LA IDEALIDAD DEL ESPACIO EN KANT Y LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Gilberto Castrejón*

Resumen

En este trabajo, al resaltar el rol de la intuición en la concepción kantiana de la matemática (la cual considera que esta ciencia procede por construcción de conceptos, a partir de una intuición pura), a la vez de desarrollar la teoría sobre la idealidad del espacio —presente en la Crítica de la Razón Pura, que va de la Exposición Metafísica a la Exposición Trascendental, y a diferencia de lo dicho por críticos como Hans Reichenbach y otros—, se muestra que la teoría de la idealidad del espacio no depende del carácter sintético a priori de los juicios de la geometría, y es independiente de ésta, toda vez que la geometría euclidiana es sólo un ejemplo de una ciencia que posee dichos juicios. Esto último nos conducirá a concluir que la teoría de la idealidad del espacio no necesariamente queda refutada a la luz de las geometrías no euclidianas, y en el contexto de la teoría de la relatividad, por lo que dicha teoría, en un cierto sentido, no ha perdido vigencia con la llegada de las geometrías no euclidianas, y su aplicación al análisis del mundo físico, independientemente de que pueda implicar, por esta vía kantiana, que la teoría de la relatividad ha de ser “doblemente fenoménica”, y en atención a su vez del éxito empírico de ésta.

Palabras clave: Kant, espacio, intuición, geometría euclidiana, geometrías no euclidianas, relatividad.

* Gilberto Castrejón (gcastrejon@ipn.mx). Licenciado en Física y Matemáticas; Licenciado en Filosofía; Maestría en Ciencias en Metodología de la Ciencia; Candidato a Doctor en Filosofía de la Ciencia por la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Actualmente es Profesor-investigador en el Instituto Politécnico Nacional (IPN) de la Ciudad de México, Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas, Academia de Humanidades. Ha publicado cuentos en las antologías *Paso al frente* (Arco del Triunfo, 2004) y *Cuentario* (Editorial Resistencia, 2004); así como en las antologías de poesía *Nueva poesía Hispanoamericana. Poesía no dice nada, poesía se está callada, escuchando su propia voz* (Lord Byron ediciones, 2004); *Nueva poesía mexicana* (Lord Byron ediciones, 2006) y *Poesía Iberoamericana del siglo XXI* (Lord Byron ediciones, 2007). Es autor de los libros de ensayo *Erotismo y religión en Bataille* (Ediciones Quivira/UNAM, 2011) y *Estudios cruzados sobre Foucault* (Editorial Académica Española, 2012), así como del poemario *El acto de crear presencia* (Lord Byron ediciones, 2012). Algunos de sus artículos de investigación han aparecido en revistas de circulación internacional. Líneas de investigación: filosofía francesa contemporánea (Bataille, Foucault, Deleuze); filosofía e historia de la ciencia y la tecnología; filosofía de la física (Kant y la relatividad). Este trabajo ha sido también posible gracias al apoyo del CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología).

THE IDEALITY OF SPACE IN KANT AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES

Abstract

In this work, highlighting the role of intuition in the Kantian conception of mathematics (which believes that science proceeds by construction of concepts, from a pure intuition), while developing the theory of the ideality of space —present in the Critique of Pure Reason, which goes to the Metaphysical Expositions to Transcendental Expositions, unlike what was said by critics as Hans Reichenbach and other— is shown that the theory of the ideality of space depends on the character synthetic a priori judgments of geometry, and is independent of it, since Euclidean geometry is just one example of a science that has such judgments. This leads us to conclude that the theory of the ideality of space is not necessarily refuted in the light of non-Euclidean geometries, and in the context of the theory of relativity, so that theory, in a sense, not has become obsolete with the advent of non-Euclidean geometries, and its application to the analysis of the physical world, whatever that may mean, in this way Kant's theory of relativity has to be “twice phenomenal”, and in response to in turn this empirical success.

Key words: Kant, space, intuition, Euclidean geometry, non-Euclidean geometries, relativity.

La idealidad del espacio en Kant y las geometrías no euclidianas

Una ciencia de todos estos tipos posibles de espacio sería sin duda la más alta geometría que un entendimiento finito podría acometer.
Immanuel Kant *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*

Incluso pondría la tesis que se defenderá aquí de un modo más fuerte: ignórese la distinción entre lo analítico y lo sintético y no se estará equivocando en relación a ningún problema filosófico que no tenga que ver específicamente con esta distinción. Inténtese usarla como un arma de discusión filosófica, y se estará consistentemente equivocado.

Hilary Putnam *Lo analítico y lo sintético*

En términos generales, existe una visión bastante aceptada en el ámbito de la filosofía de la ciencia, tal que desde el marco del positivismo lógico, y después de éste, la filosofía kantiana del espacio ha sido “superada” por la teoría de la relatividad (Dorato 2002), sobre todo por la aplicación de las llamadas geometrías no euclidianas al análisis del mundo físico, posibilitando especulaciones como la de Einstein: “¿es válida la geometría euclidiana en el mundo físico o lo es otra geometría?” (Einstein 1926/2005). Con lo que, a su vez, plantea el problema de si la teoría de la relatividad resulta ser “doblemente fenoménica” (Parellada 2003). Así, muchas de las objeciones y críticas llevan a cabo una lectura de Kant tal que interpretan que la tesis sobre la idealidad del espacio, depende de la tesis de la a prioricidad de la geometría euclidiana (Russell 1976)¹, dando como resultado, a la luz de la física moderna, la tan recurrente visión de que las geometrías no euclidianas, al aplicarlas al análisis del mundo físico, y en el contexto de la teoría de la relatividad, refutan las concepciones de Kant (Reichenbach 1920, 1958). Así, en este trabajo, una vez tratada la teoría de la idealidad del espacio de Kant —en relación con el rol de la intuición, y sus concepciones sobre la geometría—, se llevará a cabo una revisión de sus ideas en el marco de las geometrías no euclidianas, con lo que, finalmente, se establecerán argumentos que muestren a su vez que, en ciertos aspectos, dichas geometrías y su aplicación al análisis del mundo físico, vía la teoría de la relatividad, no le restan vigencia a las concepciones kantianas sobre el espacio.

De una u otra forma, las críticas a la teoría kantiana del espacio y la geometría giran en torno a dos puntos fundamentales² (Marcucci 2004):

¹ En la misma línea de interpretación, y en un cierto sentido, un autor como Strawson considera que la teoría de la geometría en Kant está referida a los principios de la geometría euclidiana, y a la validez de estos principios, antes de establecer argumentos que demuestren la naturaleza *a priori* del espacio. Con lo que se puede llegar a interpretar, de nuevo, que la tesis de la a prioricidad del espacio depende de la tesis de la a prioricidad de la geometría.

² Varias, y muy sustanciosas son las críticas hechas a Kant de esta vía de su obra, desde sus primeros críticos como: F. H. Jacobi, K. L. Reinhold o S. Maimon, e incluso lo llevado a cabo por Norman Kemp Smith en su obra *A Commentary to Kant's Critique of Pure Reason*, a la vez de otros autores del siglo XX, tales como: J. Hintikka, H. J. Paton, P. F. Strawson, P. Guyer, etc.

(1) Están sustentadas en un cierto desconocimiento de los textos kantianos.³

(2) Llevan a cabo una interpretación tal que consideran que la tesis sobre la idealidad del espacio se deriva de la tesis de la aprioricidad de la geometría euclidiana.

En relación con el punto 2, autores como Bertrand Russell (Russell 1976), por ejemplo, llevaron a cabo una revisión de ciertas tesis kantianas, y éste como muchos otros, ha interpretado que Kant sustenta su idea de la intuición *a priori* del espacio sobre la base de que la geometría euclidiana sea válida (ver Horstmann 1973), lo que incide negativamente sobre la teoría de la idealidad del espacio, aunque precisamente, llevar a cabo tal interpretación de Kant, no sólo conduciría a un rechazo de sus concepciones sobre la geometría, a la luz de las geometrías no euclidianas, sino que conlleva a su vez a ciertas problemáticas de carácter lógico, ya que establece, por ejemplo, el problema de la lógica formal vs la geometría sintética (Parellada 2003)⁴.

Ahora bien, cabe señalar que, como lo establece Amit Hagar en un reciente artículo: “El debate sobre la filosofía de la geometría de Kant se centra en dos temáticas relacionadas. El primero concierne al rol de la intuición en Kant de acuerdo con el conocimiento matemático; el segundo —a los argumentos de Kant con respecto a este rol.”⁵ (Hagar 2008, p. 85) Así, en este último sentido es que quisiera comenzar revisando el rol de la intuición en Kant, en relación con la matemática. Ya que, a la luz de los hallazgos de las geometrías no euclidianas, es común la creencia de que las

³ Un hecho importante en relación con este punto se refiere a una obra temprana de Kant de 1747: *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*, ya que en ésta “Kant afirma sin términos medios que existen, o pueden existir, más espacios además del espacio en tres dimensiones, cuyo «fundamento», por otra parte, «es todavía desconocido».” (Marcucci 2004, p. 42)

⁴ Según Ricardo Parellada (2003), si Kant argumenta que todas las proposiciones de la geometría euclidiana son sintéticas *a priori*, es necesario referirse a la lógica analítica de Leibniz, por lo que habría que distinguir entre la necesidad analítica, lógica o conceptual; y la necesidad sintética, intuitiva o espacial. No es menester aquí revisar en detalle tal tesis, sólo habría que señalar que tal concepción radica en un error de interpretación, pues como lo han hecho saber autores como Amit Hagar (2008) y Michael Friedman (1992), entre otros, para Kant, la geometría euclidiana sólo es un ejemplo de una ciencia cuyos juicios son sintéticos *a priori*, y en cierto sentido, el carácter euclidiano del espacio sólo es una consecuencia del proyecto kantiano, por lo que podría identificarse, con ciertas reservas, que las geometrías no euclidianas son lógicamente imposibles para Kant.

⁵ “The debate on Kant’s philosophy of geometry focuses on two related but different issues. The first concerns the role of intuition in Kant’s account of mathematical knowledge; the second —Kant’s arguments for that role.” Todas las traducciones del inglés son mías.

concepciones de “intuición matemática”⁶, y la sinteticidad de los juicios en geometría, no se sostienen; considero así que resulta fundamental identificar el rol que Kant le confiere a la intuición en la “construcción matemática”.

Cabe señalar que para Kant: “Cualesquiera sean la manera y los medios por los que un conocimiento (Erkenntnis) se refiera a objetos (Gegenstände), aquella [manera] por la cual se refiere a ellos inmediatamente, y que todo pensar busca como medio, es la *intuición* (die Anschauung)” <A19>[B33]. Es decir: “Intuición es una especie de representación (*Vorstellung*) o, en el lenguaje de Descartes y Locke, idea. Teniendo intuiciones es una de las formas primarias en las cuales la mente puede relatar a o ser consciente de objetos.” (Parsons 1982, p. 14) Por lo que todo objeto de una intuición es “una forma directamente presente en la mente”, una forma de representación inmediata del objeto. Y de este modo: “La capacidad (receptividad) de recibir representaciones gracias a la manera como somos afectados por objetos, se llama sensibilidad (Sinnlichkeit). Por medio de la sensibilidad, entonces, nos son dados objetos, y sólo ella nos suministra *intuiciones*.” <A19>[B33] Kant menciona que la intuición corresponde a una representación dada a través de un *objeto singular*, el cual se presenta a la mente, por medio de la sensibilidad, y a su vez, toda experiencia es posible bajo condiciones que implican una referencia a la intuición.⁸ Si para Kant, como puede verse en la Doctrina Transcendental del Método⁹, la matemática es una ciencia que parte de una intuición y procede por construcción de conceptos, es factible identificar cómo la construcción de conceptos en matemáticas se lleva a cabo mediante “la exposición *a priori* de la intuición que le corresponde”, es decir:

⁶ Este concepto resulta sumamente contradictorio, pues no existe un consenso completo sobre lo que ha de entenderse por intuición en matemáticas, por ejemplo, a la luz de la filosofía kantiana, Alfredo Ferrarin afirma: “We need to take seriously Kant’s notion that mathematical construction is the understanding’s determination of sense: the intuition in which we construct mathematical objects is not just a means, an auxiliary ladder to throw away after using it, because it exhibits the objective validity of mathematical definitions in space and time. And the question of syntheticity in mathematics cannot be reduced to a discussion of its method or its demonstrative procedure: intuition accounts first of all for the synthetic genesis of concepts and judgments.” (Ferrarin 1995, p. 137) El autor considera así que la construcción matemática de un esquematismo y la exhibición *a priori* de un concepto en la intuición están íntimamente relacionados.

⁷ “Intuition is a species of representation (*Vorstellung*) or, in the language of Descartes and Locke, idea. Having intuitions is one of the primary ways in which the mind can relate to or be conscious of objects.”

⁸ De aquí que sea común identificar que Kant localiza primeramente en la sensibilidad, antes que en el entendimiento, la forma pura del conocimiento geométrico.

⁹ Cfr: “El conocimiento *filosófico* es el *conocimiento racional* por *conceptos*; el matemático [es el conocimiento] por *construcción* de los conceptos.” <A713>[B741]

Construir un concepto significa: exhibir *a priori* la intuición que le corresponde. Para la construcción de un concepto se requiere, pues, una intuición *no empírica*, que por consiguiente, como intuición, es un objeto *singular*; pero que sin embargo, como construcción de un concepto ([como construcción] de una representación universal) debe expresar, en la representación, validez universal con respecto a todas las intuiciones posibles que hayan de estar bajo ese concepto. <A713>[B741]

Si la matemática constituye un cuerpo de conocimientos necesarios, éstos han de configurarse, bajo aspectos fundamentales, independientemente de la experiencia, por tanto *a priori*; sin embargo, tal cuerpo de conocimientos no se encuentra excluido de apelar a una relación directa con las intuiciones, con las formas puras de la intuición sensible. Llegados aquí, el rol de la intuición es fundamental en la construcción de conceptos en matemáticas, y asimismo, las dos formas puras de la intuición sensible; por lo que espacio y tiempo juegan a su vez un papel fundamental en la construcción de un cuerpo de conocimientos como lo es la matemática.¹⁰ Finalmente, como menciona Michael Friedman: “Kant caracteriza el rol distintivo de nuestra intuición pura del espacio en geometría en términos de lo que él llama <construcción en intuición pura>, y él ilustra este rol con ejemplos de la construcción geométrica de los *Elementos* de Euclides.”¹¹ (Friedman 2009, p. 1) Habrá que señalar que Kant sólo presenta a la geometría euclidiana como un caso de una ciencia que construye un conocimiento a partir de una intuición pura, de una forma pura de la intuición sensible: el espacio, lo cual puede identificarse, por la línea de interpretación que hemos establecido, en la Exposición Trascendental.

Para nuestros intereses, en el caso de la geometría, el conjunto de sus conceptos tiene que ver con las propiedades y representaciones de la intuición pura del espacio, lo cual sólo ha de ser posible si, apoyándose en intuiciones, pueden ser formados juicios sintéticos *a priori*. Es decir, independientemente de todas las controversias que las concepciones de Kant sobre la geometría han despertado, la intuición espacial se encuentra en la base de todos los juicios de la geometría y, como puede llegar a verse: de cualquier geometría, y tiene un rol fundamental para la construcción de un cuerpo de conocimientos, de un sistema conceptual lógicamente consistente, acaso también en los sistemas conceptuales, de carácter analítico, de las geometrías no euclidianas.

Ahora bien, con respecto a la teoría de la idealidad del espacio en su relación con la geometría euclidiana, cabe señalar que el hecho de que Kant sostenga la idea de la

¹⁰ El tiempo en la aritmética, el espacio en la geometría.

¹¹ “Kant characterizes the distinctive role of our pure intuition of space in geometry in terms of what he calls “construction in pure intuition,” and he illustrates this role by examples of geometrical construction from Euclid’s *Elements*.”

aprioricidad sintética en geometría, no significa necesariamente que dicha tesis pueda explicar la posibilidad o no de otras geometrías, como ha sido interpretado por positivistas lógicos como Reichenbach. Así, como bien señala Henry Allison (1992): “La tesis de la idealidad trascendental es, en esencia, que los predicados espaciales están limitados a los «objetos de la sensibilidad», i.e., a los fenómenos, o, lo que es lo mismo, que estos predicados no son aplicables a las cosas «cuando se consideran en sí mismas mediante la razón, i.e., sin tener en cuenta la constitución de nuestra sensibilidad» <A28>[B44]” (Allison 1992, p. 173) En este sentido, la intuición *a priori* del espacio sólo es posible, si precisamente le presenta a la mente su propia forma de la sensibilidad¹², es decir, el contenido de las representaciones del espacio radica en las formas de la sensibilidad humana, de aquí que finalmente: el carácter *ontológico* del espacio se acerca más a la idea de la imposibilidad de asignar las propiedades espaciales a las cosas en sí, y por algo, está fuera de las representaciones de nuestra mente y de las formas propias de nuestra sensibilidad. Así que, identificando lo dicho en las Exposiciones Metafísica y Trascendental, muchas interpretaciones, como se mencionó al principio, se han centrado en suponer que la tesis de la aprioricidad sintética del espacio en Kant depende de la validez de la tesis de la a aprioricidad de la geometría euclidiana¹³, y dejan de lado el camino seguido por Kant, en cuanto a cómo va de la Exposición Metafísica a la Exposición Trascendental, tal que en ésta última se postula la aprioricidad de la geometría euclidiana, pero sólo como un ejemplo de una ciencia que establece una representación del espacio, y posee juicios sintéticos *a priori*.¹⁴

¹² Hay que aclarar que una vía de interpretación y crítica a Kant, en relación con éste y otros puntos, proviene de lo que ya Norman Kemp Smith señaló en su obra *A commentary to Kant's Critique of Pure Reason*, de manera que llega a considerar un carácter psicológico, en relación con la teoría kantiana de la idealidad del espacio.

¹³ De aquí que diversos autores se hayan dado a la tarea de revisar la epistemología kantiana de la geometría, pero dándole más peso al hecho de que Kant basó sus argumentos precisamente en la condición de a prioricidad de la geometría euclidiana, y cómo incluso sus tesis no se “sostienen” debido al surgimiento de las geometrías no euclidianas y su condición empírica en la construcción de sus proposiciones, lo que conlleva a revisar el concepto de *a priori*. Para un análisis sustancioso de la epistemología de la geometría puede consultarse el texto *Space, Time and Spacetime* de Lawrence Sklar, específicamente el capítulo II, donde el autor lleva a cabo un análisis amplio sobre distintas concepciones sobre la geometría, y su relación con teorías del espacio como las de Kant, además de las diversas críticas a las que ha sido sometida, desde su concepción de lo *a priori* constitutivo, como lo dicho por Helmholtz y Poincaré, y a su vez, a la luz de la física moderna.

¹⁴ Es importante separar entre geometría matemática y geometría física, en el sentido del tipo de cuestionamientos como el de Einstein, mencionado al principio, pues cabe señalar que si ha de aplicarse alguna geometría al análisis de los fenómenos físicos, ésta debe dar noción de la estructura espacial del mundo, lo cual nos lleva a tensar la separación entre geometría matemática y geometría física, la llegada de las geometrías no euclidianas, consideradas de carácter analítico, ha llevado a afirmar que la geometría del mundo no es la euclidiana, sin embargo, esto no invalida completamente las tesis kantianas sobre la geometría, puesto que Kant se refiere sólo a la geometría euclidiana, y ésta no precisa de tratamiento analítico. La geometría matemática trata de objetos matemáticos, la geometría física está referida a los fenómenos, por algo debe dar cuenta de una conexión entre los objetos matemáticos y los objetos de la experiencia.

Así, desde el párrafo 2 de la Estética Trascendental (§ 2. *Exposición metafísica de este concepto*) Kant nos dice: “El espacio es una representación *a priori* necesaria que sirve de fundamento de todas las intuiciones externas.” <A24> Es decir, el espacio resulta ser una intuición *a priori* que está en la base de todos los conceptos de espacio, y a su vez:

El espacio no es un concepto discursivo, o, como se suele decir, universal, de relaciones de las cosas | en general; sino una intuición pura. [...] Él es esencialmente único; lo múltiple en él, y por tanto, también el concepto universal de espacios en general, se basa simplemente en limitaciones. [...] El espacio es representado como una cantidad infinita dada. [...] Por tanto, la representación originaria de espacio es intuición *a priori*, y no concepto. <A24-25>/[B38-40]

Se establece de cierta manera, que el espacio, en cuanto intuición pura, puede dar lugar a un número específico de espacios que están circunscritos a Éste, espacios de *n* dimensiones o formas, incluyendo, según el caso¹⁵, aquéllos espacios curvos de las geometrías no euclidianas, de manera que: “Dichos espacios son, evidentemente, construcciones intelectuales; tienen en su origen una intuición espacial «única» y, podemos añadir, «infinita», la cual precisamente por serlo, es —como dice Kant— «a priori (no empírica)» y «está en la base de todos los conceptos de espacio».” (Marcucci 2004, p. 43-44) Así, como Kant llega a establecer en la Exposición Trascendental, la fuente de la unidad de los objetos espaciales de la geometría (euclidiana), se encuentra en la representación original del espacio, dada ya en la Exposición Metafísica, pues:

Kant concibe que la representación original del espacio descrita en la Exposición Metafísica es tanto para garantizar como para constreñir la producción de objetos geométricos elementales, tal que los axiomas de la geometría codifican y describen. [...]

Kant concluye la Exposición Trascendental mostrando que el sentido externo puede ser la fuente del conocimiento sintético y *a priori* sobre los objetos espaciales *solamente* sobre el presupuesto de la conclusión de la Exposición Metafísica, y también aceptando que el espacio es

¹⁵ Aquí me refiero específicamente al punto: (1) Están sustentadas en un cierto desconocimiento de los textos kantianos, especificado líneas arriba.

subjetivamente el suministro de la forma pura de la sensibilidad.¹⁶ (Shabel 2010, p. 106)

Por lo que, en cierto sentido fundamental, independientemente de que Kant se refiera sólo a la geometría euclidiana, y no haya hecho explícitamente la distinción entre geometría matemática y geometría física, sin pérdida de generalidad, y como se ha establecido: la intuición espacial está en la base de todas las geometrías; así, en atención a la teoría de la idealidad: el espacio es una condición subjetiva de representación de los objetos, pero no un rasgo objetivo ni determinación de éstos.¹⁷ Y además, la geometría euclidiana, la única a la que Kant se refiere, es fielmente una geometría intuitiva, y es a su vez la que nos permite hacernos una idea, suficientemente consistente, de lo que acontece en el mundo. “Todavía, la consistencia de las geometrías no euclidianas es solamente *relativa*: éstas son consistentes si la geometría euclidiana lo es. Pero ¿qué es lo seguro de la geometría euclidiana? Asumiendo su verdad, no hay alternativa más que apelar a su carácter sintético, de ahí a la intuición pura.”¹⁸ (Hagar 2008, p. 88) Por tanto, la llegada de las geometrías no euclidianas no representa ningún problema para las ideas de Kant sobre la geometría, además de a su teoría de la idealidad del espacio, pues puede verse que el dominio de la geometría euclidiana está restringido al mundo fenoménico, y en parte, el dominio de las geometrías no euclidianas, vía su aplicación al análisis del mundo físico, también, aunque habría que distinguir entre lo que Kant entiende como la forma pura de la sensibilidad externa: el espacio¹⁹, y lo que constituye el espacio omnicomprensivo, donde este último se refiere a aquél susceptible de <una posible experiencia>, y que se encuentra en el ámbito de lo que se entiende como espacio físico, el cual, aún y aunque sea o se conciba como no euclidiano, lo fenoménico está ya referido, pues existe una “referencia euclidiana” que permite comprender *objetivamente* los fenómenos y/o eventos.

¹⁶ “Kant conceives the original representation of space that is described in the Metaphysical Exposition both to warrant and constrain the production of the elemental geometric objects that the axioms of geometry codify and describe. [...] Kant concludes the Transcendental Exposition by showing that outer sense can be the source of synthetic and *a priori* cognition about spatial objects *only* upon presupposing the conclusion of the Metaphysical Exposition, and also accepting that space is the *subjectively* supplied pure form of sensibility.”

¹⁷ *Cfr.*: “El espacio no representa ninguna propiedad de cosas en sí, ni [las representa] a ellas en la relación que tienen entre ellas, es decir, [no representa] ninguna determinación de ellas que sea inherente a los objetos mismos, y que subsista aunque se haga abstracción de todas las condiciones subjetivas de la intuición.” <A26>/[B42]

¹⁸ “Yet, the consistency of non-Euclidean geometries is only *relative*: they are consistent if euclidean geometry is. But what secures Euclidean geometry? Assuming it is true, there is no alternative but to appeal to its synthetic character, hence pure intuition.”

¹⁹ *Cfr.*: “El espacio *a priori* «no es nada en sí», ni es un objeto (Objekt), sino que significa «aquél que es presupuesto por cualquier otro espacio relativo que yo puedo pensar como exterior al espacio que me es dado y que retrotraigo indefinidamente más allá de todo espacio que nos sea dado y al que comprende. (Ak., IV, 481, 23-37). Tomado de “estudio preliminar” a *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza*, de José Aleu Benítez, pag. XXV.

Para finalizar, resulta relevante hacer una compacta revisión sobre el carácter de las geometrías no euclidianas, en relación con las ideas de Kant, concluyendo con ciertos argumentos relacionados a su vez con la aplicación de las geometrías no euclidianas a la teoría de la relatividad.

Como Hagar (2008) también señala, habría que hacer notar que si existe una relación lógica entre diversas concepciones en la teoría kantiana del espacio, tal relación considera:

- El carácter metafísico del espacio.
- La posibilidad de una geometría sintética *a priori*.
- La naturaleza euclidiana de nuestras apariencias.

Lo que, por mucho, nos conduce a una pregunta fundamental: ¿cuál es la geometría que puede aplicarse a la interpretación del mundo físico? Así, Einstein consideró que si puede hablarse de una geometría física, en cuanto a su carácter verdadero, sólo puede ser decidido en base a la experiencia. Sin embargo, como puede verse, Kant no distinguió entre una geometría física y una geometría matemática, pura o formal, por lo que, en gran parte, resulta inadecuado a su vez, interpretar su tesis de la idealidad del espacio partiendo de la pretensión de que Kant basó dicha tesis en el carácter *a priori* de la geometría euclidiana, y a su vez, evaluarla con respecto al carácter de las geometrías no euclidianas, como lo han hecho diversos autores (puede verse Reichenbach (1925), Kemp Smith (1918), Guerrero (2005), entre otros).²⁰ En el caso de Reichenbach (1925, 1958) por ejemplo, éste lleva a cabo una lectura de Kant tal que concibe que:

- La teoría de la idealidad del espacio como forma pura de la intuición sensible está sustentada en el “carácter *a priori* de la geometría euclidiana”.
- Partiendo de lo anterior, la asunción del carácter *a priori* del espacio debe abandonarse a la luz del problema de la aplicación de la geometría euclidiana al análisis del mundo físico; y más todavía, debe abandonarse a partir también del surgimiento de las geometrías no euclidianas, concebidas como un cuerpo de conocimientos de carácter analítico.

De ahí que Reichenbach concluya que si falla la teoría de Kant de la geometría, esto llega a implicar que la aplicación de la geometría euclidiana al análisis del mundo físico también falla. Finalmente, todo esto nos debería conducir a aceptar que las ideas de Kant

²⁰ En contraposición con estas líneas de pensamiento, tanto Horstmann como incluso autores como Ted Humprey [“The Historical and Conceptual Relations between Kant’s Metaphysics of Space and Philosophy of Geometry”, *Journal of History of Philosophy*, 11(1973)] y Henry E. Allison (1983) consideran que la doctrina de la idealidad del espacio en Kant es lógica e históricamente independiente de sus concepciones sobre la geometría.

sobre la geometría y su teoría de idealidad del espacio deben abandonarse.²¹ Aunque: “Como siempre, esta clase de argumentación ignora el hecho que es menos concebible que, aunque los problemas enraizados sobre la cuestión de la aplicabilidad de la geometría euclidiana a la realidad puede sugerir la equivocación de la doctrina del carácter *a priori* del espacio y el tiempo, la razón no puede ser encontrada en una falla de la teoría kantiana de la geometría.” (Horstmann 1973, p. 19) Como ha podido verse, el espacio es una condición subjetiva de representación de los objetos, pero no un rasgo objetivo ni determinación de éstos.²² Si bien, con la llegada de las geometrías no euclidianas y su aplicación al análisis del mundo físico, no es posible afirmar categóricamente que la geometría euclidiana sea la propia del mundo físico²³, ésta, primordialmente, da cuenta del mundo fenoménico, como en cierto sentido las geometrías no euclidianas, es quizá seguro que éstas últimas en un sentido que yo llamaría “indirectamente empírico”.²⁴ Aun así, es el sujeto, independientemente de cuál geometría aplique al conocimiento del mundo, quien tiene noción de lo que un fenómeno le permite conocer.

Así, en relación con las geometrías no euclidianas²⁵, éstas mantienen en términos generales los cuatro primeros postulados de Euclides, y se construyen a partir de la negación del quinto postulado. Constituyen sistemas consistentes de carácter analítico, pero finalmente: existe una compatibilidad lógica entre éstas y la geometría euclidiana.

²¹ Cfr: “In kantian terminology, mathematical geometry holds indeed *a priori*, as Kant asserted, but only it is analytic. Physical geometry is indeed synthetic; but it is based on experience and hence does not hold *a priori*. In neither of the two branches of science which are called “geometry” do synthetic judgments *a priori* occur. Thus Kant’s doctrine must be abandoned.” [Rudolf Carnap en “El comentario introductorio a la edición inglesa” de *The Philosophy of Space and Time* de Hans Reichenbach]

²² Cfr: “El espacio no representa ninguna propiedad de cosas en sí, ni [las representa] a ellas en la relación que tienen entre ellas, es decir, [no representa] ninguna determinación de ellas que sea inherente a los objetos mismos, y que subsista aunque se haga abstracción de todas las condiciones subjetivas de la intuición.” <A26>/[B42]

²³ Este problema está relacionado con el problema de la percepción, y a su vez, con problemas relacionados con la construcción del conocimiento por medio de nuestro aparato cognitivo, lo que conduce a cuestiones como: ¿por qué nuestra percepción espacial del mundo físico es de carácter euclidiano? Sin embargo, revisar dichas problemáticas rebasan en mucho los alcances del presente trabajo.

²⁴ Con respecto a este punto es que llega a sustentarse la posibilidad de afirmar que la teoría de la relatividad resulta ser doblemente fenoménica, sólo habría que señalar que si bien, por vía kantiana, puede argumentarse desde la teoría de la idealidad del espacio, que el mundo fenoménico es *ad hoc* al carácter subjetivo de nuestras percepciones del espacio, las cuales son euclidianas, el caso de las geometrías no euclidianas no deja de lado dicho carácter fenoménico, puesto que de una u otra forma, la verificación experimental de las predicciones de la relatividad general se lleva a cabo por vía indirecta, y los fenómenos globales pueden bien inferirse, en concordancia con aspectos topológicos, y derivados del carácter inherente de las geometrías no euclidianas.

²⁵ En términos generales, dos son las conocidas como geometrías no euclidianas: *la hiperbólica*, desarrollada por Gauss, Janos Bolyai y Lobachevsky, de curvatura negativa, y en donde los ángulos interiores de un triángulo suman menos de 180 grados; *la elíptica*, de curvatura positiva. Asimismo, la generalización de éstas, la dan las geometrías de Riemann, de curvatura constante, en las cuales, estas últimas, son las que se aplican a la teoría de la relatividad general.

Ahora bien, decir que por la vía de la teoría de la relatividad, la tesis de la idealidad del espacio de Kant queda refutada, debido a la aplicación de las geometrías no euclidianas al análisis del mundo físico, y a la luz de los resultados experimentales que confirman precisamente que la teoría del espacio físico es la teoría de la relatividad (Parellada 2003), constituye un argumento precipitado, y que deja a la deriva hechos como que las dos versiones de dicha teoría: la especial y la general, que conciben un espacio-tiempo como una variedad (manifold) cuatridimensional, pero cuyas métricas²⁶, en cierta forma, difieren, pues en la primera la métrica es precisamente la del espacio llamado Espacio de Minkowski, y en la segunda, ésta está relacionada con la geometría diferencial a varias dimensiones de Riemann (ver por ejemplo Einstein (1916), (1926) y (1957), todas contenidas en Einstein (2005)). Por lo que de esto podemos desprender una cuestión: ¿qué implicaciones filosóficas tiene el hecho de que el espacio-tiempo de la relatividad especial no sea precisamente euclidiano, pero fenomenológica y empíricamente se asemeje a éste, y el de la relatividad general: de por sí no euclidiano, considerado un caso general del de Minkowski, quede “fuera del mundo fenoménico kantiano”, pero que aun así no sea el caso para la experiencia de éste?²⁷ Y además, existen, por decirlo de una forma, ciertas incompatibilidades entre ambas versiones de la relatividad; pues si bien, en la especial, no existen marcos de referencia privilegiados (en cuanto a observadores inerciales), en la relatividad general sí puede hablarse de un marco de referencia privilegiado ó absoluto, y a su vez, localmente, el espacio-tiempo es el de Minkowski, pero dado que por la misma localidad, bien puede concebirse semejante a un espacio euclidiano para tener noción de los fenómenos y/o eventos, a pesar de que globalmente, en relatividad general, el espacio es no euclidiano y la materia lo “deforma”, aún y así es posible tener noción empírica de ello, lo que conlleva a identificar un problema de fondo: el posible aspecto doblemente fenoménico de la relatividad. Atendiendo a esto último, aunque si bien, Kant puede interpretarse en el contexto de un espacio-tiempo euclidiano, y la relatividad no, resulta evidente que quien de una u otra manera da cuenta de la experiencia de todo fenómeno y/o evento: es el sujeto. Llegados aquí: la idea kantiana del carácter subjetivo,

²⁶ Una métrica es en términos generales una fórmula para el intervalo espacio-temporal entre dos eventos; cada punto del espacio-tiempo corresponde a un evento determinado en términos de coordenadas globales: x, y, z, t , de tal forma que la métrica del espacio de Minkowski es: $ds^2 = -dt^2 + (1/c^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, aquí c es la velocidad de la luz. En la relatividad general, debido a la presencia de materia y del campo gravitatorio, el espacio-tiempo es curvo, y la métrica tiene que ver con la teoría de superficies de Gauss, por lo que corresponde a: $ds^2 = \sum_{m,n} g_{mn} dx_m dx_n$, tal que $m, n = 1, \dots, 4$, y las g_{mn} son funciones de las coordenadas x_m y x_n espacio-temporales, por lo que, en términos generales, la ecuación de campo de Einstein es: $G = 8\pi T$, donde la expresión del lado izquierdo representa el “tensor de Einstein”, que describe la curvatura del espacio-tiempo en una forma métrica; y la expresión T representa el tensor de energía, el cual describe la distribución, densidad y presión de la masa-energía-momento en la región especificada del espacio-tiempo.

²⁷ Una sencilla respuesta a esto tiene que ver con la idea de que en la relatividad especial se habla de “eventos” de carácter local, mientras que en la relatividad general nos estamos refiriendo a eventos de carácter global.

ideal del espacio es inmune, más a nivel epistemológico, que ontológico, en el marco de la teoría de la relatividad, aunque: ¿posee el espacio una realidad objetiva?, es decir, ¿constituye un ente del mundo?; cabe señalar que, en cierto sentido: el conocimiento y los problemas filosóficos que se derivan de la relatividad especial y general sobre el espacio, darían más una respuesta negativa a dichos cuestionamientos. A pesar de que la teoría de la relatividad ha llegado a considerarse la verdadera teoría del espacio físico, dado su éxito empírico, no existen fundamentos suficientes para rechazar la teoría de la idealidad del espacio de Kant, debido a que se enmarca en el ámbito de la geometría euclidiana, y frente a las consecuencias filosóficas sobre el carácter euclidiano ó no que haya traído la relatividad. Finalmente, resulta obvio que el conjunto de los conceptos con los que se construyen las geometrías no euclidianas (puntos, líneas rectas, planos, áreas, ángulos, etc.) proviene del conjunto de los conceptos de la geometría euclidiana (de carácter intuitivo), y a su vez, el éxito empírico de la teoría de la relatividad, a partir de sus predicciones teóricas, muestra, entre otros, un hecho bastante curioso:

El principio de que la luz viaja en línea recta no es una definición de “línea recta”: como tal no tendría esperanza alguna, ya que contiene el término geométrico “viaja”. La misma objeción surge si decimos: “una línea recta se define como la trayectoria de un rayo de luz”. En este caso, la definición de “línea recta” utiliza el término topológico “trayectoria”. El principio de que la luz viaja en línea recta es simplemente una ley de la óptica, nada más ni nada menos serio que eso. Lo que con frecuencia se llama “interpretación de la geometría matemática” se describe más acertadamente como el someter a prueba la conjunción entre la teoría geométrica y la teoría óptica... Antes de Einstein, los principios geométricos tenían exactamente el mismo *status* que los principios analíticos, o mejor dicho, tenían exactamente el mismo *status* que todos los principios que los filósofos citan equivocadamente como analíticos. Después de Einstein, especialmente después de la teoría general de la relatividad, tienen exactamente el mismo *status* que las leyes cosmológicas: esto se debe a que la relatividad general establece una compleja interdependencia entre la cosmología y la geometría de nuestro universo. (Putnam 1962, p. 30-1)

Así, el que en términos generales, la relatividad general sea la teoría del espacio físico real, no implica necesariamente que las tesis kantianas sobre el espacio sean refutadas, esto constituye más un terreno de análisis fértil, a la luz, incluso, de las diversas

contradicciones, en relación al espacio, entre teorías ampliamente aceptadas (relatividad y mecánica cuántica por ejemplo), y a la luz también de nuevas investigaciones insertadas en el ámbito de las filosofías del espacio, el tiempo y el espacio-tiempo (puede verse Reichenbach (1958), Earman *et. al.* (1977), Sklar (1976) entre muchos otros).

Sólo desde el punto de vista humano es que puede hablarse de principios matemáticos, de principios empíricos. El hombre es un “animal matemático”.

Bibliografía

ALLISON, H. (1992) *El idealismo trascendental de Kant: una interpretación y defensa*, Anthropos, Barcelona, 1983.

ÁLVAREZ, C. (2004) “Kant, la geometría y el espacio”, *Revista Digital Universitaria* 11(5), pp. 1-14.

BRISTOW, W. (2001) “Are Kant’s categories subjective?”, *Review of Metaphysics* 55, pp. 551-580.

BROAD, C. D. (1941) “Kant’s Theory of Mathematical and Philosophical Reasoning”, in *Proceedings of the Aristotelian Society* 42, pp. 1-24.

DAINTON, B. (2010) *Time and Space*, McGill Queen’s University Press, U. K.

DELEUZE, G. (2007) *La filosofía crítica de Kant*, Cátedra, Madrid.

DORATO, M. (2002) “Kant, Gödel and Relativity”, *Proceedings of the invited papers for the 11th International Congress of the Logic Methodology and Philosophy of Science*, Synthese Library, Kluwer, Dordrecht, pp. 329-346.

EINSTEIN, A. (2004) *Einstein 1905: Un año milagroso. Cinco artículos que cambiaron la física*, Crítica, Barcelona.

— (1999) *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*, Altaya, Madrid.

— (2004) *The collected papers of Albert Einstein*, Princeton University Press, Princeton.

— (2005) *Einstein. Obras esenciales*, Crítica, Barcelona.

FALKENSTEIN, L. (1995) *Kant’s Intuitionism*, University of Toronto Press, Toronto.

FERRARIN, A. (1995) “Construction and Mathematical Schematism Kant on the Exhibition of a Concept in intuition”, *Kant-Studien* 86(1), pp. 131-174.

FRIEDMAN, M. (1992) *Kant and the Exact Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge.

GUERRERO-PINO, G. (2005) “Teoría kantiana del espacio, geometría y experiencia”, *Praxis Filosófica* 20, pp. 31-68.

GUYER, P. (2003) *Kant and the Claims of Knowledge*, Cambridge University Press, New York, 1987.

La idealidad del espacio en Kant y las geometrías no euclidianas

- HACYAN, S. (2001) “Espacio, tiempo y realidad”, *Ciencias* 63, pp. 15-25.
- (2004) *Física y metafísica del espacio y el tiempo. La filosofía en el laboratorio*, F.C.E., México.
- (2006) “On the Transcendental Ideality of Space and Time in Modern Physics”, *Kant-Studien* 97(3), pp. 382-395.
- HAGAR, A. (2008) “Kant and non-Euclidean Geometry”, *Kant-Studien* 99(1), pp.80-98.
- HORSTMANN, R. P. (1976) “Space as Intuition and Geometry”, *Ratio* 18, pp. 17-30.
- KANT, I. (2009) *Crítica de la razón pura*, F.C.E., México.
- (1991a) *Transición de los principios metafísicos de la ciencia natural a la física*, Anthropos, Barcelona.
- (1991b) *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza*, Tecnos, Madrid.
- (1999) *Prolegómenos a toda metafísica futura que haya de poder presentarse como ciencia*, Ediciones Istmo, Madrid.
- MARCUCCI, S. (2004) “Kant y la ciencia físico-matemática moderna”, en *Kant y las ciencias*, Pedro Jesús Teruel (ed.), Biblioteca Nueva, Madrid, 2011, pp. 41-47.
- PARSONS, C. (1982) “Kant’s Philosophy of Arithmetic”, in *Kant on Pure Reason*, edited by Ralph C. S. Walker, Oxford University Press, New York, pp. 13-40.
- (2010) “Gödel and Philosophical Idealism”, *Philosophia Mathematica* (III), vol. 18, no. 2, pp. 166-192.
- PESIC, Peter et. al. (2007) *Beyond Geometry. Classic Papers from Riemann to Einstein*, Dover, New York.
- PARELLADA, R. (2003) “Kant y la geometría”, en *Kant y las ciencias*, en Pedro Jesús Teruel (ed.), Biblioteca Nueva, Madrid, 2011, pp. 30-40.
- PETKOV, V. (2009) *Relativity and the Nature of Spacetime*, Springer, New York.
- PUTNAM, H. (1962/1983) “Lo analítico y lo sintético”, *Cuadernos de Crítica* 24, IIF’s/UNAM, México.
- REICHENBACH, H. (1920/1965) *The Theory of Relativity and A Priori Knowledge*, University of California Press, Berkeley.
- (1958) *The Philosophy of Space and Time*, Dover, New York.
- RUSSELL, B. (1976) *Misticismo y lógica*, Edhasa, Barcelona, 2001.
- SÁNCHEZ-RON, J.M. (1985) *El origen y desarrollo de la relatividad*, Alianza Universidad, Madrid.
- (2005), *Albert Einstein*, Crítica, Madrid.
- SHABEL, L. (2010) “The Transcendental Aesthetic”, in *Kant’s Critique of Pure Reason*, Paul Guyer (ed.), Cambridge University Press, New York.

Gilberto Castrejón

SKLAR, L. (1994) *Filosofía de la física*, Alianza Editorial, Madrid.

— (1974) *Space, Time and Spacetime*, University of California Press, Berkeley.

STRAWSON, P. F. (1995) *The Bounds of Sense*, Routledge, New York, 1966.

TERUEL, Pedro Jesús *et. al.* (2011) *Kant y las ciencias*, Biblioteca Nueva, Madrid.

TORRETTI, R. (2005) “Espacio y tiempo en la física de Einstein” en *Filosofía de las ciencias naturales, sociales y matemáticas*, Editorial Trotta, Madrid.