

## **Ley de conservación del precio final en el modelo de Black Scholes**

*Final price conservation law in the Black Scholes model*

**Sukhomlin Nikolay\***

### **Resumen**

El alcance principal del artículo es la construcción de la ley de conservación que corresponde a la solución “clásica” de Black-Scholes. La introducción de la nueva característica se vuelve muy eficaz para encontrar dicha ley. Esta cantidad representa la función de Green y se manifiesta como factor en varias soluciones de la ecuación de Black-Scholes. La mencionada ley de conservación nos permite formular un método de medición experimental de la volatilidad. Además se destaca el papel importante de la elasticidad-precio en el marco del modelo de Black-Scholes. Encontramos el operador para el cual la solución “clásica” es una función propia.

**Palabras clave:** Modelo de Black Scholes. *Solución “clásica”*. Característica auxiliar. Leyes de conservación.

### **Abstract**

The main result of this paper is the construction of the Black-Scholes model Conservation Law. We introduce the new “Greek” characteristic “psi” which is very effective to define the conservation of the final price. Also it is the Green function and the factor in several solutions of the Black-Scholes equation. We propose an Experimental Method to measure of the Volatility. We show important role of the Elasticity-price in this model and we construct the Symmetry Operator corresponding to the Black-Scholes “Classic” Solution.

**Key words:** Black Scholes Model, Black Scholes “Classic” Solution, auxiliary Characteristic “Psi”, Conservation Laws.

---

\* Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, Departamento de Física, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Santo Domingo, República Dominicana, Departamento de Economía, e-mail: ww17971865@yahoo.fr

## 1. Introducción

Durante los últimos 15 años se desarrolló una tendencia de acercamiento entre la física y las finanzas en donde se utilizan varios modelos de la física estadística, de las simulaciones computacionales aplicados a finanzas, etc. (Bouchaud J.-Potters, *et al.*, 2003, Heath D., *et al.*, 2003, Silberberg Gheorghie, 2001). Está establecido el papel similar de la energía y el del total de dinero en un sistema. Sin embargo permanece la dificultad de expandir los conceptos de leyes de conservación y de la simetría en modelos económicos y financieros, además que la idea de la búsqueda de leyes de conservación en el modelo de Black Scholes no es nueva (De León M. *et al.*, 1997, Ibragimov Nail H., 1994, Mete Soner, 2005, Gazizov R. K. *et al.*, 1996, Poee C. A., *et al.*, 2003).

Estas leyes de conservación no sustituyen la ecuación que describe la evolución del sistema dinámico, sino que lo hacen más consistente, simplifican el estudio, entregan información complementaria sobre el proceso. A menudo dan la posibilidad de avanzar en el estudio del comportamiento del sistema dinámico sin resolver la ecuación de evolución.

Además permiten realizar el análisis cualitativo, plantear de manera coherente el problema de resolución numérica de la ecuación principal y ayudan en la formulación de condiciones limitantes (iniciales, de frontera etc.). Posibilitan el planteamiento del problema de la estabilidad de la evolución, facilitan la elaboración de conceptos nuevos de la teoría, etc. Se conoce que cada ley de conservación corresponde a una simetría específica del sistema dinámico. La ventaja de leyes de conservación y de la simetría correspondiente está en el hecho que su existencia no depende de coordenadas en las cuales está escrita la ecuación de evolución. Por ejemplo, en el artículo (Ayache Ele, 2001) se sugiere la importancia de las leyes de conservación por la razón que justamente posee tal propiedad covariante.

Así la construcción de leyes de conservación necesita el estudio de la simetría del sistema dinámico. En el artículo (Sukhomlin N., 2004) fue planteado el estudio sistemático de la simetría del modelo de Black-Scholes, se construyó las leyes de conservación diferenciales hasta tercer

orden y en un enfoque local se encontró cinco clases de nuevas soluciones. En este artículo aplicando el concepto de leyes de conservación al modelo se construye la ley de conservación correspondiente a la solución "clásica".

## 2. La ecuación de Black-Scholes y la solución "clásica"

La ecuación principal del modelo de Black-Scholes de mercados financieros internacionales de bienes derivados es:

$$\hat{A}V \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} - r \right\} V(t, x) = 0 \quad (1)$$

en donde  $V(t, x)$  es el valor de la opción de comprar un bien financiero (valor básico) con el precio  $x$  en el momento  $t$ , con las constantes reales: volatilidad  $\sigma^2$  ( $\sigma \neq 0$ ) y tipo de interés fijo sin riesgo  $r$ . En el modelo de Black Scholes la ecuación (1) se deduce a partir de un proceso estocástico de tipo de difusión y está ligada con la ecuación de difusión. Este problema está bien desarrollado en la literatura científica a partir del trabajo pionero de Black Scholes en 1973 (véase por ejemplo Wilmott, Howisan Dewynne, 1995, Gazizov e Ibraguimov, 1996, Silverman D., 1999, Poee, Mahomed y Wafo, 2003), Sukhomlin N., 2004), Sukhomlin N., Ortiz J., 2006). Se conoce que la transformación:

$$\tau = -\sigma^2 t + const, \quad \xi = \ln(x/K), \quad (2 a)$$

$$V(t, x) = U(\tau, \xi) \exp\{\beta \ln x + (\beta - 1)^2 \sigma^2 t / 2\} \quad (2 b)$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \quad (2 c)$$

convierte la ecuación (1) en la ecuación de difusión:  $-\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0$

Naturalmente, la dimensión de la constante arbitraria  $K$  se elige igual a la dimensión de la variable  $x$ . Así las nuevas variables  $(\tau, \xi)$  no tienen dimensiones.

Este hecho explica un gran paralelismo entre los dos modelos. Pero existen diferencias claras, por ejemplo: a la condición inicial para la ecuación de difusión corresponde la condición final para la ecuación de Black Scholes porque la “difusión” en el modelo de Black Scholes se hace “hacia el pasado”. La ecuación de difusión representa la ecuación directa de Kolmogorov, mientras que la de Black Scholes es la ecuación inversa (retrógrada) de Kolmogorov.

Usando la derivación respecto con  $\ln x$ , la ecuación de Black Scholes se convierte justamente en una ecuación de la “difusión inversa”: sea la transformación  $t' = t$ ,  $x' = \ln x$ . Calculando las derivadas en nuevas coordenadas se llega a la ecuación siguiente:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \sigma^2 \beta \frac{\partial}{\partial x'} - r \right\} V(t', x') = 0$$

Visto que los signos delante la derivada respecto con el tiempo y la segunda derivada respecto con el logaritmo del precio son iguales, se constata que esta ecuación justamente describe la “difusión hacia el pasado”. Con otras palabras representa la ecuación retrógrada de Kolmogorov.

Esta última transformación despeja claramente el sentido de ambos parámetros de la ecuación de Black Scholes:  $\sigma^2$  representa el coeficiente de difusión constante “durante dicha difusión inversa” lo que corresponde a su denominación *volatilidad*. La constante  $r$  es responsable de la actualización del precio de la opción y representa la característica de la “fuente” según la terminología de física (es negativa en este caso).

Es notable que el término con la primera derivada que describe la tendencia de precios en el mercado esté definido por el parámetro sin dimensión  $\beta$ . Esto representa una de varias manifestaciones de un papel importante de este parámetro en el modelo de Black Scholes; véase también la fórmula (2b).

Algunos autores como (Wilmott, Howison y Dewynne, 1995) lo utilizan en otra forma:  $k \equiv 2r/\sigma^2$  lo que es igual a  $1 - 2\beta$ . Otros autores lo juntan con el factor con dimensiones  $\sigma^2$ , denotando por una sola constante el coeficiente  $\sigma^2\beta$  del término responsable de la tendencia, pero se vuelve más cómodo introducir un parámetro sin dimensión.

La solución “clásica” de la ecuación de Black Scholes es la construcción siguiente (véase por ejemplo [Wilmott, Howison y Dewynne (1995), Stampfli y Goodman (2001), Sukhomlin, Jacquinot (2006)]):

$$V_{cl}(t, x) = x \Phi(d_1) - A(t) \Phi(d_2) \quad (3a)$$

$$A(t) \equiv K e^{-r(T-t)} \quad (3b)$$

con la función de distribución normal:

$$\Phi(\theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} e^{-u^2/2} du \quad (4)$$

$$d_1 \equiv \frac{\ln x - \ln K}{\tau} + (1 - \beta)\tau \quad (5a)$$

$$d_2 \equiv \frac{\ln x - \ln K}{\tau} - \beta \tau \quad (5b)$$

$$\tau \equiv \sigma \sqrt{T-t} \quad (6)$$

Es claro que  $d_1 = d_2 + \tau$ . La constante  $K$  se interpreta como el precio de ejercicio,  $T$  = fecha de vencimiento,  $t \in [0, T]$ . La elección del argumento único  $d_1(t, x)$  (ó  $d_2(t, x)$ ) en el factor  $\Phi(\cdot)$  simplifica mucho la resolución de la ecuación porque finalmente convierte la ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria. Esto se verifica sin dificultades sustituyendo la solución (3a) en la ecuación de Black Scholes.

### 3. Ley de conservación del precio final

Se logra gran simplificación del problema de construcción de la ley de conservación correspondiente a la solución “clásica” de Black Scholes si introducir la función auxiliar  $\Psi$  siguiente:

$$\Psi \equiv \partial^2 V_{cl} / \partial (\ln x)^2 - \partial V_{cl} / \partial (\ln x) \quad (7)$$

Para encontrar la expresión explícita de la característica  $\Psi$  se denota:  $\Phi'(z) \equiv d\Phi/dz$  y se calcula esta última derivada usando las fórmulas (3b), (4), (5) y (6):

$$\begin{aligned} \Phi'(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(d_2 + \tau)^2}{2}\right\} = \\ &= \Phi'(d_2) \exp\left\{-\frac{\tau(d_1 + d_2)}{2}\right\} = \frac{1}{x} A(t) \Phi'(d_2) \end{aligned}$$

Así se llega a una relación útil:

$$x\Phi'(d_1) = A(t)\Phi'(d_2)$$

Utilizando esta fórmula se puede ahora concluir que la definición (7) se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\tau} x \Phi'(d_1) = \frac{1}{\tau} A(t) \Phi'(d_2) = \\ &= V_{cl}^{(1)} \left[ \text{Elasticidad} - \text{precio de } V_{cl}^{(1)} - 1 \right], \end{aligned}$$

$$\text{aquí } V_{cl}^{(1)} \equiv \partial V_{cl} / \partial (\ln x)$$

La elasticidad-precio de la característica  $\Psi$  será:

$$E_{\Psi} \equiv \frac{\partial \ln \Psi}{\partial \ln x} = -\frac{1}{\tau^2} (\ln x - \ln K) + \beta \quad (8)$$

La última igualdad permite construir la ley de conservación correspondiente a la solución "clásica" de Black Scholes en forma bastante sencilla:

$$\tau^2 (E_{\Psi} - \beta) + \ln x = \ln K = \text{const} \quad (9)$$

Esta ley describe la conservación del precio final  $K$  pactado en la opción. La ley (9) está escrita en términos de la característica auxiliar  $\Psi$ , abajo en la fórmula (17) presentamos la misma ley en términos de la solución "clásica"  $V_{cl}$

#### 4. Método experimental de medición del cociente $r/\sigma^2$

Es notable que según la fórmula (8) la elasticidad-precio del parámetro  $\Psi$  sea proporcional al logaritmo del precio del valor básico. Ahora es oportuno discutir su variación con el tiempo, la Figura 1 ilustra esta dependencia.

Conforme a la relación (8) es fácil de constatar que la elasticidad-precio  $E_{\Psi}$  se presenta como una recta decreciente con el coeficiente de proporcionalidad negativo igual a  $-1/\tau^2$ . Así para  $t \rightarrow T$  sus valores tienden al  $-\infty$  si  $x > K$  y al  $+\infty$  si  $x < K$  ( $\beta > 0$ ).

Con el tiempo la grafica de  $E_{\Psi}$  rota alrededor del punto fijo  $(0, \beta)$  en la dirección de las manecillas del reloj para presentarse como la recta vertical en el momento final  $t = T$ , en este momento se pierde el concepto de elasticidad para la característica  $\Psi$ . La elasticidad-precio  $E_{\Psi}$  no varía con el tiempo en el punto  $x = K$  y es igual al parámetro sin dimensión  $\beta$  definido en (2c).

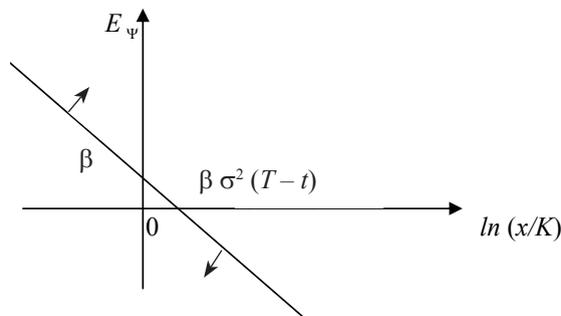


Figura. 1. Elasticidad-precio de la característica auxiliar  $\Psi$

Este último hecho abre las posibilidades de medir experimentalmente el coeficiente  $r/\sigma^2$  como sigue: se toma una serie temporal de valores de opciones  $V(t, x)$ , se construye la característica auxiliar  $\Psi$  de (7) y se calcula su elasticidad-precio  $E_\Psi$ . Graficándolo ahora, se encuentra el punto de intersección de la grafica  $E_\Psi$  como función de  $\ln(x/K)$  que es igual al parámetro sin dimensión

$$\beta \equiv \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$$

Así experimentalmente se encuentra el coeficiente  $r/\sigma^2$ . Visto que la tasa  $r$  suele ser dada, se destaca la posibilidad de medir la volatilidad. Se recuerda que en el marco del modelo de Black Scholes la volatilidad se considera como una constante lo que en realidad es una aproximación.

En cualquier momento del tiempo el sistema se vuelve absolutamente inelástico en la posición  $\ln x = \ln K + \beta \sigma^2 (T - t)$ . Este “punto de inelasticidad” evoluciona hacia el valor:  $\ln K$  con  $t \rightarrow T$ .

Utilizando las definiciones tradicionales de las características llamadas “Griegos”:

$$\Delta \equiv \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \Gamma \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (10)$$

introducida arriba característica auxiliar  $\Psi$  (8) se presenta por:

$$\Psi = x^2 \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad E_\Psi = 2 + E_\Gamma \quad (11)$$

y en general: si  $A = x^n B \quad \Leftrightarrow \quad E_A = n + E_B$

Conforme a la fórmula (8) la elasticidad-precio  $E_\Psi$  está ligada con  $d_2$  de (5b) por la relación siguiente:

$$d_2 = -\tau E_\Psi \quad (12)$$

Visto (12) las graficas de las características  $d_1, d_2$  rotan también con el tiempo  $t \rightarrow T$ , en sentido inverso a las manecillas del reloj, pero

no tienen un punto fijo como  $E_\Psi$  y en consecuencia no pueden ser utilizados para la medida experimental de la volatilidad: aquí está la ventaja principal de la introducción de la función auxiliar  $\Psi$  y de su elasticidad-precio  $E_\Psi$ .

## 5. Importancia de la característica $\Psi$ y de su elasticidad-precio

Es interesante notar que la característica  $\Gamma$  de (10) es bien conocida y ampliamente usada por los *brokers* de mercados de bienes derivados. Pero, mientras que  $\Gamma$  sea cercana a introducida en este artículo función auxiliar, finalmente es indispensable a utilizar la nueva característica  $\Psi$  para encontrar la ley de conservación correspondiente a la solución “clásica”.

La importancia de la función auxiliar  $\Psi$  (7) en el modelo está también en el hecho que la ecuación de Black Scholes (1) se puede escribir en la forma de la relación siguiente entre los “Griegos”:

$$-\Theta + \frac{\sigma^2}{2} \Psi + r(x\Delta - 1) = 0$$

con  $\Delta$  de (10) y  $\Theta \equiv -\partial V / \partial t$ . Se constata que introducida arriba función  $\Psi$  define el término central de la ecuación de Black Scholes, el que describe la “difusión” en el espacio de precios. Notamos también que  $x\Delta = V E_V$ .

Otro lado de la importancia del parámetro  $\Psi$  se manifiesta por el hecho muy sorprendente que esta función se encuentra analíticamente y representa la función de Green “actualizada”. La encontramos por etapas. La relación (9) permite construir el operador para el cual la función  $\Psi$  representa una función propia:

$$\hat{B} \Psi \equiv \left[ \sigma^2 (T - t) \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \beta \right) + \ln x \right] \Psi = \lambda \Psi \quad (13)$$

cuyos valores propios son:  $\lambda \equiv \ln K$ . La función auxiliar  $\Psi$  y las derivadas  $\partial V_{cl} / \partial(\ln x)$ ,  $\partial^2 V_{cl} / \partial(\ln x)^2$ , son también las soluciones de la ecuación de Black Scholes. El operador  $\hat{B}$  de (13) está en conmutación con el operador  $\hat{A}$  de la ecuación de Black Scholes (1) y por lo tanto es un operador de simetría de dicha ecuación. Por este medio se encuentra la relación directa entre la ley de conservación (9) y el operador de simetría correspondiente (13): véase para los detalles nuestro artículo (Sukhomlin N., 2004).

Es fácil resolver la ecuación (13) y sustituir el resultado en la ecuación (1). Al final se encuentra la función de Green actualizada:

$$\Psi(t, x) = \frac{c}{\sigma\sqrt{T-t}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/K) - \beta\sigma^2(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)} - r(T-t)\right\}, (c = const) \quad (14)$$

En términos de las fórmulas (8), (12) y de las denotaciones (5) esta función auxiliar se presenta por:

$$\Psi(t, x) = \frac{c}{\tau} \exp\left\{-\frac{d_2^2}{2} - \frac{r\tau^2}{\sigma^2}\right\} = \frac{c}{\tau} \exp\left\{-\left(\frac{\sigma^2 E_\Psi^2}{2} + r\right)(T-t)\right\} \quad (15)$$

La última expresión representa el valor actualizado del factor:

$$\frac{c}{\tau} \exp\left\{-\frac{E_\Psi^2(t, x)}{2} \sigma^2(T-t)\right\}$$

en el cual la dependencia del tiempo está definida por la elasticidad  $E_\Psi$   $E_\Psi = E_\Psi(t, x)$ , mientras que varía con el tiempo y con los precios.

Es interesante notar que la característica  $\Psi$  en forma de la función de Green actualizada (14) aparece como factor en varias soluciones de la ecuación de Black Scholes. Por ejemplo, en dos clases de nuevas soluciones del artículo [Sukhomlin N. (2004)]: en la clase de soluciones representadas por la función propia (7) del operador del precio final (3.b) y en las soluciones particulares (15). También aparece como factor en la solución paradójica de la ecuación de Black Scholes que se encuentra en el artículo (Sukhomlin, N. *et al.* (2006)), etc.

Es oportuno a constatar que después de la transformación (2) la función (14) se convierte justamente en la bien conocida función de Green (solución fundamental) de la ecuación de difusión.

Las relaciones (5), (6) y (12) permiten dar otra visión de la solución "clásica" (3):

$$V_{cl}(t, x) = \left[ K \Phi(\tau(1 - E_{\Psi})) \exp\left\{ \tau^2 \left( \frac{1}{2} - E_{\Psi} \right) \right\} - K \Phi(-\tau E_{\Psi}) \right] e^{-r(T-t)}$$

Se vuelve que la solución "clásica" se presenta también como el valor actual de la expresión entre los corchetes. La elasticidad-precio  $E_{\Psi}$  de la función auxiliar prácticamente define dicha solución. Este hecho se encuentra varias veces en el modelo de Black-Scholes (véase el artículo [Sukhomlin, N., Ortiz J. (2006)]) y otra vez manifiesta un papel importante de la elasticidad-precio  $E_{\Psi}$  en el marco de este modelo.

Notamos también que

$$\frac{1}{2} - E_{\Psi} = (d_1 + d_2)/2\tau$$

## 6. Ley de conservación correspondiente a la solución "clásica" de Black Scholes

La construcción de la ley de conservación se empieza por la construcción del operador para el cual la solución "clásica" (3)  $V_{cl}(t, x)$  es una función propia. Este operador corresponde al (13). Según la definición (7) tenemos:

$$\Psi = x \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right] V_{cl} = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_{cl} \equiv \hat{L} V_{cl} \quad (16)$$

El operador  $\hat{L}$  está en conmutación con el operador  $\hat{A}$  de la ecuación de Black Scholes (1) y es también un operador de simetría de la ecuación. Para encontrar el operador para el cual la solución "clásica" es una función propia, se sustituye (16) en (13) y se aplica el operador inverso  $\hat{L}^{-1}$  desde la izquierda:

$$\hat{B} V_{cl} \equiv (\hat{L}^{-1} \hat{B} \hat{L}) V_{cl} = \lambda V_{cl} \quad (17)$$

Así se encontramos la estructura de dicho operador:

$$\hat{B} V_{cl} = \hat{B} V_{cl} - 2 \int V_{cl} d(\ln x) - \hat{L}^{-1} V_{cl}$$

Se constata que este operador es lineal e integro-diferencial. La relación (17) permite escribir la ley de conservación correspondiente a la solución "clásica"  $V_{cl}$ :

$$V_{cl}^{-1} \hat{B} V_{cl} \equiv V_{cl}^{-1} (\hat{L}^{-1} \hat{B} \hat{L}) V_{cl} = \lambda = \text{const} \quad (18)$$

Esta igualdad representa otra forma de la ley de conservación (9) que fue escrita en términos de la característica auxiliar  $\Psi$ .

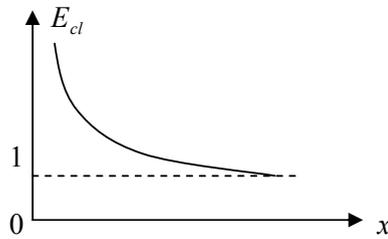
Finalizando esta sección se calcula la elasticidad-precio de la solución "clásica" de Black Scholes lo que se denota a veces como la característica  $\Omega$ :

$$\Omega \equiv E_{cl} = \frac{V^{(1)}}{V} = \frac{1}{1-f}, \quad f \equiv \frac{A(t) \Phi(d_2)}{x \Phi(d_1)} \quad (19)$$

El factor  $\Phi(d_2) / \Phi(d_1)$  representa una función creciente respecto con  $\ln x$ , acotada por el número uno. De las definiciones (5) se deduce fácilmente una fórmula interesante que permite presentar el precio del valor básico en cualquier momento del tiempo como una expresión actualizada:

$$x = K \exp\{\tau(d_1 + d_2)/2\} e^{-r(T-t)}$$

Usando ésta última fórmula se llega a la conclusión de que la función  $f$  es decreciente igual que la elasticidad  $E_{cl}$ .

Figura. 2. Gráfica de la elasticidad  $E_{cl}$ 

La elasticidad  $E_d$  tiende al valor uno con el crecimiento de  $x$  lo que corresponde a una de las condiciones de frontera:  $V \sim x$  si  $x \rightarrow 0$ . Se nota también que el sistema es infinitamente elástico para pequeños precios del valor básico ( $x \rightarrow 0$ ). La relación (19) y la Figura 2 sugieren que el modelo de la elasticidad constante podría ser fiable sólo para los precios grandes del valor básico.

En el artículo (Sukhomlin N., 2004) se comprueba que la elasticidad-precio se conserva para la familia siguiente de soluciones particulares de la ecuación de Black-Scholes:

$$V_{\lambda}(t, x) = cx^{\beta + \lambda} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\beta - 1)^2 - \lambda^2] \sigma^2 (T - t)\right\} (\lambda = \text{const})$$

Es notable que estas soluciones para diferentes valores del parámetro  $\lambda$  contienen entre otros cada uno de dos factores delante la función de la distribución normal  $\Phi(\cdot)$  de la solución "clásica" de Black Scholes (3a). Para  $\lambda = 1 - \beta$  se encuentra el primer factor:  $V_{1-\beta} = x$  ( $c = 1$ ) y para  $\lambda = -\beta$  se encuentra el segundo:  $V_{-\beta} = A(t)$  ( $c = K$ )

## 7. Conclusión

La solución "clásica" de Black Scholes se ha sido utilizada ampliamente por los últimos 30 años en los mercados financieros de bienes derivados, en la práctica de Bolsas de valores, etc. Mientras que modelo de Black Scholes sea bien estudiado, no se conoce ninguna cantidad que se conserva en marco de dicho modelo.

El problema de búsqueda de leyes de conservación en el marco de dicho modelo no es nuevo pero sistemáticamente fue utilizado para la construcción de nuevas soluciones en el artículo (Sukhomlin N., 2004). En el artículo actual se construye la ley de conservación correspondiente a la solución “clásica” de Black Scholes: se presenta implícitamente por la fórmula (9) y explícitamente por la fórmula (18). Es natural que describe la conservación del precio final  $K$  pactado en la opción lo que es la suposición crucial del modelo.

La importancia práctica de dicha ley de conservación está en el hecho que permite formular un método de evaluación experimental del cociente de la tasa libre de riesgo  $r$  y de la volatilidad  $\sigma^2$  descrito en la sección 3. La aplicación de este método a los datos de la Bolsa de valores de Paris CAC 40 está hecha en el artículo (Sukhomlin N. y Jacquinet Ph., 2006).

Para la construcción de la mencionada ley de conservación se vuelve muy eficaz la introducción de la función auxiliar  $\Psi$  definida por la fórmula (7). La importancia de esta característica no se reduce sólo al hecho que ayuda en la búsqueda de la ley de conservación. Es oportuno a notar que  $\Psi$  representa la función de Green actualizada (14). Es interesante que esta función se convierte, por la transformación (2), en la bien conocida función de Green de la ecuación de difusión. Además se encuentra que dicha función auxiliar  $\Psi$  se manifiesta como factor en gran cantidad de soluciones de la ecuación de Black Scholes.

También se observa que la elasticidad-precio de la característica  $\Psi$  tiene un papel importante en el marco del modelo de Black-Scholes: define a esta misma característica y a la solución “clásica” de la ecuación de Black Scholes, etc. En la sección 5 se encuentra el operador para el cual la solución “clásica” (3a) es una función propia y se constata que es lineal e integro-diferencial.

Las investigaciones para este artículo fueran financiadas en el marco del proyecto SEESCYT. El autor agradece al rector de la UASD y a la Escuela de Física por ayuda en la realización de investigaciones y también a los árbitros anónimos y el Coordinador de la Revista *Economía Prof.* Ismael Ortiz por las sugerencias oportunas.

## 8. Referencias

- Ayache Ele (2001). Wilmott, “The continuous and the discrete”, WILMOTT, United Kingdom, Disponible: [http://www.ito33.com/html/print/011001\\_discreet.pdf#search='conservation%20laws%20black%20scholes'](http://www.ito33.com/html/print/011001_discreet.pdf#search='conservation%20laws%20black%20scholes')
- Bouchaud J. P., Potters M. (2003). *Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management*, University Press, Cambridge, United Kingdom,
- De León M., Martín de Diego D. (1997). “Simetría y cantidades conservadas en modelos económicos. Caso autónomo”, *V Jornada, Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa*, Málaga, España, <http://www.asepuma>
- Gazizov R. K., Ibragimov N. H. (1996). “Lie symmetry analysis of differential equations in finance”, *Preprint* No. 1/96, University of the Witwatersrand, Department of Computational and Applied Mathematics, Johannesburg, South Africa.
- Heath D., Platen E. (2003). “Pricing of Index Options under a Minimal Market Model with Lognormal Scaling”, School of Finance & Economics, University of Technology Sydney, Australia. Disponible en: [http://www.business.uts.edu.au/qfrc/research/research\\_papers/rp101.pdf](http://www.business.uts.edu.au/qfrc/research/research_papers/rp101.pdf)
- Ibragimov, Nail H. (1994). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume I: Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws*, CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, USA
- Metz Soner, “Bounding the Greeks” (2005). *Operations Research and Financial Engineering Seminar*, Princeton University, USA, february 9 - february 11, 2005 <http://www.math.princeton.edu/~seminar/2004-05-sem/2-9-2005weekly.html>.
- Mitchell, Thomas (2004). «Conservation laws for microeconomists! Comments on “Economic Conservation Laws as Indices of Corporate Performance” by Ryuzo Sato», *Japan and the World Economy*, International Journal of Theory and Policy, Editor: Robert Dekle, Yasushi Hamao, Elsevier, North-Holland, 16, 3, August, pp. 269-276.
- Negishi, Takashi, Ramachandran Rama V., Mino Kazuo (2001). *Economic Theory, Dynamics and Markets*, Kluwer Academic Print, Boston, USA.

- Poee C. A., Mahomed F. M., Wafo Soh C. (2003). "Invariant solutions of the Black-Scholes equation", *Mathematical and Computational Applications*, International Journal, Association for Scientific Research, Manisa, Turkey, 8, 1, pp. 63-70.
- Samuelson Paul A. (2004). "Conservation laws in economics", *Japan and the World Economy*, International Journal of Theory and Policy, Editor: Robert Dekle, Yasushi Hamao, Elsevier, North-Holland. 16(3), pp. 243-246,
- Sato, Ryuzo, Ramachandran Rama V. (1990). *Conservation Laws and Symmetry: Applications to Economics and Finance*, Boston: Kluwer Academic Print.
- Sato, Ryuzo (2004). "Economic Conservation Laws as Indices of Corporate Performance", *Japan and the World Economy*, International Journal of Theory and Policy, Editor: Robert Dekle, Yasushi Hamao, Elsevier, North-Holland. 16, 3, pp. 247-267.
- Sato, Ryuzo (2006). Biased Technical Change and Economic Conservation Laws, Research Monographs in Japan-U.S. *Business and Economics*, Series Editors: Ramachandran, Rama V., Sato, Ryuzo, Springer. 9.
- Silberberg, Gheorghe, (2001). "Discrete symmetries of the Black-Scholes equation", Department of Mathematical Sciences, University of Texas at El Paso, El Paso, Texas, USA. <http://www.ceu.hu/math/Preprints/silberberg2.pdf>.
- Silverman, Dennis (1999). "Conversion of the Black-Scholes Equation to the Diffusion Equation", Department of Physics and Astronomy, University of California, Irvine. Diasponible en: <http://www.physics.uci.edu/~silverma/bseqn/bs/node4.html>.
- Stampfli J., Goodman V. (2001). *The Mathematics of Finance: Modelling and Hedging*, California: Brooks/Cole, Publishing Co., Pacific Grove.
- Sukhomlin, N. (2004). "Simetría y nuevas soluciones de la ecuación de Black Scholes", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. XI, No. 2, pp. 175-189. Disponible en: <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol11/nikolay.pdf>. Caracas.
- Sukhomlin, N. and Jacquinot Ph. (2006). "Conservation Laws in the Black Scholes Model", *The XV<sup>th</sup> International Symposium on Mathematical Methods Applied to the Sciences*, The University of Costa Rica, 21-24

February, Costa Rica. Disponible en: <http://www.emate.ucr.ac.cr/simmac/>

Sukhomlin, N., Ortiz J. (2006). "New exact solutions for the Black Scholes equation & diffusion equation" (in publication: *Mathematical and Computational Applications*)

Wilmott P., Howison S., Dewynne J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge, United Kingdom. Cambridge University press.