



TIPOLOGÍA DE ERRORES EN EL ÁREA DE LA GEOMETRÍA PLANA PARTE II

Fecha de recepción: 12-07-03

Fecha de aceptación: 29-07-03

LISSETTE FRANCHI Y ANA I. HERNÁNDEZ DE RINCÓN
hectorpuntocom@cantv.net • anaismenia@telcel.net

LA UNIVERSIDAD DEL ZULIA - FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.

Resumen

Un error es una oportunidad de aprendizaje que permite al alumno tomar una decisión al percatarse de no haber llegado a la solución correcta del problema; podrá, entonces, seleccionar una alternativa entre dos posibles: la primera, intentar buscar otro camino que lo guíe a la solución correcta superando así su error; la segunda, insistir en el error que lo llevará al fracaso. Para superarlo, el docente debe diseñar situaciones didácticas que conduzcan al estudiante a sustituir conocimientos errados por conocimientos verdaderos, identificando, clasificando y conociendo la naturaleza de los errores. En geometría se ha escrito poco con relación a sus tipos de errores, y por ello, el objetivo de esta investigación es proponer una tipología de los mismos en esta área que permita identificar y clasificar los errores de los alumnos. Para la propuesta se consideraron: la Teoría de las Situaciones Didácticas, tipologías de errores en otras áreas, la experiencia de las investigadoras y un estudio exploratorio realizado durante dos semestres con alumnos de Geometría de la Facultad de Ingeniería de LUZ. Como resultado, se obtuvo una tipología formada por 8 categorías. Se recomendó utilizarla como herramienta que ayude a seleccionar estrategias adecuadas para superar errores en alumnos en esta área.

Palabras clave: error, tipología, geometría.

Abstract

TIPOLOGY OF ERRORS IN FLAT GEOMETRY

A error is an opportunity for learning that allows the student to make a decision when they notice that they did not get the right solution to the problem. The student may then choose another alternative among two possibilities: first, he or she can look for another way that will take them to the correct solution, overcoming the original error; or, second, persisting with the error that will lead him or her to failure. In order to overcome this, the teacher must design didactical situations that can lead the student to substitute wrong knowledge with right knowledge, through identifying, classifying and knowing the nature of the errors. Not much has been written in geometry in relation to this kind of errors, this is why the objective of this research is to propose a typology of errors for this area which would allow the identification and classification of errors made by students. For this proposal the following aspects were taken into account: Theory of Didactical Situations, typologies of errors from other areas, the researchers experiences and an exploratory study undertaken during two semesters with Geometry students from the Faculty of Engineering in LUZ; from this study, an 8-category typology was obtained. It was recommended that the teacher use this typology as a tool that could help in the selection of appropriate strategies to overcome geometry-related errors in the student's work.



Fase 3.- Diseño de la tipología de errores para Geometría

En esta fase se tomaron en cuenta los resultados obtenidos en la fase anterior para diseñar una tipología específica en el área de Geometría que considerara las categorías en las cuales se ubicaron los errores encontrados en el estudio, y se agregaran aquellas que permitieran clasificar los errores no ubicados. Es por ello, que algunas categorías están relacionadas con las de las tipologías estudiadas e incluso, abarcan mayor cantidad de errores. Estas son las categorías: errores de pre-requisitos, errores propios de lenguaje, errores de razonamiento, errores de técnica y de tecnología. Las categorías novedosas son: errores gráficos, los errores de transferencia y los azarosos. A continuación se explica en qué consiste cada categoría de la tipología propuesta.

1. Errores de pre-requisitos

La mayoría de los docentes coincide en que los estudiantes que ingresan a los cursos del primer semestre de la facultad, y por ende a los cursos de geometría, incurrir en errores relacionados con el álgebra elemental, por ello se incluyó esta categoría dentro de la tipología. Los errores de pre-requisitos se deben a un aprendizaje deficiente de hechos, habilidades y destrezas que el alumno debió adquirir antes de iniciar el estudio de la geometría. Se considera que están asociados específicamente a deficiencias en el aprendizaje de conceptos previos propios del bachillerato, como álgebra elemental y dibujo técnico. Se evidencian estos errores cuando el alumno utiliza inadecuadamente las notaciones del álgebra, de los conjuntos, etc.; cuando ejecuta mal operaciones que involucran: potencias, raíces, simplificaciones, productos notables, solución de ecuaciones lineales, cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales, valores absolutos, etc. y cuando utiliza inadecuadamente los instrumentos de dibujo.

Considérese, por ejemplo, un alumno que al resolver un problema relacionado con el Teorema del Cateto para triángulos rectángulos, llegó al siguiente resultado:

$x = \sqrt{32 + 32\sqrt{5}}$, cuando comparó con la respuesta del libro, se encontró con la respuesta: $x = 4\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$. El alumno estaba seguro de haber ejecutado todos los pasos previos de manera correcta, por ello decidió realizar algunas simplificaciones adicionales. He aquí el trabajo que realizó:

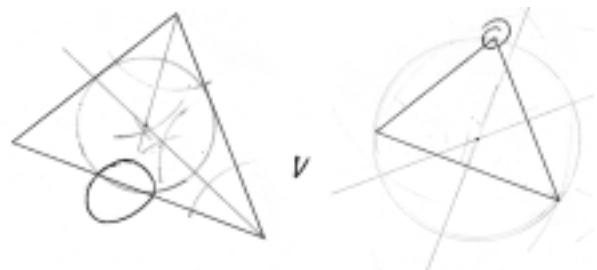
$$x = \sqrt{32 + 32\sqrt{5}} = 4\sqrt{2 + 32\sqrt{5}}$$

En general, los errores encontrados relacionados con el álgebra elemental se agruparon en las siguientes subcategorías:

- No manejan la definición de valor absoluto.
- Presentan dificultad para hallar el factor común entre dos términos de una expresión algebraica.
- No logran despejar una variable en una ecuación dada.
- Desconocen las propiedades de las raíces.
- Escriben ecuaciones con ausencia del signo de igualdad.
- Desconocen algunas de las propiedades de los números reales.

En cuanto al dibujo técnico, se evidenció en algunos alumnos que aun cuando utilizan el camino correcto para trazar figuras geométricas, lo hacen en forma defectuosa, por ejemplo para determinar el incentro y el circuncentro de un triángulo, trazan, en el primer caso, las bisectrices y, en el segundo, las mediatrices. Pero la falta de cuidado con el uso del compás, aunado a la utilización de minas gruesas para el trazado de pequeños arcos, los conduce a acumular errores obteniendo circunferencias inscritas en un triángulo que resultan no ser tangentes a todos sus lados, o circunscritas que no pasan por todos sus vértices. Obsérvese la siguiente ilustración.

Ilustración 1



2. Errores propios del lenguaje geométrico

La mayoría de las tipologías de errores presentadas anteriormente coinciden en que el lenguaje matemático por sí mismo es una fuente de errores debido a su complejidad. Lo cual coincide con la experiencia que han tenido las investigadoras en la asignatura Geometría, como docentes y coordinadoras de la cátedra. El docente en muchas oportunidades se encuentra frente a estudiantes que, en mayor o menor grado, tienen dificultades para expresarse adecuadamente utilizando el lenguaje geométrico. Por ello se consideró que era importante trabajar con esta categoría de errores en la tipología.

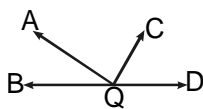
Estos errores están asociados con el uso e interpretación incorrecta del lenguaje geométrico, se derivan de las dificultades que tienen los estudiantes para interpretar el lenguaje geométrico y para utilizar los símbolos y notaciones, debido probablemente a que en él se producen conflictos con el lenguaje de uso cotidiano, a la precisión que se requiere en el uso del lenguaje matemático o simplemente a que no estudian lo suficiente.

Se consideró que los errores del lenguaje geométrico se refieren a los que se derivan, exclusivamente, de la expresión oral y escrita de la terminología y notaciones propias de la geometría y de su interpretación. Estos errores se hacen evidentes cuando el estudiante utiliza inadecuadamente las notaciones de las figuras y elementos geométricos, demuestra o intenta demostrar una proposición geométrica que no se le pide, da una respuesta distinta o adicional a la que se le pide en un problema geométrico, cuando plantea una ecuación o proposición en discordancia con el enunciado de un problema geométrico dado y cuando utiliza inadecuadamente la terminología geométrica o describe defectuosamente la construcción de figuras geométricas.

A continuación presentamos los siguientes ejemplos:

1. Algunos estudiantes se refieren a las rectas perpendiculares como paralelas, se confunden las notaciones de puntos, segmentos, rectas y rayos, presentan serias dificultades para referirse a los distintos tipos de ángulos que se manejan a lo largo del curso, etc. En particular, un alumno utilizó “ $\angle Q$ ” para referirse a uno de los ángulos de la figura 1, que se forman cuando concurren varias rectas en un punto.

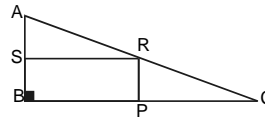
Figura 1



2. **Problema planteado:** Probar que los puntos medios de los lados de un rectángulo son vértices de un rombo.

Trabajo del alumno: De acuerdo con la figura 2, el alumno establece como hipótesis que el DABC es rectángulo y como tesis que el cuadrilátero SRPB es rombo, donde S, R y P son los puntos medios de los lados del triángulo \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente.

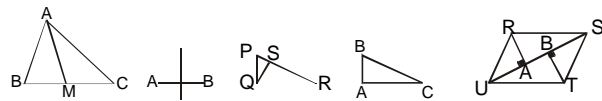
Figura 2



Es claro que en este caso el alumno interpreta el término “rectángulo” como “triángulo rectángulo”.

3. *Cambian o sustituyen los términos* (figura 3): en referencia al primer dibujo, un alumno escribió: “Trazamos la mediatriz del lado \overline{AB} del DABC”; en relación con el segundo dibujo, otro indicó: “La bisectriz de ...”; apoyándose en el tercero, uno más afirmó: “El $\angle PQR$ es rectángulo”; refiriéndose al cuarto dibujo, otro alumno señaló: “El DBAC es complementario”; y a propósito del quinto dibujo, un último alumno expresó: “El DRAU es recto”.

Figura 3



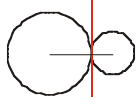
3. Errores gráficos

Una actividad necesaria en la solución de un problema geométrico es trazar un dibujo que represente la situación planteada en él, por ello se ha considerado de extrema importancia trabajar con una categoría de errores específicamente relacionada con los gráficos. El trazado incorrecto de figuras geométricas a partir de un enunciado dado, se corresponde con la mala interpretación de este enunciado, y por ello está estrechamente vinculado con los errores propios del lenguaje geométrico. Se reservó esta categoría de errores para todos los casos en que sea necesario, tanto trazar figuras y lugares geométricos, como interpretarlas.

Estos errores están asociados con la falta de habilidad para imaginar, trazar e interpretar figuras geométricas. Se entenderá que un estudiante incurre en este tipo de errores cuando dibuja una figura geométrica que no se corresponde con el enunciado de un problema geométrico propuesto, no dibuja una figura geométrica a propósito de un problema geométrico propuesto, cuando toma mal un dato de una figura geométrica o lo ignora en la solución o demostración de un problema geométrico.

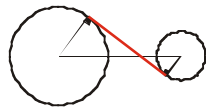
1. Considérese el siguiente ejemplo: en un curso de geometría, se propuso el siguiente problema a un grupo de estudiantes: “se tienen dos circunferencias de radios conocidos diferentes y la longitud de un segmento de tangente común interna, se pide determinar la distancia entre sus centros”.

Figura 4



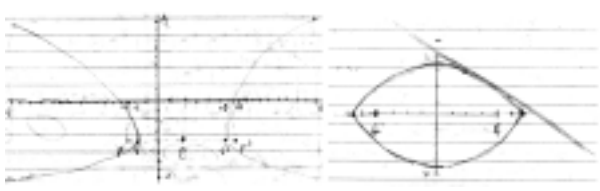
2. Obsérvese un ejemplo de error gráfico cometido por un alumno en la representación que hace de este problema. El alumno supone que las circunferencias son tangentes y lo único que logra hacer es trazar la tangente común a ambas circunferencias, lo que no le permite resolver el problema. Un dibujo correcto podría ser el siguiente:

Figura 5



Algunos trazados de lugares geométricos realizados por los alumnos aparecen en la ilustración 2, en la que puede observarse a la izquierda una hipérbola que no tiene asíntotas, ni simetría con respecto al eje focal, y a la derecha una elipse dibujada con “picos”:

Ilustración 2



4. Errores de razonamiento

La mayoría de las tipologías analizadas mencionadas incluyen una categoría relacionada con el razonamiento. La aplicación del razonamiento lógico es fundamental en esta asignatura, hace énfasis en la demostración de teoremas y otras proposiciones geométricas por parte del estudiante. Por ello es usual que en el trabajo de los estudiantes aparezcan errores de este tipo. De modo que una tipología que pretenda reseñar los errores que se presentaron en la Geometría, estaría incompleta si no considera este tipo de errores.

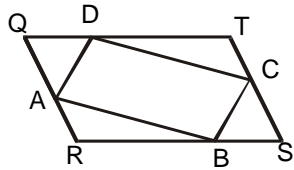
Para esta categoría se consideraron los errores que se derivan del mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, lo cual conlleva el manejo errado de los axiomas, teoremas, corolarios y definiciones geométricas. Este tipo de errores podría deberse a la forma

en que el estudiante está acostumbrado a aplicar el razonamiento cotidiano, el cual difiere del razonamiento lógico requerido en el área de Geometría. Se manifiestan cuando el alumno añade hipótesis que no están dadas en la solución o en la demostración de un problema geométrico, intenta demostrar o resolver un problema geométrico sin utilizar algún dato dado, usa un axioma, teorema o corolario sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación o lo usa en un contexto que no le corresponde, interpreta y usa inadecuadamente una definición, usa el recíproco de una implicación como verdadera cuando construye y usa una implicación que no es verdadera.

Algunos ejemplos del tipo de error 12: *Añade hipótesis que no están dadas en la solución o en la demostración de un problema geométrico*, se presentan a continuación.

1. Problema planteado: En la figura 5, QRST es un paralelogramo y $AQ=SC$ y $DT=RB$. Probar que ABCD es un paralelogramo.

Figura 5

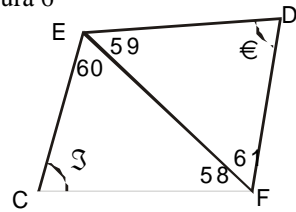


Trabajo del alumno:

“Tenemos que: $AD//BC$ y $AB//DC...$ ”

2. Problema planteado: En relación con la figura 6, determine cuál de los cinco segmentos es el mayor. Justifique su respuesta.

Figura 6



Trabajo del alumno: El alumno determina correctamente los valores de los ángulos g y b ($g=62$ y $b=60$), y posteriormente afirma: “El segmento es el mayor de todos porque a mayor ángulo se opone mayor lado”. El teorema que el alumno intenta utilizar afirma que “en un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado y recíprocamente”. El error consiste en que obvia la parte que dice “en un triángulo”, usando en consecuencia, que en la figura el ángulo mayor es g para buscar el lado que se opone, lo que le permite afirmar que es el mayor de los segmentos de la misma. La respuesta correcta a este problema sería: el segmento DE es el mayor de todos, pues el lado DE es el mayor en el $\triangle DCFE$, porque se opone a g ,

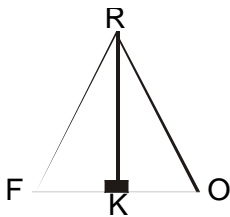
que es el ángulo mayor. Pero, como el segmento es común para los DCFE y DFED y el lado se opone al ángulo EFD, entonces es el mayor segmento, ya que $b=60 < m(-EFD)=61$.

Este tipo de error está asociado, según Bohórquez (2002), al obstáculo de la simplificación.

Para el tipo de error 15: *Interpreta y usa inadecuadamente las definiciones*, se encontraron expresiones tales como: “Como el punto satisface la ecuación quiere decir que está sobre la recta del centro en el punto medio”. “La mediana de un triángulo es el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados”.

En referencia a la figura 7, “La altura es perpendicular a la hipotenusa”

Figura 7

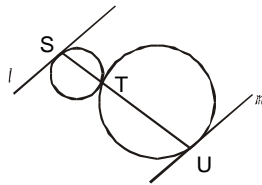


El error está presente porque el triángulo con el que está trabajando el alumno no es un triángulo rectángulo, sino un triángulo isósceles.

Revisando el tipo de error 16: *Usa el recíproco de una implicación como verdadera*, se observaron los siguientes errores.

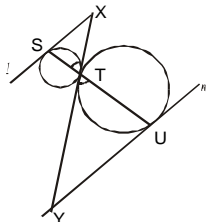
Problema planteado: Las circunferencias de la figura 8 son tangentes en T, contiene a T. Las rectas l y m son tangentes en S y U, respectivamente. Pruebe que son paralelas.

Figura 8



Trabajo del alumno: El alumno traza la tangente común a ambas circunferencias y resulta la siguiente figura.

Figura 9



Este alumno demuestra de manera correcta que $DXST \sim DYUT$, como sus lados son proporcionales establece que: $\frac{XS}{YU} = \frac{ST}{UT} = \frac{XT}{YT}$

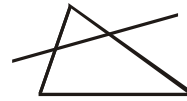
y termina diciendo que “l//m” porque si los segmentos son proporcionales entonces las dos rectas son paralelas”.

En clase se ha demostrado el teorema siguiente: “si una recta es paralela a un lado de un triángulo y corta, en puntos distintos, a los otros dos lados o a sus prolongaciones, entonces determina segmentos proporcionales a dichos lados”. El recíproco de este teorema no es verdadero y es lo que este alumno está usando. Nótese que después de demostrar que estos dos triángulos son semejantes, se podía probar que las rectas l y m son paralelas porque dichas rectas al ser cortadas por la tangente, que contiene al segmento, forman ángulos alternos internos congruentes.

Al estudiar el tipo de error 17: *Construye y usa una implicación que no es verdadera*, se observaron los siguientes casos:

“Como el DABC es isósceles fi sus puntos medios son iguales”. Los puntos medios no pueden ser iguales, lo que puede ocurrir es que se tengan segmentos o ángulos congruentes.

“Toda recta que pasa por el punto medio de un lado de un triángulo es paralela a uno de sus lados y corta al tercer lado en su punto medio”. Esta implicación no es cierta, basta observar la siguiente figura:



5. Errores de transferencia

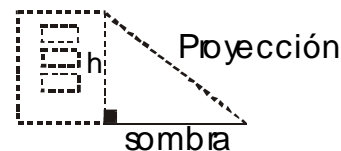
La transferencia es una competencia que debe desarrollar el futuro ingeniero, por ello, debe empezar desde los primeros semestres a integrar sus conocimientos y representar los problemas de la vida cotidiana en términos matemáticos y geométricos a fin de poder darles solución.

Los errores de transferencia se deben a la falta de habilidad que tiene el estudiante para utilizar conocimientos adquiridos en otras asignaturas o en la asignatura objeto de estudio para resolver situaciones problemáticas reales. Se presentan, cuando el estudiante transforma defectuosamente una situación problemática real en un problema geométrico, o cuando aplica defectuosamente conocimientos propios de otras asignaturas o disciplinas en un problema geométrico planteado.

Problema planteado: ¿Cómo mediría usted la altura de un edificio, si solo tiene como datos la longitud de la sombra que el edificio proyecta sobre el piso, su estatura y la longitud de la proyección de su persona sobre el piso?

Trabajo del alumno:

Figura 10



El alumno trazó para el análisis del problema dado un dibujo como el que se muestra en la Figura 10. Como puede observarse, considera que “sombra” y “proyección” son dos objetos y datos diferentes, constitutivo el primero de un cateto y el segundo de la hipotenusa del triángulo rectángulo dibujado, convicción que lo lleva a que basta aplicar el teorema de Pitágoras para resolver el problema, ignorando por lo tanto los otros datos (altura y sombra de la persona), evidentemente necesarios.

6. Errores de técnica

La mayoría de las tipologías consideran de una u otra forma los errores que ocurren en la ejecución de un procedimiento seleccionado por el alumno, se refieren a ellos como errores de procedimiento. Para esta tipología se adoptó el término propuesto en la tipología de Brousseau, por considerar que refleja de manera apropiada lo que se pretende explicar con esta categoría. Estos errores surgen por la aplicación incorrecta o inadecuada de procedimientos o algoritmos en la solución de problemas geométricos o en la demostración de proposiciones geométricas. Se puede identificar este tipo de errores cuando el estudiante utiliza un algoritmo correcto en la solución de un problema geométrico pero lo aplica en forma defectuosa, enuncia proposiciones ciertas sin justificación o mal justificadas o cuando utiliza un algoritmo adecuado para la solución o demostración de un problema geométrico pero no llega a su solución.

Se presentan algunos errores que ilustran el tipo de error 20: *Utiliza un algoritmo adecuado en la solución de un problema geométrico pero lo aplica en forma defectuosa.*

Problema planteado: Reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria: .

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$$

Trabajo del alumno:

$$4(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 4y) = -64$$

$$4(x + 4)^2 - 9(y - 2)^2 = -64 + 16 + 4$$

Nótese que el alumno escoge el procedimiento adecuado al completar cuadrados pero lo hace defectuosamente al no tomar en cuenta los factores 4 y -9 de los términos a la izquierda de la igualdad.

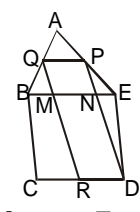
La forma correcta sería:

$$4(x + 4)^2 - 9(y - 2)^2 = -64 + 64 + 36$$

El tipo de error 21: *Enuncia proposiciones ciertas sin justificación o mal justificadas en la demostración de un problema Geométrico*, puede verse reflejado claramente en los ejemplos que enseguida se muestran.

Problema planteado: En la Figura 11, $ED \parallel BC$. BC , P , Q , y R son puntos medios de AE , AB y CD . Probar que $PD \parallel QR$.

Figura 11



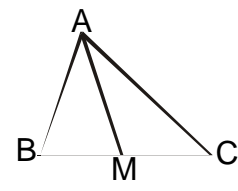
Trabajo del alumno: En uno de los pasos de la demostración, escribió: “por teorema de punto medio”.

No existe un teorema con tal nombre. El alumno se refiere al teorema que afirma que “el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad”; es esta la justificación que debió utilizar.

En relación con el tipo de error 22: *Utiliza un algoritmo adecuado para la solución de un problema geométrico pero no llega a su solución*, se muestra a continuación un ejemplo representativo.

Problema planteado: En la figura 12, sea una mediana del DABC. Probar que .

Figura 12



Trabajo del alumno:

1. “ $BM=MC$ por M el punto medio del segmento
2. Duplico la mediana: D es un punto de la prolongación de , $AM=DM$.
3. $AD=AM+MD$ por suma de segmentos”
4. En efecto, esta proposición puede demostrarse utilizando como recurso la duplicación de la mediana, pero el alumno no concluye el trabajo.

7. Errores de tecnología

Sólo Brousseau incluye este tipo de errores, junto con los errores de técnica en su tipología de errores asociados con la actividad matemática, los cuales son apropiados para denominar los errores en los cuales incurren los alumnos cuando trabajan utilizando un procedimiento inadecuado en la solución de un problema geométrico.

Se consideran errores de tecnología, aquellos que se producen cuando el alumno selecciona un algoritmo inadecuado para resolver un problema geométrico o usa una estrategia inadecuada para realizar una demostración geométrica. Algunos ejemplos generales de errores de tecnología ocurren cuando a propósito de un problema geométrico donde se solicita determinar una medida

geométrica, la ecuación de un lugar geométrico, las coordenadas de un punto, etc., el estudiante selecciona un procedimiento, algoritmo o ecuación en forma incorrecta. En una demostración geométrica pueden cometerse errores de este tipo cuando se violentan las reglas. Se sabe que la demostración de una proposición geométrica está basada en el razonamiento deductivo y la aplicación de las reglas de la lógica. Se dispone de dos métodos para realizar una demostración, el directo y el de reducción al absurdo.

De modo que algunos ejemplos generales podrían ser: partir de la tesis para realizar la demostración por el método directo, partir de la negación de la hipótesis para demostrar por reducción al absurdo, partir de la hipótesis en el método directo pero utilizando en el camino un teorema que no pertenece al conjunto de teoremas válidos para el curso, partir de la hipótesis pero los pasos desarrollados no resultan de una relación coherente producto del razonamiento deductivo. Evidentemente, estos errores son distintos a los considerados con anterioridad, por lo que ninguno de ellos podría ser considerado como una estrategia buena pero mal aplicada (error 20) o aplicar una estrategia de manera correcta pero que no conduce a la demostración solicitada (error 22).

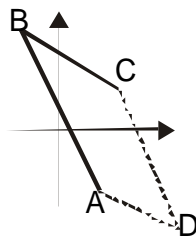
Se presentan a continuación tres problemas característicos del tipo de error 23: *Usa un algoritmo inadecuado para resolver un problema.*

Problema planteado: Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son A(2,-3), B(-2,5) y C(3,2). Determinar las coordenadas del cuarto vértice y hallar su área.

Trabajo del alumno: Determina correctamente la ecuación de la recta

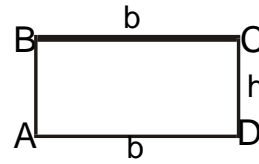
(llama D al cuarto vértice del paralelogramo), pero para hallar las coordenadas del punto D (figura 13), determina la ecuación de la recta, asegurando que tiene la misma pendiente de la diagonal.

Figura 13



5. Vuelve a incurrir, en el mismo tipo de error (de tecnología) cuando, para determinar el área del paralelogramo, plantea: $\text{Area} = b \cdot h = AB \cdot AD$, es decir, utiliza la fórmula del área del rectángulo para aplicársela al paralelogramo, y dibuja el gráfico siguiente:

Figura 14



Problema planteado: Se pide hallar la ecuación de una parábola de eje paralelo al eje x y que pasa por tres puntos dados.

Trabajo del alumno:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(El alumno escoge la ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje y).

Trabajo de otro alumno:

$$\frac{(x - \Phi h)^2}{a^2} + \frac{(y - \Phi k)^2}{b^2} = 1$$

(El alumno escoge la ecuación de una elipse).

La ecuación correcta es:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

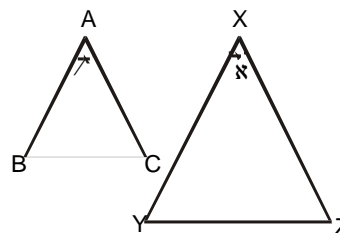
ambos alumnos seleccionaron una ecuación que no es adecuada para resolver el problema, siendo más grave el caso del segundo alumno quien plantea la ecuación de una elipse para resolver un problema de parábola.

Para ilustrar el tipo de error 24: *Usa una estrategia inadecuada para demostrar una proposición geométrica*, es necesario mostrar en algunos casos la totalidad del trabajo del alumno frente a la demostración de un teorema.

Proposición planteada: Demostrar que dos triángulos isósceles son semejantes si y solo si los ángulos opuestos a los lados desiguales son congruentes.

Trabajo del alumno: El alumno demuestra de forma correcta el directo de este teorema, donde había establecido (Figura 15) que “fi) Hipótesis: $a = q$, $AB = AC$, $XY = YZ$, Tesis: $DABC \sim DXYZ$ ”

Figura 15



Lo que se muestra a continuación es el desarrollo de la demostración del recíproco.

“Demostración: Si “DABC no es semejante a DXYZ, entonces no existiera proporcionalidad entre sus lados y sus ángulos no fueran congruentes, esto implica que $a \sim q$ ya que no hay correspondencia, esto es absurdo porque contradice la hipótesis ya que $DABC \sim DXYZ$, lo que implica que $a \sim q$ por correspondencia entre triángulos semejantes $lqqd$ ”.

En este caso, el alumno intenta utilizar el método de reducción al absurdo. Comienza por establecer mal, tanto la hipótesis como la tesis, pues por hipótesis se tiene que los triángulos ABC y XYZ son isósceles y semejantes y lo que se debe demostrar es que tienen congruentes el ángulo opuesto a la base. Esto lo lleva al error de partir de la negación de la presunta tesis, que en realidad es la

hipótesis, para llegar a una contradicción con la presunta hipótesis, que en realidad es la tesis.

8. Errores azarosos

Estos errores tienen menor importancia, pues surgen a consecuencia de un descuido o por efectos del azar. Se pueden detectar cuando el alumno transcribe mal una cantidad o símbolo o sustituye mal un dato en una ecuación dada, manipula inadecuadamente los signos algebraicos o cuando ejecuta mal operaciones aritméticas.

Finalmente, y luego de exponer detalladamente cada una de las categorías que conforman la tipología propuesta, se tienen en el cuadro siguiente, ubicados en sus respectivas categorías, los 27 tipos de errores evidenciados en la investigación.

Clasificación de los tipos de errores encontrados en la Tipología Propuesta.	
Categoría	Tipo de error
Errores de Pre-requisitos	1,2
Errores Propios del lenguaje Geométrico	3, 4, 5, 6, 7
Errores Gráficos	8, 9, 10, 11
Errores De razonamiento	12, 13, 14, 15, 16, 17
Errores de transferencia	18, 19
Errores de técnica	20, 21, 22
Errores de tecnología	23, 24
Errores Azarosos	25, 26, 27

Conclusiones

En esta investigación se llegó a las siguientes conclusiones:

1. Durante el período de observación se registraron 27 tipos de errores distintos en el área de Geometría.

2. Al aplicar las tipologías analizadas para clasificar los errores encontrados se halló que:

-En la tipología de Brousseau no fue posible ubicar ninguno de los errores relativos a pre-requisitos, a gráficos, razonamiento transferencia y algunos de lenguaje geométrico. Sin embargo, se clasificaron los de técnica, tecnología, azarosos y algunos de los errores relacionados con el lenguaje geométrico y transferencia. En todas las categorías de esta tipología se registraron errores.

-En la tipología de Socas fue posible ubicar algunos errores de pre-requisitos, técnica y azarosos. Mientras que los de lenguaje, gráficos, razonamiento, transferencia y tecnología no fueron clasificados. Para esta tipología no se registraron errores que correspondieran con las categorías: “errores que tienen su origen en un obstáculo” y “errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas”.

-En relación con la tipología de Movshovitz et al. no se ubicaron errores relativos al uso de la transferencia, de técnica y tecnología y algunos relacionados con los de pre-requisitos básicos de la geometría y los gráficos. Sin embargo, se clasificaron los errores derivados del lenguaje geométrico, algunos relativos al uso e interpretación de gráficos, del razonamiento y del azar. Ningún error correspondió a la categoría “errores debidos a la falta de verificación en la solución”.

-Los errores de transferencia, azarosos, razonamiento, no fueron ubicados en ninguna de las categorías de la tipología de Radatz. No obstante, se clasificaron todos los relativos a pre-requisitos, lenguaje, técnica y tecnología y algunos gráficos. No se registraron errores para todas las categorías: “errores debidos a la rigidez del pensamiento” y “errores debidos a la aplicación de reglas y estrategias irrelevantes”.

-Finalmente, en la tipología de Astolfi se encontró que sólo se ubicaron los errores de pre-requisitos y los de transferencia relacionados con la aplicación de otras disciplinas en la solución de problemas geométricos. Quedando las categorías de: “errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas”, errores que provienen de los hábitos escolares o de una

mala interpretación de las expectativas”, “los errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos”, “errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas”, “errores debidos a los procesos adoptados”, “errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad” y “errores causados por la complejidad del contenido” no relacionadas con ninguno de los errores registrados.

3. En cuanto al diseño de una nueva tipología de errores en el área de Geometría, se tiene que:

-Para clasificar la totalidad de los errores evidenciados durante el estudio se propuso una nueva tipología de errores conformada por ocho categorías: Errores de pre-requisitos, errores propios del lenguaje geométrico, errores gráficos, errores de razonamiento, errores de transferencia, errores de técnica, errores de tecnología y errores azarosos.

-Para el diseño de la tipología propuesta, se tomaron de las tipologías estudiadas las categorías: errores de pre-

requisitos, errores propios de lenguaje, errores de razonamiento, errores de técnica y de tecnología. Las nuevas categorías son: errores gráficos, errores de transferencia y errores azarosos.

Recomendaciones

Finalizado este estudio se recomienda:

Suministrar la tipología diseñada a los docentes de la cátedra de Geometría, para identificar, clasificar y cuantificar los errores de sus alumnos, lo que permitirá seleccionar las estrategias adecuadas para el trabajo en el aula y además, utilizar la tipología diseñada en esta investigación en otras áreas de la Matemática con el objeto de determinar si la misma se adapta a sus errores propios o en caso contrario, adaptarla a sus características particulares. (E)

Bibliografía

- Astolfi, J. (1999). *El error un medio para enseñar*. España. DIADA Editora SL. 1ra Edición.
- Bohórquez, H. (2002). *Obstáculos epistemológicos en geometría a nivel superior*. Maracaibo. La Universidad del Zulia. Trabajo especial de grado.
- Borasi, R. (1987). *Exploring mathematics trough the analysis of errors. For the learning of Mathematics*. 7(3), pp.2-8.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*. Editado y traducido por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. Gran Bretaña. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2001). *Les erreurs des élèves en mathématiques*. Traducido por Brigitte Bernard. Artículo no publicado.
- Espinosa, R. (2000). *Un tratamiento del error en que incurre el estudiante en su trabajo de matemáticas*. Una empresa docente, disponible en: <http://157.253.25.2/servidor/ued/revistaema/vol1num1/A1FF3.html>.
- Gómez, P. (1993). *La escuela francesa de la educación matemática*. Una Empresa Docente, disponible en: [http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/resúmenes/balacheff\(90\)/balacheff\(90\).html](http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/resúmenes/balacheff(90)/balacheff(90).html)
- López, A. (1996). *Investigación y conocimiento*. Venezuela: Publicaciones CED.
- Pessoa, A. (1997). *Cambios didácticos como consecuencia de las innovaciones curriculares*. En UNESCO (Ed.). Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe. Boletín No. 44. Santiago. pp.7-15.
- Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* en Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Ed). Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación. Historia. Bogotá. Una empresa docente. pp. 69-108.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*. En Rico, L. Dir., Castro E., Coriat, M., Martín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Ed.). La Educación Matemática en la Secundaria.: ice-Horsori. pp 125-



Para todo hay escuelas en Europa, y para muchas cosas escuelas en América; en ninguna parte se oye hablar de Escuela Social.

*Sociedades Americanas en 1828 – O. C., I, 341.
Ideario Pedagógico de Don Simón Rodríguez*