casi tres siglos de desgaste permanente no han conseguido agotar por completo este instrumento incomparable"; aunque ya para este momento los tres siglos se han sobrepasado y se continúa trabajando sobre este concepto, ésta es una de las razones por la que se considera que este trabajo tiene su importancia.

Aunque se parte de Newton y Leibinz, vale la pena mencionar que ya Fermat había dado algunos pasos hacia el cálculo diferencial. En los años inmediatos a 1630 desarrolló un método algebraico para encontrar máximos y mínimos, el cual comprobó en problemas sencillos de los que se tenía la solución (Grabiner, 1983). Por otra parte, cuando Kleiner (2001) se refiere al aporte que Newton y Leibinz hicieron al cálculo, resume en cuatro puntos el trabajo proporcionado por ellos.

> Específicamente, ellos [Newton y Leibinz]
>
> *a*. Inventaron los conceptos generales de derivada ('fluxión', 'diferencial') e integral. Una cosa es calcular áreas de figuras curvilíneas y volúmenes de sólidos usando métodos apropiados, pero otra muy distinta es reconocer que tales problemas pueden incluirse bajo un sólo concepto, a saber, la integral. Lo mismo se aplica a la distinción entre hallar tangentes, máximos y mínimos, y velocidades instantáneas por una parte, y el concepto de deriva por otro.
>
> *b*. Reconocieron la diferenciación y la integración como operaciones inversas una de la otra. Aunque varios matemáticos antes de Newton y Leibinz –Fermat, Roberval, Torricelli, Gregory, y especialmente Barrow– observaron en problemas la relación entre la tangente y el área en casos muy específicos, el reconocimiento claro y explícito, en sus extensas generalidades, de lo que llamamos ahora el Teorema Fundamental del Cálculo, pertenece a Newton y Leibinz.
>
> *c*. Crearon una notación y desarrollaron algoritmos para hacer del cálculo, un instrumento computacional poderoso.
>
> *d*. Extendieron el rango de aplicabilidad de los métodos del cálculo. Mientras en el pasado las técnicas del cálculo fueron aplicadas fundamentalmente a polinomios, con frecuencia de grados pequeños, las hicieron aplicable a "todas" las funciones, algebraicas y trascendentales (Kleiner, 2001, p. 142, traducción realizada por los autores).

No debe olvidarse que, además del desarrollo matemático propiamente, que supone el mismo cálculo diferencial, hubo un desarrollo paralelo relacionado con la notación, el lenguaje y la terminología. Lo que para Newton era "fluxión", para Leibinz era "diferencial". En este sentido, Newton escribió su *Método de Fluxiones* en 1671, aunque su publicación tuvo que esperar hasta 1736. En él consideró una curva como un objeto generado por el movimiento continuo de un punto, y la abscisa y la ordenada del punto que genera la curva son, en general, *cantidades* *cambiantes*. Newton las llamó un *fluente*, y su razón de cambio es llamada la *fluxión de un fluente*. La notación implantada por Newton para identificar la fluxión del fluente consistía en escribir un punto sobre el símbolo que representaba el fluente; es decir, si un fluente es representado por y, la fluxión de este fluente es representada por $\dot{y}$. La fluxión de $\dot{y}$ es representada por $\ddot{y}$ y así sucesivamente (Eves, 1976).

Tanto Eves (1976) como Wussing y Arnold (1989) destacan que Newton también introdujo otro concepto, el cual llamó *momento de un fluente* y lo representó con ***o***; esto es, la cantidad infinitamente pequeña mediante la cual un fluente x se incrementa en un intervalo infinitamente pequeño de tiempo o. De aquí se sigue que o es el *momento del tiempo*, *xo el momento del fluente* y $\dot{x}o$ *el momento de la fluxión*, que aproximadamente se corresponde con la diferencial con la que se trabaja en la actualidad (Wussing y Arnold, 1989) y que se ilustra con el siguiente ejemplo:

> Se considera la diferenciación de $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, donde hay que pensar en x e y como variables dependientes; la variable independiente es el tiempo.
>
> En Newton se lee:
>
> Dada ahora una ecuación cualquiera $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, se sustituye x por $x+o$ e y por $y+o$; re sulta entonces
>
> $$\begin{aligned} & x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}oox + \dot{x}^3o^3 \\ & - ax^2 - 2a\dot{x}ox - ax^2oo \\ & + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo \\ & - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 \quad = \quad 0 \end{aligned}$$
>
> Por hipótesis ahora es:
>
> $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, que por consiguiente se anula. Se dividen por ***o*** los términos que subsisten.
>
> Quedan
>
> $$\begin{aligned} & 3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}ox + \dot{x}^3o^2 \\ & - 2a\dot{x}x - ax^2o \\ & + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o \\ & - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^2 \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

> Pero como se había supuesto que *o* es infinitamente pequeño y que representa los momentos de las cantidades, los términos que están multiplicados por *o* no serán nada en comparación con los restantes. Por eso los desprecio y queda $3\dot{x}x^3 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$ (Wussing y Arnold, 1989, pp. 244-245).

Por su parte Leibinz, desde sus años de estudiante, consideraba la idea de una escritura abstracta de carácter universal.

> Esta es la idea motriz. Su aplicación [...] permitió a Leibinz crear en octubre de 1675 su propia Matemática Infinitesimal, una genial fusión de profundo conocimiento y acertada elección de las notaciones según el estilo de la simbología algebraica. Bajo la denominación de *Calculus* entró en la Historia de las Matemáticas (Wussing y Arnold, 1989, pp. 262-263).

Este mismo año, 1675, Leibinz introdujo el símbolo ∫ el cual procede de la letra *S*, letra inicial de la palabra latina *summa*. También escribió las diferenciales y derivadas tal como se conocen hoy en día, aunque su primer artículo publicado sobre cálculo diferencial no apareció sino hasta 1684

> cuyo largo título *Nova Methodus* [...] significa: Un nuevo método para máximos y mínimos y para tangentes que no cae en defecto para valores fraccionarios e irracionales y que a este respecto constituye un tipo de cálculo sin precedentes. En este trabajo se encuentra por primera vez el símbolo d [...]
>
> Más aun, se mencionan las condiciones dv=0 para los valores extremos y ddv=0 para los puntos de inflexión de una función v. En realidad la palabra función no fue utilizada por Leibinz hasta 1692. (Wussing y Arnold, 1989, p. 266).

Si reflexiona sobre el cálculo actual, también se puede añadir que muchas de las reglas elementales de diferenciación que los estudiantes aprenden en cursos introductorios de cálculo se deben a Leibinz (Eves, 1976). La regla para encontrar la *n-ésima* derivada del producto de dos funciones todavía es referida como la regla de Leibinz. Además, tuvo gran perspicacia y sensibilidad al crear un simbolismo adecuado para el cálculo, tanto es así que su notación y simbología tuvo mayor penetración y aceptación, además de ser indudablemente más útil y manejable que la de Newton.

Al amplio y extenso trabajo desarrollado por estos dos genios, les sucedieron, en este mismo campo, matemáticos como Jacob y Johann Bernoulli quienes contribuyeron a su desarrollo ya que ellos mantenían con Leibinz un intercambio de ideas sobre el tema; destacamos de Jacob el análisis de la cuadratura y la rectificación de las espirales parabólica y logarítmica (Wussing y Arnold, 1989). De Johann Bernoulli destacamos que, en su correspondencia con Leibinz, se preocupó por la notación en este tema. Johann Bernoulli publicó el primer tratado de cálculo diferencial e integral entre 1691 y 1692 en el que respondió la pregunta *¿qué es exactamente un cociente diferencial*? a la que respondió que es una *razón de infinitesimales* (Grabiner, 1983).

Por su parte, el insigne Leonard Euler, a mediados del siglo XVIII, introdujo la noción de función y fue el primero en tratar el cálculo con funciones algebraicas. De esta manera dejó clara la diferencia entre variables independiente y dependiente, pues hasta ese momento sólo se trataba con curvas (ecuaciones), algo que hoy resultaría inaceptable desde el punto de vista didáctico, ya que al hablar de cálculo diferencial está implícito el concepto de función. Euler también trató la derivada de series de potencias y, haciendo uso de las series de Taylor, analizó la naturaleza de los máximos y mínimos (Grabiner, 1983); en esta línea obtuvo un descubrimiento altamente notable:

> la famosa fórmula $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ [...]
> Las raíces de *sen(x)* son 0, $\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\ldots$. Éstas son también las raíces del 'polinomio infinito' $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$, el cual es un desarrollo en serie de potencias de *sen(x)*. Dividiendo por x, queda eliminada la raíz x=0, y esto implica que las raíces de $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots$ son $\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\ldots$ (Kleiner, 2001, p. 151).

Otro matemático que aportó grandes ideas al cálculo fue Lagrange, quien probó de una manera puramente algebraica, que cualquier función *f(x)* puede desarrollarse en *series de potencias*, aunque ya Taylor había llegado al mismo resultado usando diferencias finitas y procesos de límite. Pero, tal vez, la contribución más importante de Lagrange, que se puede hacer notar en este contexto, es la referente a la notación funcional de derivada en contraposición con las notaciones de fluxión y diferencial. A partir de este momento, se prefirió ver al cálculo como una actividad matemática en la cual están involucradas las funciones y sus derivadas, dejando de verse como el cálculo de fluxiones y de diferenciales. Además, se podría decir que fue el primero en llegar al resultado de que la derivada de una función es también una función (Kleiner, 2001), en usar el término *función derivada*, que fue el origen de la expresión *derivada* usada actualmente, y en ser el primero en introducir la notación *f'(x)* para la primera derivada, *f''(x)* para la segunda derivada y así sucesivamente (Grabiner, 1983).

> Al igual que Euler,
>
> Lagrange estableció y pensó que había probado, que cualquier función tiene su desarrollo en *series de potencias*:
>
> $$f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + \cdots \, , \qquad (1)$$
>
> excepto, posiblemente, para un número finito de valores aislados de *x*. Entonces definió una nueva función, el coeficiente del término lineal en *h* el cual es *p(x)* en el desarrollo mostrado en (1) y la llamó *primera función derivada* de *f(x)*. (Grabiner, 1983, p. 203, traducción realizada por los autores).

Finalmente se hace referencia a los aportes que realizaron matemáticos como Cauchy o el propio Weierstrass y se destaca el rigor que ellos les dieron a las matemáticas, aunque vale la pena aclarar que fueron muchos los matemáticos que aportaron de una u otra manera al desarrollo del cálculo.

> El Cálculo Infinitesimal [...] había sido hasta comienzo del siglo XIX definido de una manera poco rigurosa, basado únicamente en nociones intuitivamente aprehendidas, a partir de las cuales se originaban algunas ambigüedades e inconvenientes, e incluso contradicciones. Numerosos matemáticos percibían estas dificultades y algunos de ellos se esforzaron por superarlas [...]
>
> A diferencia de sus predecesores, Cauchy intentó presentar una interpretación coherente de los fundamentos del Cálculo Infinitesimal (Wussing y Arnold, 1989, p. 418).

Además de los aportes que Cauchy dio al cálculo, se resalta que a éste le gustaba enseñar y tenía mucha más inclinación por esta actividad que Gauss, quien por su parte sentía un gran desprecio por ésta. Por su parte, Cauchy siguió una tradición de *l'École Polytechnique* en la que todo matemático, aun el más brillante, no estaba exento de escribir libros de texto de todos los niveles. A través de tres publicaciones, Cauchy dio la forma que en la actualidad presenta el cálculo diferencial (Boyer, 1986), además de valerse de su posición dentro de *l'École Polytechnique* para la difusión de su obra (Wussing y Arnold, 1989).

Según mantienen Grabiner (1983) y Boyer (1986), Cauchy precisó algunas fallas en la definición de derivada de Lagrange, basada en el desarrollo de una función en serie de potencias, por lo que la rechazó y dio una definición basada en el concepto de límite con un enfoque aritmético (para la época de Cauchy, el cálculo aún se sostenía en fundamentos geométricos e intuitivos), el cual le dio rigor al concepto de derivada. No obstante, Cauchy tomó de Lagrange el nombre de derivada y la notación $f'(x)$, y resaltó la naturaleza funcional de la derivada. Después de Cauchy el cálculo tomó otro rumbo y fue visto de una manera distinta, puesto que fue Cuchy quien introdujo la definición $\varepsilon - \delta$ de límite, hecho que resultó significativamente cualitativo para las matemáticas.

A todo esto hay que añadir que Cauchy no pudo solventar algunos problemas producidos por su trabajo. Aunque él, con la introducción del límite, dio rigor al concepto de derivada, éste tuvo algunas fallas de las cuales no se percató inmediatamente; así por ejemplo, "Dado ε, elegía un δ que, él creía que le servía para cualquier x." No obstante y al mismo tiempo que otros matemáticos entre los que se encontraba Weierstrass, esas fallas le permitieron dar un gran paso, al distinguir entre convergencia y convergencia uniforme (Grabiner, 1983).

Finalmente, se concluye esta sección con los aportes de Weierstrass al cálculo ya que tal como se conoce hoy en día éste se debe al fundamento y rigor que terminó por darle Weierstrass. Frente a la definición de derivada que dio Cauchy, en términos $\varepsilon - \delta$, Weierstrass dio un tratamiento mucho más riguroso y sistemático al cálculo. Aunque se mantuvo alejado de publicar sus resultados en este sentido, fueron sus alumnos quienes tuvieron el detalle de hacerlo. Es por ello que la definición, $\varepsilon - \delta$, de derivada que se maneja en la actualidad no se puede citar de sus trabajos, pero es bien conocido que se debe a él (Grabiner, 1983).

En resumen, se muestra el desarrollo histórico del concepto de la derivada y su importancia en la enseñanza.

> Newton y Leibinz lo descubrieron; Taylor, Euler, Maclaurin lo desarrollaron; Lagrange le dio nombre y lo caracterizó; y solamente al final de este largo período de desarrollo Cauchy y Weierstrass lo definieron (Grabiner, 1983, p. 205, traducción realizada por los autores).

Este trabajo está de acuerdo con la autora antes citada cuando agrega que, para quien enseña matemáticas, es importante conocer el desarrollo histórico, ya que ayuda al profesor en su enseñanza. De alguna manera se pone de manifiesto que para llegar hasta una herramienta tan poderosa como es la derivada, hizo falta creatividad, así como seguir una estructura lógica y una deducción acertada. Es necesario destacar además que, desafortunadamente, una vez conocida la exposición clásica, se suele dejar a un lado la importancia del desarrollo y evolución histórica del concepto.

Generalmente, en los cursos de cálculo infinitesimal para estudiantes de ingeniería o de ciencias se explota y se habla sobre algo de historia porque las interpretaciones o caracterizaciones de la derivada que sugieren los programas oficiales contemplan la enseñanza de la derivada como razón de cambio de Newton (velocidad instantánea) y la interpretación geométrica de Leibinz (pendiente de la recta tangente a la curva); pero en los cursos de cálculo infinitesimal para estudiantes de ciencias económicas o empresariales se pueden aprovechar los enfoques de Leibinz y Newton para relacionarlos con el estudio analítico de funciones, de tal forma que al modelar situaciones económicas, sea la derivada la herramienta clave para tal fin. Con el enfoque de Leibinz, la pendiente m de la recta tangente a la curva en un punto es una información económica valiosa y precisa, $m<0$ para el caso de la demanda y $m>0$ para la oferta, entre otros, y con el enfoque de Newton se llega al análisis económico marginal.

No obstante, para introducir el desarrollo histórico del análisis marginal (aplicación de la derivada en la economía), se consideran las interpretaciones y notaciones que suelen usarse en esta área de las matemáticas.

3. Interpretaciones y notaciones

Generalmente, las dos interpretaciones que se utilizan para introducir el concepto de derivada son las de interpretación geométrica o pendiente de una recta tangente a una curva en un punto (Leibinz) y la de razón de cambio asociada a la velocidad instantánea de un móvil (Newton); pero a medida que se avanza en el curso de cálculo se llega a otras interpretaciones que se le pueden dar a la derivada, según sea el caso o la necesidad que desde el punto de vista didáctico o profesional se desee explotar. En esta sección se hace referencia a estas dos interpretaciones y, en la siguiente, se reserva a interpretaciones económicas de la derivada.

Por una parte, la interpretación geométrica se refiere a la pendiente de la recta tangente a la curva (función), *f*, en un punto del dominio de *f*; que simbólicamente se denota por *f'*. Según Haeussler y Paul (1997), la derivada de *f* en $x_0 \in Dom_f$ se define como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \text{ donde } x_0 \in Dom_f$$

Se dice que *f* es derivable en x_0 siempre que el límite sea finito. De manera equivalente, se puede definir la derivada en términos de la variable *x*:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \text{donde } x_0 \in Dom_f$$

A las definiciones anteriores, se puede agregar que $f'(x_0)$ mide la inclinación de la recta tangente a la curva *f* en el punto $(x_0, f'(x_0))$ y la ecuación de esta recta es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Más aún, se dice que una función *f* es derivable en un conjunto $\boldsymbol{A} \subset Dom_f$, si *f* es derivable en cada uno de los puntos de $\boldsymbol{A}$ y se dice que *f* es derivable si lo es en cada uno de los puntos de Dom_f (Dubinsky *et al.*, 1995).

Por otra parte, la derivada, vista como razón de cambio, suele estar asociada a la velocidad instantánea de una partícula. Es decir, si se interpreta *f* como el desplazamiento de una partícula *f(x)* en función del tiempo *x*, entonces la razón de cambio de *f* en x_0 mide velocidades medias en el intervalo $[x, x_0]$, y su límite es la velocidad instantánea en el instante x_0.

En este sentido, Arya y Lardner (1987) llegan a la razón de cambio de la siguiente manera:

> La *tasa de cambio* promedio de una función *f* sobre un intervalo de x a $x + \Delta_x$ se define por la razón $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$. Por tanto, la tasa de cambio promedio de *y* con respecto a *x* es:

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x} \quad \text{(Arya y Lardner, 1987, p. 437).}$$

Ahora bien, de la expresión anterior se sigue la definición de función derivada de una función *f*, y se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \text{, siempre que el límite exista.}$$

Finalmente, se debe señalar que además de la notación *f'(x)*, para la derivada de *f* respecto a *x*, que se ha venido utilizando en este apartado, existen otras como:

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}y,\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f,\ \text{(Arya y Lardner, 1987, p. 454)}$$

Además de las interpretaciones de la derivada expuestas arriba, existen muchas otras en diversos campos de las ciencias; tal es el caso de la biología y cuya utilidad se puede ver reflejada en el estudio del crecimiento de la población de un determinado ecosistema o como se ilustra en Cardús (1972, p. 45), para estudiar tanto "la velocidad máxima del flujo de aire en el sistema respiratorio al toser, como la respuesta del organismo en función de la dosis de una droga". Por otra parte, en la física, además de la velocidad instantánea se pueden conseguir interpretaciones como:

> *Amplificación de una proyección entre rectas*. La *amplificación* en *x* de una lente que proyecta el punto *x* de un recta sobre el punto *f(x)* de otra recta es la derivada de *f* en *x*.
>
> *Densidad de un material*. La *densidad* en *x* de un material distribuido a lo largo de una recta de forma tal que los *x* centímetros de la izquierda tengan una masa de *f(x)* gramos es igual a la derivada de *f* en *x* (Stein, 1982, p. 129).

Pero volviendo al tema de discusión, son diversas las interpretaciones o caracterizaciones de la derivada en las ciencias económicas y en cada una de sus áreas. Una de las razones de por qué la derivada es una herramienta clave y con múltiples aplicaciones e interpretaciones se puede apreciar en Lial y Hungerford (2000):

> Una de las principales aplicaciones del cálculo es determinar cómo una variable cambia en relación con otra. Un hombre de negocios quiere saber cómo cambian las ganancias con respecto a la publicidad (Lial y Hungerford, 2000, p. 402).

En este sentido, se pueden mencionar algunas interpretaciones de la derivada en las ciencias económicas como por ejemplo *costo marginal*, *ingreso marginal*, *utilidad marginal*, *productividad marginal* y *tasa de impuesto marginal*, entre otras (Arya y Lardner 1987), y de esta manera enfatizar, desde el punto de vista didáctico, la importancia histórica que tiene el concepto de la derivada tanto en las matemáticas en sí mismas como en las ciencias económicas. Se resalta el uso de la historia para la enseñanza de las matemáticas (en general) que hace Katz (2001), en el que destaca que la historia es útil en cuatro aspectos: *por lo anecdótica*, *por su amplio perfil*, *por el contenido* y *por el desarrollo de ideas matemáticas*, a los que se agregaría *el desarrollo de ideas económicas*.

4. Análisis marginal

El análisis marginal es el nombre técnico con el que se conoce al cálculo diferencial dentro de las ciencias económicas. El desarrollo histórico de la economía matemática se puede dividir en tres periodos: *marginalista* (1838-1947), el de los *modelos lineales* y la *teoría de conjuntos* (1948-1960) y el de *integración* (1961 hasta nuestros días) (Arrow e Intriligator, 1981). Por el tema que nos concierne en este trabajo, nos centraremos en el primer periodo. Los años a los que se hace alusión no son más que una referencia sobre el proceso de origen y consolidación ya que todavía sigue en desarrollo la implantación del cálculo diferencial e integral en la economía.

En el mundo de los negocios y en las ciencias económicas se llama *análisis marginal* a la utilización de la derivada o la diferencial para estimar el cambio que experimenta una función que modele una situación relacionada con la economía (ingreso, costo, utilidad, producción, etc.) al incrementar en una unidad la variable independiente (Lial y Hungerford, 2000; Salas *et al.*, 1999). Profundizando un poco más en conceptos económicos en los que la derivada está presente, se aprecia lo importante que resulta para un profesional de las ciencias económicas tanto la derivada como las múltiples aplicaciones de ésta. Además de las funciones marginales de ingreso, costo, utilidad o producción, están otras como la elasticidad de la demanda, la propensión al ahorro o al consumo en las que la derivada sirve de pieza fundamental para su análisis.

El término *marginal* obedece a que los economistas neoclásicos del *periodo marginalista* (1838-1947) (Arrow e Intriligator, 1981), entre los que se destacan Cournot, Jevons, Marshall, Menger, Pareto y Walras, entre otros, vieron dificultades e insuficiencia en los modelos puramente cualitativos a la hora de resolver algunos problemas de la teoría económica que comenzaban a plantearse para el momento. Ellos le dieron a la economía un enfoque esencialmente matemático basado en la *ley de utilidad marginal decreciente* ya que la formación de algunos de ellos no era únicamente económica sino que se formaron y trabajaron en un ambiente multidisciplinario donde las matemáticas y la física estaban presentes. En este sentido, focalizaron sus aportaciones en el concepto de *marginalidad* o *última unidad*; es decir, realizaron estudios de cómo una variable modifica sus valores en el *margen* o entorno, ante aumentos infinitesimales de otra variable.

Los mismos Arrow e Intriligator (1981) se refieren a este periodo como el primero de la economía matemática en el que las ciencias económicas tomaron prestadas metodologías de las ciencias físicas vinculadas a las matemáticas para desarrollar una teoría formal basada, en buena parte, en el cálculo. Ahora bien, estas herramientas no se podían usar de manera arbitraria puesto que a los economistas les interesaba estudiar la unidad adicional de una situación económica como el coste, el beneficio, el ingreso, entre otros, con lo cual el cálculo infinitesimal no era la mejor herramienta puesto que fallaba la continuidad de la función a estudiar. Ello les condujo a considerar la función objeto de estudio como una función continua.

Chiang y Wainwright (2006) sostienen que la economía matemática no es otra rama específica de la economía como los son las finanzas públicas o el comercio internacional. Por el contrario, la definen como un "método utilizado en el análisis económico, en el cual el economista emplea símbolos matemáticos para enunciar los problemas y se basa en teoremas matemáticos para auxiliarse en el razonamiento" (Chiang y Wainwright, 2006, p. 2).

> Originalmente, los economistas definieron el coste marginal a un nivel de producción x como $C(x+1)-C(x)$, que es el coste de producir una unidad adicional de un producto. Como
>
> $$C(x+1)-C(x)=\frac{C(x+1)-C(x)}{1}\approx \lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h}=C'(x)\ ,$$
>
> se deduce que el coste marginal $C'(x)$ al nivel de producción x es aproximadamente el coste de producir la unidad ($x+1$). (Salas *et al.*, 1999, p. 151).

La herramienta matemática básica fue el cálculo; en particular, el uso de las derivadas totales y parciales y los multiplicadores de Lagrange para caracterizar máximos. Vale la pena destacar que, en este periodo, se desarrollaron los fundamentos matemáticos que sirvieron para que progresaran las teorías modernas del consumidor, del productor, de los mercados y del equilibrio general. En esta etapa de desarrollo de la economía matemática destacaron economistas como Walras, Jevons, Marshall, Pareto, Ramsey, Hicks y Samuelson, entre otros.

A fin de observar la solidez e importancia que tienen las matemáticas en la economía, es necesario referirse en una pregunta que aparece en Archibald y Lipsey (1967): *¿Qué es una aproximación matemática a la economía y por qué ésta debe ser estudiada?* En la respuesta que los autores dan, hablan de siete puntos o aspectos en los que están presentes las matemáticas en la economía; sin embargo, con el fin de mantener la atención sobre el tema, la derivada, se extrae lo siguiente:

> (*v*) 'Maximización de la utilidad': esta suposición y toda la parafernalia asociada de costo marginal, ingreso marginal, etc., es obviamente

una aplicación de la noción matemática de maximización, independientemente de la manera cómo se haga, en palabras, en diagramas o algebraicamente.

(*vi*) 'Conceptos marginales'. Todos los conceptos marginales tales como costo marginal, ingreso, utilidad, producto, propensión al consumo, ahorro, importación, etc., son de hecho primeras derivadas de las funciones respectivas bajo el mismo nombre, pero sin el término marginal (Archibald y Lipsey, 1967, p. 3, traducción realizada por los autores).

Estos dos puntos como los otros de la lista dejan claro el fuerte vínculo entre la economía y las matemáticas; de allí, una de las razones que permite que algunas situaciones, por no decir todas, que pueden ser representadas adecuadamente por modelos matemáticos. Con el fin de continuar hablando del análisis marginal, es oportuno reservar unas líneas al tema de funciones dentro de la economía y así justificar la expresión "adecuadamente" usada arriba.

Cuando el profesor de matemáticas enseña cálculo con aplicaciones a la economía, manipulará funciones con restricciones muy propias de la economía, tomando en cuenta que se manejarán cantidades relacionadas como precios, sueldos, tiempo, empleados y cantidades de un determinado bien, entre otras. Así por ejemplo, el dominio de una función estará, en la mayoría de los casos, necesariamente restringido o acotado, además de no ser continuo sino discreto. Como una muestra de lo antes dicho, se estudia el dominio de una función de costos tomada de Haeussler y Paul (1997).

Para un fabricante la función de costos total es

$C(q) = 0{,}02q^3 + 10{,}4$,

donde q representa tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas (Haeussler y Paul, 1997, p. 171).

Si una persona tiene que estudiar el dominio de esta función y no se le advierte que representa el costo de fabricar un determinado bien, la respuesta será $Dom_c = R$, pero en caso de que se le haga tal advertencia, su respuesta se restringirá a $Dom_c = R^+ = [0,+\infty]$; pues hablar de una cantidad negativa de unidades producidas no tiene sentido en economía y se generaría una inconsistencia; no obstante, hay otra restricción de igual importancia y ésta tiene que ver con la cantidad máxima (o mínima) de bienes o productos que se pueden fabricar, supongamos K. Así, el dominio es realmente $Dom_c = R^+ = [0,K]$.

El profesor también debe hacer un breve paréntesis y explicar que, dado que se está trabajando con una función de costos y q representa las unidades producidas y vendidas por el fabricante, el dominio de la función es un subconjunto de números racionales del intervalo $[0, K]$; pero por razones de tipo didácticas y epistemológicas se debe extender el dominio a todos los números reales del intervalo $[0, K]$ ya que de lo contrario la función no sería continua y, en consecuencia, tampoco sería derivable.

De igual manera, se tratarán dos ejemplos más; éstos son la *función demanda* y la *función oferta* en su forma más sencilla desde los puntos de vista económico y didáctico; es decir, la lineal. La importancia viene dada por la información que éstas proporcionan, si son vistas como simples rectas en el plano y se aprecia que las pendientes de estas rectas tienen un comportamiento muy particular y una interpretación económica clave, que posteriormente se pueden relacionar con la derivada de funciones más complejas que modelen de igual forma una demanda o una oferta.

Todo ello avala el interés didáctico que tiene el análisis marginal y la importancia de mostrar algunas consideraciones de orden matemático-económico que los programas oficiales, en algunos casos, no consideran dentro de sus contenidos. El hecho de no considerar estos detalles relacionados con la economía, por muy obvios que parezcan, podría ir en detrimento de la formación del estudiante.

4.1. La demanda

Cuando se habla de demanda, se hace referencia no sólo a la cantidad de bienes o servicios que un consumidor o grupo de consumidores está dispuesto a comprar en un determinado mercado de una economía a un precio específico, sino también a la posibilidad presupuestaria de hacerlo. La demanda que un consumidor en general tiene de un determinado bien o servicio puede estar influenciada por un gran número de factores que determinarán la cantidad de bienes solicitados o demandados o, incluso, si éstos tiene demanda o no (Bort, 1997).

Algunos de estos factores son las preferencias del consumidor, sus hábitos, la información que éste tiene del producto o servicio por el cual se muestra interesado, el tipo de bien en consideración y el poder de compra. Es decir, la capacidad económica del consumidor para pagar por el producto o servicio, la *utilidad* o bienestar que el bien o servicio le produzca, el precio, la existencia de un bien complementario o sustitutivo, entre otros. Es importante aclarar que estos factores no son estáticos, pues pueden cambiar a través del tiempo o en un momento determinado (Blanco y Aznar, 2004; Bort, 1997).

En el análisis económico se tiende a simplificar este panorama manteniendo en niveles constantes todos los factores con excepción del precio; de esta forma, se establece una relación entre el precio y la cantidad demandada de un producto o servicio. Esta relación se conoce como la función o curva de demanda.

Considérese el siguiente ejemplo en el que se muestra una función de demanda del tipo lineal, en una economía hipotética y en el que la ley de la demanda[1] se cumple. Supóngase que para un precio de *$12*

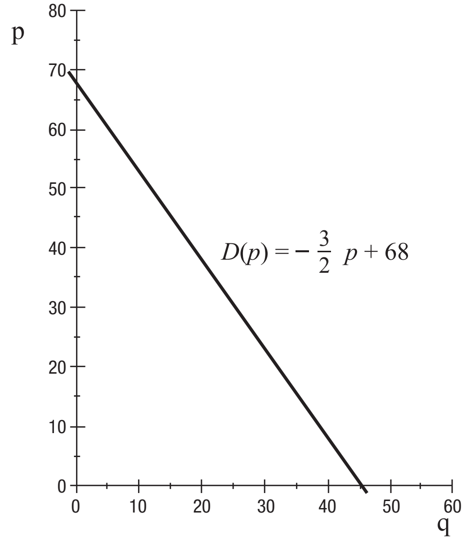

Figura 1. Demanda Lineal

se demandan *50* unidades de un bien x y que para un precio de \$*2* se demandan *65* unidades del mismo bien x. Suponiendo, como se dijo antes, que la demanda es lineal y representando tal situación en el plano (q=cantidad, p=precio), se tiene que la función de demanda es la recta que pasa por los puntos (*50,12*) y (*65,2*); es decir, $D(p) = -\frac{3}{2}\,p + 68$ y que se ilustra en la figura 1.

De esta función se deben dejar algunas cosas claras desde el punto de vista didáctico como por ejemplo el dominio $Dom_D = [0\,;\,68]$, ya que, como se dijo anteriormente, de acuerdo con un estudio realizado por el productor, el precio no debe ser inferior a $p=\$1{,}5$, mientras que para un precio $p>68$ \$, se demandaría una cantidad negativa de bienes.

Por otra parte, si se ve esta función como la ecuación de una recta, la pendiente es $m = -3/2 < 0$ y ésta es una característica de las funciones de demanda en el caso lineal (Weber, 1982). Sin embargo, si la función objeto de estudio es no lineal, es precisamente aquí donde es imprescindible el uso de la derivada en el análisis marginal, ya que la interpretación geométrica de la derivada en un punto de su dominio permite identificar de manera local si realmente se está frente a una función de demanda (pendiente negativa). Si este proceso se repite para cada uno de los puntos del dominio entonces es posible llegar a un resultado global. Es decir, el análisis de esta pendiente determinará cómo y cuánto aumenta o disminuye la cantidad demandada ante una disminución o un aumento de precio.

Observación 1: Es conveniente aclarar que no todas las funciones de demanda, necesariamente, presentan una pendiente negativa. Tal es el caso de los *bienes Giffen*, los cuales satisfacen que si el precio de un bien aumenta, la cantidad demandada por éste también aumenta (Nicholson, 1997). Sin embargo, por ser un caso poco usual por las características del bien, tal como lo refleja el autor antes citado, no se profundizará en este tema, pues no es la esencia del presente trabajo.

Observación 2: Como punto de información adicional conviene aclarar que aun cuando existen funciones *lineales* de demanda, estos son casos muy particulares como el *modelo de mercado monopolístico* (para más información ver págs. 397-399 de Nicholson, 2004) y estas funciones son tratadas en los libros de texto, principalmente, por su valor didáctico tanto a nivel introductorio como intermedio en el campo de la economía. No obstante, las funciones de demanda son homogéneas de grado cero[2] y continuas (Nicholson, 2004), por lo tanto la homogeneidad implica que no pueden ser funciones lineales. Más aún, la homogeneidad en cuanto a la teoría de demanda del consumidor significa que la restricción del presupuesto de los consumidores no varía si se multiplican todos los precios y el ingreso por una constante positiva. Esto significa que la función de demanda del consumidor es homogénea de grado cero en precios e ingreso. Sin embargo, no se profundizará más en esta materia ya que no es el tema de este trabajo.

4.2. La oferta

Cuando se habla de oferta se hace referencia a la cantidad de bienes, productos o servicios que se ofrecen en un mercado competitivo bajo unas determinadas condiciones. El precio es una de las variables fundamentales que determina las cantidades ofrecidas de un determinado bien en el mercado y, al igual que la demanda, se pueden considerar constantes el resto de las variables (Blanco y Aznar, 2004).

Considérese ahora un ejemplo en el que se muestra una función de oferta del tipo lineal, en una economía hipotética. Si el precio del bien es alto, el productor tendrá incentivos a ofrecer una mayor cantidad del bien al mercado, pero si el precio baja, el productor disminuirá la cantidad ofrecida o se dedicará a la fabricación de otros bienes. En este sentido, supóngase que para un precio de *\$9* se ofrezcan *5* unidades de un bien x y que para un precio de *\$20* se ofrezcan *60* unidades del mismo bien, tomando en cuenta que el productor, lo máximo que puede fabricar es *75* unidades. Suponiendo, como ya se dijo, que la oferta es lineal y representando tal situación en el plano (q=cantidad, p=precio), se tiene que la función de oferta es la recta que pasa por los puntos (*5,9*) y (*60,20*); es decir, $O(p) = 5p - 40$, la cual se muestra en la figura 2.

Al igual que en la demanda, es fundamental aclarar que en el dominio $Dom_D = [8,23]$ ya que no tiene sentido hablar de un precio $p < 8$, puesto que esto significaría una oferta negativa de bienes y, por

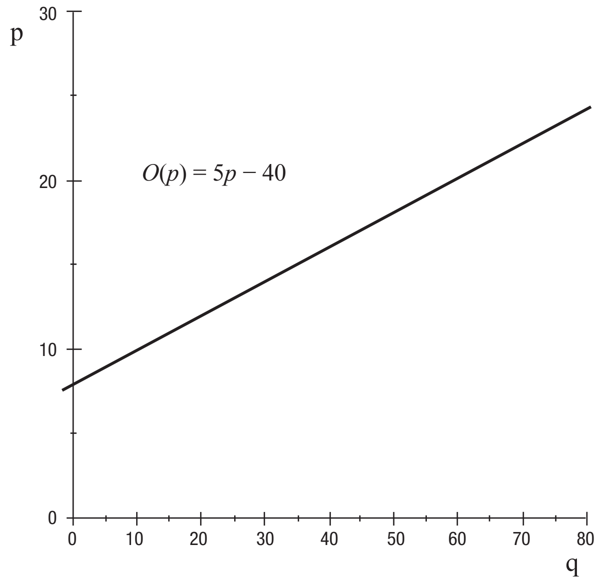

Figura 2. Oferta Lineal

otro lado, si el precio fuera $p > 23$, la cantidad de bienes ofertados sería superior a *75*, lo que sería una contradicción en relación con lo que el productor advierte sobre el tope de su producción. Por otra parte, si se considera esta función como la ecuación de una recta, la pendiente es $m = 5 > 0$ y ésta es una característica de las funciones de oferta en el caso lineal (Weber, 1982). No obstante, en el caso de la oferta, si la función a estudiar es no lineal, la derivada también cobra importancia en el análisis marginal. En este caso, la derivada en cada punto del dominio es positiva; además, esta pendiente determina cómo aumenta o disminuye la cantidad ofrecida ante una disminución o aumento del precio del producto o bien.

4.3. Introducción del concepto de derivada a través de un ejemplo no matemático

En libros de texto como Arya y Lardner (1987), Costa (1989), Haeussler y Paul (1997), Lial y Hungerford (2000), Whipkey *et al*. (1987) y Wonnacott (1983) antes de introducir el concepto de derivada, ellos mencionan algunos ejemplos no matemáticos donde es útil la derivada en el campo de la economía, pero terminan dándole un enfoque tradicional a la introducción del concepto en sí, salvo el último autor citado quien llega al concepto directamente con un ejemplo de impuesto marginal para posteriormente hablar de la derivada propiamente. Aun así, estos autores no destacan el desarrollo histórico del concepto (ni en matemáticas ni en economía) como estrategia didáctica.

Como se mencionó previamente, en el cálculo existen situaciones propias del análisis marginal que deben ser aclaradas de abordar el concepto de derivada. Aunque algunos profesores de matemáticas se inclinen por tratar de aprovechar algunos conceptos propios de las carreras vinculadas a este trabajo, lo que se presenta a continuación es una manera "no clásica" de introducir este concepto.

Como es sabido, con el cálculo diferencial se pretende estudiar, entre otras cosas, y en palabras llanas, procesos de cambios, variaciones relativas de unas variables respecto a otras, etc.; y además con qué rapidez ocurren estos cambios o variaciones; a todo esto no escapa el análisis económico (Costa, 1989; Whipkey *et al.*, 1987). A continuación, y a partir de un hecho económico, se examinará el concepto de la derivada desde el punto de vista de la razón de cambio, además de su interpretación en una situación económica:

> Suponga que el fabricante de cierto bien descubre que a fin de producir x de estos bienes a la semana, el costo total en dólares está dado por $C(x) = 200 + 0{,}03x^2$. Por ejemplo, si se producen *100* unidades a la semana, el costo está dado por $C(100) = 200 + 0{,}03(100)^2 = 500$. El costo promedio por unidad al producir *100* unidades es $\frac{500}{100} = \$5$ (Arya y Lardner, 1987, p. 466).

Además del estudio planteado por los autores donde se calcula el costo de producir *100* artículos a la semana y el costo promedio de los *100* artículos, se puede plantear la siguiente pregunta: ¿cuesta lo mismo producir el artículo *99* que el artículo *100*?, o de manera general, ¿cuánto cuesta producir cada unidad de x más allá de *100* unidades?

Esta última pregunta se ve respondida de la siguiente manera:

Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de *100* a *100*

$+ \Delta_x$ unidades por semana, en donde Δ_x representa el incremento en la producción semanal, el costo es

$$\begin{aligned} C + \Delta_x &= 200 + 0{,}03(100 + \Delta_x)^2 \\ &= 200 + 0{,}03(10.000 + 200\Delta_x + (\Delta_x)^2) \\ &= 500 + 6\Delta_x + 0{,}03(\Delta_x)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de x más allá de *100* unidades adicionales es

$$\begin{aligned} \Delta_c &= (C + \Delta_x) - C \\ &= 500 + 6\Delta_x + 0{,}03(\Delta_x)^2 - 500 \\ &= 6\Delta_x + 0{,}03(\Delta_x)^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, el costo promedio de las unidades extras es

$$\frac{\Delta_c}{\Delta_x} = 6 + 0{,}03\Delta_x$$

Por ejemplo, si la producción crece de *100* a *150* unidades por semana (de modo que $\Delta_x = 50$), se sigue que el costo promedio de las *50* unidades adicionales es igual a *6 + 0,03(50) = $ 7,50* por cada uno (Arya y Lardner, 1987, pp. 466-467).

Después del desarrollo del ejemplo anterior, los autores utilizan éste para dar una de las tantas interpretaciones de la derivada en la economía partiendo de la expresión $\frac{\Delta_c}{\Delta_x}$. Por otra parte, ellos utilizan una especie de analogía que muchos autores acostumbran a hacer con la velocidad promedio y la velocidad instantánea. Es decir, consideran la velocidad instantánea como la velocidad promedio en un intervalo infinitamente pequeño.

Definimos el *costo marginal* como el valor límite del costo promedio por unidades extra cuando este número de unidades extra tiende a cero. Así, podemos pensar en el costo marginal como el costo promedio por unidades extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el ejemplo anterior,

$$\text{Costo Marginal} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_c}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} 6 + 0{,}03\,\Delta_x = 6$$

En el caso de una función de costos general *C(x)* que represente el costo de producir una cantidad *x* de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por

$$\text{Costo Marginal} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_c}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{C(x + \Delta_x) - C(x)}{\Delta_x}$$

Es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función de costos con respecto a la cantidad producida.

$$\text{Costo Marginal} = \frac{dC}{dx}$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida (Arya y Lardner, 1987, p. 467).

Otra manera de introducir el concepto de la derivada a través de un ejemplo relacionado con la economía consiste en partir de la función de ingreso; al mismo tiempo, también se conocerá otra interpretación de la derivada. En otras palabras, supóngase que una empresa obtiene unos ingresos por la venta de los bienes que ésta produce. Este ingreso está modelado por la función *R(x)* y representa el ingreso[3] en una determinada unidad monetaria (*um*) por la venta de *x* bienes.

definimos el *ingreso marginal* como la derivada *R'(x).*

$$\text{Ingreso Marginal} = R'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_R}{\Delta_x}$$

Si el número de artículos vendidos se incrementa de x a $x + \Delta_x$, entonces existe un incremento correspondiente en el ingreso dado por

Δ_R = Nuevo Ingreso – Ingreso Original = $R(x + \Delta_x) - R(x)$ (Arya y Lardner, 1987, p. 469).

En este caso, los autores parten de la misma idea que utilizaron para introducir el costo marginal, en la cual caracterizan la razón de cambio.

El incremento promedio en el ingreso por unidades adicional vendidas se obtiene dividiendo Δ_R entre el número de unidades adicionales, lo que da $\frac{\Delta_R}{\Delta_x}$. El valor límite de este promedio cuando $\Delta_x \to 0$ da el ingreso marginal. Así pues, el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Esto es, la tasa con la que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas (Arya y Lardner, 1987, pp. 469-470).

Es importante resaltar la complejidad semiótica asociada a las anteriores definiciones referenciadas. Obsérvese que en los libros de texto citados del campo de la economía usan tanto la notación incremental como la notación diferencial para definir el costo marginal y el ingreso marginal que pone las bases de un conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la tasa instantánea como función en la definición del costo marginal de una cantidad producida (derivada en un punto). Es decir, ciertos usos de la notación incremental implican definir la tasa instantánea de variación sin haber introducido antes la tasa instantánea como función (derivada), o sin hacer las aclaraciones concernientes de las diferencias entre la derivada en un punto y la función derivada.

Si bien es cierto que no es objeto de este trabajo profundizar en esta problemática semiótica, se considera conveniente llamar la atención sobre la importancia que este conflicto semiótico potencial puede tener en la comprensión y diferenciación de los objetos de derivada en un punto y función derivada, llegando incluso a convertirse en un obstáculo cognitivo importante para el aprendizaje de los alumnos de los mismos (Contreras *et al*., 2005; Badillo, Font y Azcárate, 2005).

En resumen, se desea resaltar la importancia de introducir el concepto de la derivada mostrado anteriormente. En primer lugar, se destaca el hecho de que no está contemplado en algunos de los programas de asignaturas que se han analizado. Por tanto, se resalta la posibilidad de enseñar el concepto a través de ejemplos no matemáticos, de acuerdo con una apuesta por la enseñanza de las matemáticas más próxima a temas afines a la carrera que se estudia y, más específicamente, con el futuro campo laboral.

Por otra parte, surge también la propuesta de establecer un paralelismo entre la introducción del concepto en sí a través de una situación puramente matemática y el hecho de presentarlo por medio de un ejemplo no matemático, dándole al estudiante un amplio sentido al significado de la derivada. Con este puente de interconexión entre la parte matemática y la parte económica, más que imponer esta manera de enseñar el concepto de la derivada, lo que se ofrece es una alternativa a los profesores de manera que el estudiante conozca y aprenda otra manera, distinta a la tradicional, de llegar al concepto propiamente.

Además, a la hora de profundizar en el conocimiento matemático de la derivada, el hecho de que los estudiantes tengan un conocimiento previo del uso de la derivada en economía puede favorecer su aprendizaje, cambiar actitudes, etc. En este sentido se apela a una investigación realizada con profesores de matemáticas en estudios de economía (García, 2009) que evidencia la necesidad de un trabajo cooperativo entre los responsables de la docencia como medio para incidir en este nuevo enfoque de enseñanza. Es evidente que, en cualquier caso, más investigaciones son necesarias para poder ser más contundentes y poder hablar de los beneficios; sin embargo, se entiende que la aquí se presenta pueda aportar significatividad a conceptos matemáticos que para los estudiantes de este ámbito acaban siendo puramente técnicos y repetitivos. Se comparte plenamente la siguiente opinión de Javier Peralta, ya que el cálculo diferencial forma parte del análisis matemático.

> La importancia de las aplicaciones del análisis, y el hecho de que en él confluyan todas las partes de la matemática permitiendo su interrelación [con la economía], son sin duda dos de las razones por las cuales se encuentra presente en los programas de enseñanza (Peralta, 1995, p. 183).

Las interpretaciones o caracterizaciones permiten llegar al concepto en sí por medio de un enfoque puramente matemático, pero también, y no de manera menos importante, se puede introducir el concepto de la derivada partiendo de una situación vinculada a otras ciencias como es el caso de la economía. Paralela a las diversas interpretaciones, se hace mención de las distintas notaciones de la derivada que frecuentemente se encuentran en la literatura, pero que tienen el mismo significado.

En ambos casos, tanto en las interpretaciones como en las notaciones, se enfatiza de manera especial el hecho que desde el punto de vista didáctico subyace a éstos. Por un lado, el profesor por lo general suele enseñar el concepto y hacer uso de una o dos notaciones; pero en los libros de texto el estudiante puede encontrarse con una pregunta o problema que, por el simple hecho de ofrecer una notación que este último desconoce, le podría generar dudas. Por otro lado, se desea resaltar que por medio de diversas interpretaciones de la derivada, la enseñanza de este concepto no queda relegada al simple hecho de ver el mismo como un objeto matemático más, sino que por el contrario, es también una herramienta de gran utilidad en el extenso campo de las ciencias. En consecuencia, el estudiante saldría favorecido con una enseñanza global del concepto.

5. Consideraciones didácticas adicionales

Los modelos lineales que se presentaron anteriormente están colocados con toda la intención, pues tienen un gran valor didáctico si se pretende enseñar el concepto de derivada y su interpretación en economía, ya que se parte de un proceso en el cual el estudiante con conocimientos básicos de economía no debería tener mayores inconvenientes para abordar el tema. Ahora bien, aunque el motivo de esta investigación no es evaluar los textos de cálculo con aplicaciones a las ciencias económicas, es preciso señalar que en algunos de éstos no se tratan situaciones como las siguientes: (*1*) no toda recta con pendiente negativa (positiva) puede modelar una función de demanda (oferta); y, (*2*) el dominio de las funciones debe tener un tratamiento especial por las restricciones que éstas puedan tener según la situación económica que las mismas representen o modelen, tal como fue explicado al final del apartado reservado al análisis marginal. Este tipo de situaciones tampoco aparece en los programas oficiales estudiados para este trabajo.

En el ejemplo de la figura 3 se puede apreciar la gráfica de una recta con pendiente negativa, pero que no obedece a una demanda, ya que, al no pasar la gráfica de la recta por el primer cuadrante, se estaría considerando que, tanto el precio como la cantidad demandada es negativa en todo momento, hecho que resulta del todo inconsistente desde el punto de vista económico.

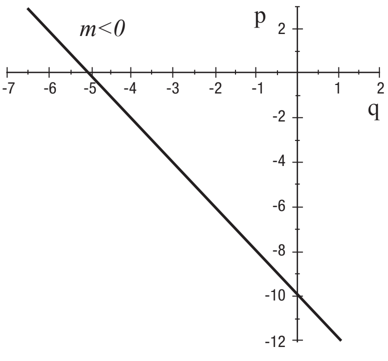

Figura 3. m<0, pero no es función de demanda

6. Una justificación de la derivada en la economía

Tal como se mencionó en el apartado anterior, los ejemplos antes señalados de demanda y oferta corresponden a casos lineales; pero no se plantea cómo abordaría el estudiante una situación en la que, dada una función no-lineal expresada de forma analítica, que se supone modela (bien la demanda o bien la oferta de un producto) se le pida determinar a cuál de estas dos situaciones económicas en concreto corresponde.

Pues bien, es éste uno de los casos donde comienza a tener valor didáctico la derivada en las ciencias económicas, ya que una manera de resolver el problema es por medio de la derivada; si se calcula la derivada de la función y se evalúa en un punto de su dominio, se obtendrá la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (interpretación geométrica, ver Figura 4). El signo de la pendiente provee la información solicitada. En otras palabras, la derivada permite identificar la función, con lo cual queda de manifiesto la utilidad e importancia de la derivada en este campo de las ciencias económicas, entre otras. De esta manera se enfatiza que la derivada es mucho más que la aplicación de una regla.

Considérese el mismo problema de antes, pero además sin saber si realmente corresponde a una demanda, a una oferta o a ninguna de ambas; la pendiente proporciona una aproximación a la respuesta, pero no garantiza que la función corresponda a una situación económica

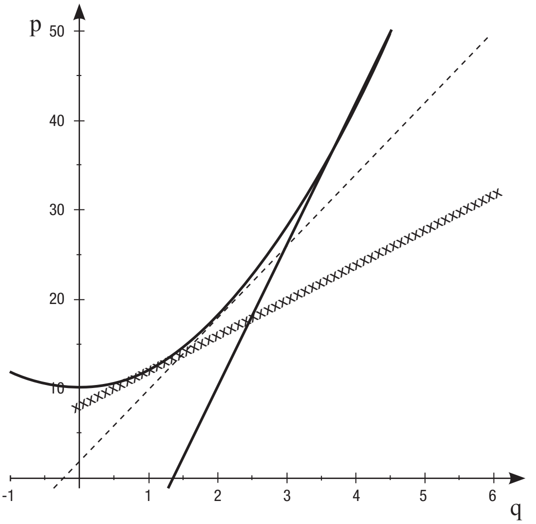

Figura 4. Oferta no-lineal, donde las tres rectas tienen pendiente m>0

en concreto puesto que la función a estudiar podría estar en el cuarto cuadrante del plano cartesiano; entonces interviene la gráfica de funciones como herramienta para resolver el problema.

El uso de la derivada en el campo de la economía no sólo se limita al análisis de una función y su comportamiento según una ley, como es el caso de la demanda y la oferta, por ejemplo. En economía también se estudia la optimización de procesos modelados mediante una función matemática. Como referencia concreta a esta situación tenemos las maximizaciones de las ganancias del productor o del beneficio de la empresa, así como también las minimizaciones de los costos de producción, entre otros.

Está claro que existen muchas otras situaciones de economía en las que la derivada juega un papel muy importante, pero con las citadas anteriormente queda plenamente justificada no sólo la enseñanza de este concepto a estudiantes de ciencias económicas, sino que todo este vasto contenido debe formar parte del conocimiento profesional de los profesores de cálculo diferencial que atienden a los estudiantes antes mencionados.

7. Consideraciones y propuestas finales

Finalmente, se llega a las siguientes consideraciones y propuestas de modo que incidan, más que en los programas oficiales de cálculo diferencial para carreras de ciencias económicas y afines, en la enseñanza que imparten los profesores de matemáticas. En este orden de ideas, conviene que el profesor, como facilitador y administrador del curso, involucre al estudiante a través de los cursos de matemáticas básicas en situaciones y hechos propios de la carrera con lo cual, el profesor debe reflexionar y plantearse alternativas didácticas que se adapten a las necesidades y exigencias del nuevo profesional que demanda la sociedad de hoy en día. Así, se muestran a continuación algunos aspectos que el profesor debería tomar en cuenta en la enseñanza del cálculo diferencial para carreras de ciencias económicas:

1. Es pertinente considerar el origen y evolución del cálculo diferencial, haciendo especial énfasis en el análisis marginal, puesto que el desarrollo histórico de la derivada posee un valor didáctico significativo, le muestra al estudiante que el cálculo diferencial fue y sigue siendo utilizado por los economistas para resolver problemas de economía y, al mismo tiempo, la da formalidad a la teoría económica (Arrow e Intriligator, 1981).

2. La introducción del concepto de derivada de una manera no clásica; es decir, una en la que el estudiante tenga una visión más amplia de la derivada, su significado matemático y económico, como por ejemplo a través del impuesto marginal, utilizado por Wonnacott (1983), donde se parte primero de una situación económica y posteriormente se llega al concepto de la derivada como objeto matemático. De esta manera el estudiante adquiere una visión multidisciplinaria del concepto desde la misma introducción del mismo.

3. Como consecuencia de lo dicho en el punto anterior, es pertinente aclarar que, puesto que el desarrollo sugiere la utilización del contexto económico a la hora de introducir los objetos de derivada en un punto y función derivada, se sugiere aprovechar y explotar el contexto favorable y significativo de la economía para motivar a los estudiantes sobre el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial. Sin embargo, se debe estar consciente de que esta propuesta deja abierta opciones de investigación en las que tendría que indagar sobre los siguientes aspectos:

a. La complejidad semiótica aumenta al partir de un contexto económico. Es decir, el hecho de definir el costo marginal usando la notación incremental y la notación diferencial puede ayudar a emerger conflictos semióticos que condicionen negativamente la comprensión de los objetos derivada en un punto y función derivada.

b. Conscientes de que el costo marginal es una aproximación a la derivada, se tendría que reflexionar sobre las implicaciones que tiene el paso de lo discreto a lo continuo (función derivada). Es decir, a la hora de optar por el uso de este contexto los profesores no pueden olvidar que los aumentos en economía no son continuos sino discretos. Por tanto, el profesor debe tener especial cuidado cuando se habla de un objeto (derivada en un punto) o del otro (función derivada). Igualmente, en el contexto económico en el que se está trabajando se ha de tener en cuenta que hay funciones no derivables por la misma definición del dominio que requiere este contexto. No obstante, para poder manipularlas se ha de ampliar el dominio al conjunto *R*, de los números reales, para poder hacer que la función sea derivable.

4. Como referencia concreta a esta situación tenemos las maximizaciones de las ganancias del productor o del beneficio de la empresa, así como también la minimización de los costos de producción, entre otros.4 Para terminar y continuando con una apuesta por una enseñanza de la derivada vinculada al contexto económico, el docente debería estudiar la posibilidad de implantar la enseñanza basada en problemas para introducir y desarrollar el tema de la derivada como alternativa didáctica; de esta manera se estaría involucrando al estudiante en el desarrollo profesional relacionado con su carrera. Más aún, por esta vía se puede resaltar el valor didáctico de la historia de las matemáticas.

8. Notas

1 Esta ley indica que existe una relación inversa entre el precio y la cantidad demandada de un bien durante un cierto periodo. Es decir, si el precio de un bien aumenta, la cantidad demandada por éste disminuye; por el contrario, si el precio del bien disminuye, la cantidad demandada tenderá a subir (existen excepciones a esta ley, dependiendo del bien del que se esté hablando).

2 Una función se dice homogénea de grado k si para todo número real $t>0$, $f(tX) = t^k f(X)$ *con* $X \in R^n$, en particular, una función homogénea de grado 0 satisface $f(tX) = f(X)$ *con* $X \in R^n$.

3 Se acostumbra a utilizar *R* por ser la letra inicial de la palabra *revenue*.

9. Referencias

Archibald, G. y R. Lipsey (1967). *An introduction to a mathematical treatment of economics*. Second edition. London: Weidenfeld and Nicolson, 399 pp.

Artigue, M. (1991). "Analysis," pp. 167-198. En: D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*, first edition, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Arrow, K. e M. Intriligator (1981). "Historical introduction," pp. 1-14. En: Arrow and Intriligator (eds.), *Handbook of mathematical economics*, V. 1, first edition, Netherlands: Elseiver Science Publishers.

Arya, J. y R. Lardner (1987). *Matemáticas aplicadas a la administración y la economía*. Segunda edición. México, D. F.: Prentice Hall, 870 pp.

Babini, J. (1969). *Historia sucinta de la matemática*. 3era edición. Madrid: Editorial Espasa-Calpe, S. A. (Colección Austral, Nº 1142), 143 pp.

Badillo, E.; V. Font y C. Azcárate (2005). "Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemáticas del bachillerato. VII Congreso." *Enseñanza de las Ciencias*, (Número extra, septiembre, 2005), pp. 1-6.

Balbás, A., J. Gil y S. Gutiérrez (1989). *Análisis matemático para la economía I: Cálculo diferencial*. Primera edición. Madrid: Editorial A. C., p. 243.

Blanco, J. y J. Aznar (2004). *Introducción a la economía. Teoría y práctica*. Cuarta edición. Madrid: Mc Graw Hill, 431 pp.

Bort, A. (1997). *Principios de teoría económica*. Segunda edición. Madrid: Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A., 432 pp.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Segunda edición. Madrid: Alianza Universidad, 401 pp.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Primera edición. Madrid: Alianza Editorial, 808 pp.

Cardús, D. (1972). *Introducción a las matemáticas para médicos y biólogos*. Primera edición. Barcelona: Editorial Vicens Vives, 440 pp.

Chiang, A. y K. Wainwright (2006). *Métodos fundamentals de economía matemática*. Cuarta edición. México: Mc Graw-Hill Interamericana, 688 pp.

Contreras A.; V. Font; L. Luque y L. Ordóñez (2005). "Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal." *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25, 2, pp. 151-186.

Costa, E. (1989). *Matemáticas para economistas*. 1era edición. Madrid: Ediciones Pirámide, S. A., 380 pp.

De Guzmán, M. y B. Rubio (1992). *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático: Estrategias del pensamiento matemático*. Vol. 2. Primera edición. Madrid: Ediciones Pirámide, S. A., 302 pp.

Dubinsky, E.: K. E. Schwingendorf y D. Manhews (1995). *Calculus: Concepts and computers*. Second edition. New York: McGraw-Hill, 625 pp.

Durán, A. (2000). "De cómo se gestó y vino al mundo el cálculo infinitesimal." En Durán, A. *El legado de las matemáticas de Euclides a Newton: Los genios a través de sus libros*. Andalucía: Reales Alcázares, pp. 225-278.

Eves, H. (1976). *An introduction to the history of mathematics*. Fourth edition. New York: Holt, Rinehart and Winston, 588 pp.

Garcia, L. (2009). *Un estudio sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas La Enseñanza Basada en Problemas (EBP) como estrategia metodológica y didáctica.* Tesis Doctoral. Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona, 622 pp.

Grabiner, J. V. (1983). "The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass." *Mathematics Magazine*, 56, 4 (October, 1983), pp. 195-206.

Haeussler, E. y R. Paul (1997). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida*. Octava edición. México, D. F.: Prentice Hall Hispanoamericana S. A., 941 pp.

Katz, V. (ed.) (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, MAA, Notes Nº. 51.

Kleiner, I. (2001). "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus." *Educational Studies in Mathematics*, 48, 2-3 (November, 2001), pp. 137-174.

Lial, M. y T. Hungerford (2000). *Matemáticas para administración y economía*. Séptima edición. México, D. F.: Pearson Educación, 880 pp.

Nicholson, W. (2004). *Teoría microeconómica, principios básicos*. Sexta edición. México, D. F.: McGraw Hill, 599 pp.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de las matemáticas*. Primera edición. Madrid: Huerga y Fierro Editores, 229 p.

Salas, S.; E. Hille y G. Etgen (2002). *Calculus en una y varias variables*. Cuarta Edición. Barcelona: Editorial Reverté, S.A., Vol. I., 1155 pp.

Stein, S. K. (1982). *Cálculo y geometría analítica*. Tercera edición. Madrid: Ediciones La Colina, 1057 pp.

Weber, J. (1982). *Matemáticas para administración y economía*. Cuarta edición. México, D. F.: Harla, S. A., 823 pp.

Whipkey, K.; M. Whipkey y G. Conway (1987). *El poder de las matemáticas, aplicaciones en administración y ciencias sociales*. Segunda edición. México, D. F.: Limusa, 514 pp.

Wonnacott, T. (1983). *Aplicaciones del cálculo diferencial e integral*. Primera edición. México, D. F.: Limusa, 497 pp.

Wussing, H. y W. Arnold (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Primera edición. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza, 676 pp.