Invariantes de Nudo en Teorías Topológicas No-Abelianas Acopladas con Materia

Ernesto Fuenmayor (**efuenma@fisica.ciens.ucv.ve**), Lorenzo Leal

Centro de Física Teórica y Computacional,
Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela,
AP 47270, Caracas 1041-A, Venezuela.

Resumen

Se realiza un estudio perturbativo de las ecuaciones clásicas de movimiento de teorías topológicas acopladas con fuentes no dinámicas que portan carga cromoeléctrica, con el objetivo de obtener expresiones analíticas para invariantes de nudo. A tal fin, consideramos la teoría de *Chern-Simons* no-Abeliana acoplada externamente con partículas de *Wong*.

Abstract

We study a link-invariant that corresponds to the second order contribution in a perturbative expansion of the classical on-shell action of the Chern-Simons theory coupled to non dynamical Wong particles.

Hace 20 años, Edward Witten (Witten, 1988), estableció la conexión entre la Teoría Cuántica de *Chern-Simons* y los invariantes de anudamiento de curvas cerradas. La relación comenzó al reconocerse que el valor esperado en el vacío del Loop de *Wilson* para la teoría de *Chern-Simons* corresponde a un polinomio invariante de nudo (Witten, 1988). Gran cantidad de autores han contribuido notablemente al desarrollo de diversos aspectos que enfilan hacia la mejor comprensión de los invariantes de nudo dentro de la física moderna (Leal, 2002;Rozanski, 1994;Monastyrsky, 1986;Labastida, 1998; Díaz, 2006). Abordaremos el estudio de una teoría clásica no-Abeliana de *Chern-Simons* acoplada con partículas que portan carga cromodinámica, conocidas como partículas de *Wong* (Wong, 1970), como excusa para la obtención de invariantes de nudos. La acción de la cual partiremos fue obtenida en su forma final luego del estudio desarrollado por varios autores (Leal, 2002;Wong, 1970; Balachandran, 1978). La acción total es independiente de la métrica, por lo que presenta un carácter topológico, y entonces se arguye que ésta evaluada sobre las ecuaciones de movimiento (la acción *on-shell*) preservará sus propiedades topológicas, por lo que debe conducir a expresiones analíticas de invariantes de nudo asociadas a las líneas de universo de las partículas. Lo que haremos es plantear un esquema perturbativo de solución que nos permitirá encontrar las primeras contribuciones a la acción *"on-shell"*. Siguiendo el procedimiento dado en las referencias (Leal, 2002) hallaremos las tres primeras contribuciones al desarrollo perturbativo de la acción: la acción a orden cero $S^{(0)}$, la acción a orden uno $S^{(1)}$ y la acción a orden dos $S^{(2)}$, para luego tratar de relacionar estas primeras contribuciones con los Coeficientes de Anudamiento de Orden Superior de *Milnor* (Milnor, 1954). Utilizaremos un lenguaje práctico que facilita notablemente el cálculo y hace más simple el análisis de las expresiones. Este nuevo esquema es posible debido a la introducción de unas coordenadas asociadas al grupo de ciclos extendido, expuestas por primera vez en (Di Bartolo, 1993), y que también han sido relacionadas con el estudio de invariantes de Nudo. Nuestra acción viene dada por (Leal, 2002;Wong, 1970;Balachandran, 1978),

$$S_{CS+int} = -\Lambda^{-1} \int d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr\left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho\right) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau Tr\left(K_i g_i^{-1}(\tau) D_\tau g_i(\tau)\right) \quad (1)$$

donde γ_i corresponde a la línea de universo de la partícula i-ésima con coordenadas $z_i(\tau)$, y donde $g_i(\tau)$ es un elemento del grupo *SU(N)* a partir del cual se construye la carga cromoeléctrica $I_i(\tau)$ de dicha partícula por medio de $I_i(\tau) \equiv g_i(\tau) K_i g_i^{-1}(\tau) = I_i^a T^a$, donde $K_i \equiv K_i^a T^a$ es un elemento constante del álgebra relacionado con el valor inicial de la carga. Las ecuaciones de movimiento para los campos vienen dadas por

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}(x) = \Lambda J^\mu(x) = \Lambda \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau\, \dot{z}_i^\mu(\tau)\, I_i(\tau)\, \delta^{(3)}(x - z_i(\tau)), \quad (2)$$

donde el tensor de campo se define por medio de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \left[A_\mu, A_\nu\right]$. Para obtener las ecuaciones de movimiento asociadas a las variables internas $g_i(\tau)$, se debe tomar en cuenta el hecho de que son matrices de *SU(N)* cuyos elementos de matriz no son independientes. Siguiendo un procedimiento desarrollado en (Leal, 2002;Balachandran, 1978) se llega a $D_\tau I_i \equiv \dot{I}_i + [A_i, I_i] = 0$; integrando esta relación se obtiene formalmente $I_i(\tau) = U_i(\tau) I_i(0) U_i^{-1}(\tau)$; $U_i(\tau) = T \exp\left(-\int_0^\tau A_i(\tau')d\tau'\right)$ (3), donde $U_i(\tau)$ es la exponencial tiempo ordenada de $A_i(\tau)$ a lo largo de la curva γ_i. En principio es complicado resolver exactamente las ecuaciones de movimiento para $A_\mu^a(x)$ e I_i^a, debido a su alto grado de no-linealidad, pero como dijimos anteriormente, es suficiente establecer un esquema perturbativo donde la acción la escribimos como: $S([\gamma];\Lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \Lambda^p S^{(p)}[\gamma]$, y de esta manera quedarnos hasta el orden deseado (Leal, 2002;Fuenmayor, 2005). Así, podemos encontrar invariantes de nudo orden a orden. Para llevar a cabo el desarrollo perturbativo en potencias de Λ definimos $a_\mu \equiv \Lambda^{-1} A_\mu$ y desarrollamos la exponencial ordenada que figura en la expresión (3). Con esto escribimos la ecuación de movimiento (2) para el campo A_μ^a al orden p-ésimo. Esta ecuación tiene la forma de la Ley de *Ampere*, por lo que su solución viene expresada por medio de la Ley de *Biot-Savart*,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_\rho^{(p)a}(x) = J^{(p)\mu a}(x) \quad \longrightarrow \quad a_\mu^{(p)a}(x) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \epsilon_{\mu\nu\rho}\, J^{(p)\nu a}(x') \frac{(x-x')^\rho}{|x-x'|^3}. \qquad (5)$$

Esto permite obtener los campos $a_\mu^a(x)$ orden por orden. Finalmente, podemos obtener el orden (p) de la acción (1) sobre las ecuaciones de movimiento,

$$S^{(p)} = \int d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\sum_{r,s}^{r+s=p} a_\mu^{(r)a}\partial_\nu a_\rho^{(s)a} + \frac{1}{3} f^{abc} \sum_{r,s,q}^{r+s+q=p-1} \left(a_\mu^{(r)a} a_\nu^{(s)b} a_\rho^{(q)c}\right)\right). \qquad (6)$$

Va a ser muy conveniente introducir ciertas convenciones de notación. Denotaremos la dependencia de una función tensorial en alguna variable continua colocándole un índice que indica dicha variable, esto es, *Aμν...ρ (x, y, ..., z) ≡ Aμx νy ... ρz* . Lo anterior, permitirá establecer una especie de convención de Einstein generalizada para la suma de índices repetidos pero que funciona para variables continuas. Usaremos ahora lo que se conoce como coordenadas para un espacio de ciclos, que fueron introducidas por primera vez en (Di Bartolo, 1993):

$$T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\gamma_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T^{\mu_1 x_1\ \mu_2 x_2 \ldots \mu_n x_n}_{\gamma_i} \equiv \oint_{\gamma_i} dz^{\mu_1} \int_0^z dz_1^{\mu_2} \times$$
$$\times \int_0^{z_1} dz_2^{\mu_3} \ldots \int_0^{z_{n-1}} dz_{n-1}^{\mu_n} \delta^{(3)}(x_1 - z)\delta^{(3)}(x_2 - z_1)\delta^{(3)}(x_3 - z_2)\ldots\delta^{(3)}(x_n - z_{n-1}). \quad (7)$$

La relación anterior define a los objetos distribucionales *T's*, de "rango" n. Éstas no constituyen variables independientes, de hecho, obedecen un conjunto de ligaduras algebraicas y diferenciales. También vamos a introducir a continuación los objetos $g^{\mu x \nu y} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho \delta(x-y)$ y $g_{\mu x \nu y} \equiv -\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}$ que son simétricos en sus pares de índices. Tales cantidades aparecen naturalmente en la solución de la ligadura diferencial que obedecen los T-objetos. Procederemos a obtener los tres primeros órdenes en el desarrollo perturbativo de la acción. $S^{(0)}$ lo obtenemos directamente de (6) y $\vec{a}^{(0)}_{\mu x}$ de la integración de la ecuación (5),

$$S^{(0)} = \epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(0)}_{\rho x} \cdot \vec{a}^{(0)}_{\mu x} = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}\left(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j\right) T_i^{\mu x} g_{\mu x\, \nu y} T_j^{\nu y} = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}\left(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j\right) L(i,j). \quad (8)$$

La acción a orden cero $S^{(0)}$ es proporcional a una combinación de los Números de Anudamiento de (Leal, 2002; Labastida, 1998) de las curvas cerradas γ_i y γ_j. Este objeto aparece en muchos estudios relacionados con teorías topológicas e invariantes de nudo aún en el caso Abeliano. Puede escribirse explícitamente de la forma

$L(i,j)=\frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_i} dz^{\mu}\oint_{\gamma_j} dy^{\rho}\,\frac{(z-y)^{\nu}}{|z-y|^{3}}\varepsilon_{\mu\nu\rho}$. La ecuación (6) para p = 1 es:

$$S^{(1)} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\left[(\vec{I}_i\times\vec{I}_j)\cdot\vec{I}_k\right]\Big[\epsilon^{\mu\nu\rho}T_i^{\mu_1x_1}T_j^{\mu_2x_2}T_k^{\mu_3x_3}g_{\mu x\mu_1x_1}g_{\nu x\mu_2x_2}g_{\rho x\mu_3x_3} + T_i^{[\mu x,\nu y]}T_j^{\mu_1x_1}T_k^{\mu_2x_2}$$
$$\times\, g_{\mu x\mu_1x_1}g_{\nu y\mu_2x_2} + T_j^{[\mu x,\nu y]}T_k^{\mu_1x_1}T_i^{\mu_2x_2}g_{\mu x\mu_1x_1}g_{\nu y\mu_2x_2} + T_k^{[\mu x,\nu y]}T_i^{\mu_1x_1}T_j^{\mu_2x_2}g_{\mu x\mu_1x_1}g_{\nu y\mu_2x_2}\Big]. \quad (9)$$

Se tienen evidencias que indican que la expresión dada en (9) se encuentra vinculada con el Tercer Coeficiente de Anudamiento de *Milnor*. Este

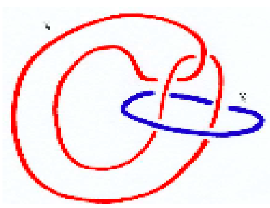

FIG. 1: Link de Whitehead.

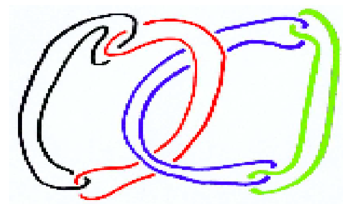

FIG. 2: Link de cuatro-componentes detectado por $S^{(2)}$

Invariante se encuentra definido siempre que las tres curvas posean *Número de Gauss* nulo entre ellas, $L(i,j)=0$. Esto constituye una propiedad de todos los Coeficientes de Anudamiento de Orden Superior, el n-ésimo se encuentra definido sólo si todos los anteriores se anulan (Guadagnini, 1990). $S^{(1)}$ permite entre otras cosas caracterizar las propiedades de anudamiento de los *Anillos Borromeanos* (Monastyrsky, 1986;). Finalmente partiendo de (6), colocando p = 2, y luego de un cálculo largo donde hemos usado las ligaduras que cumplen las multitangentes de ciclos llegamos a rescribir la acción a orden dos $S^{(2)}$ en función de las coordenadas geométricas,

$$\begin{aligned} S^{(2)} \;=\; & \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}\left(\left[\vec{I}_i\times(\vec{I}_j\times\vec{I}_k)\right]\cdot\vec{I}_l\right)\Big\{\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,g_{\nu x\,a}\,g_{\rho x\,d}\,g_{\beta y\,b}\,g_{\gamma y\,c}\,T_i^{a}\,T_j^{b}\,T_k^{c}\,T_l^{d} \\ & + \frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\,T_j^{[\alpha y,\,a]}g_{\nu x\,b}\,g_{\rho x\,d}\,g_{a\,c}\,T_i^{b}\,T_k^{c}\,T_l^{d} + \frac{3}{2}T_j^{[b,\,\alpha y]}\,T_i^{[a,\,\mu x]}\,g_{b\,c}\,g_{a\,d}\,T_k^{c}\,T_l^{d} \\ & + T_j^{\mu x\,a\,b}\,g_{a\,c}\,g_{b\,d}T_i^{c}\,T_k^{d}\,T_l^{\alpha y}\Big\}\;g_{\mu x\,\alpha y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Debido a los resultados previos sospechamos que la acción a orden dos va a encontrarse relacionada de alguna manera con invariantes de cuatro componentes e inclusive pudiera caracterizar al link de *Whitehead* (FIG. 1). De hecho, se puede demostrar que para el anudamiento de cuatro componentes mostrado en la (FIG. 2) sólo el segundo término entre llaves de (10) no es nulo (Fuenmayor, 2005), y éste se "entera" de dicho anudamiento porque cuenta una contribución distinta de cero tal como ocurría con los órdenes anteriores. Estas conjeturas y la extensión de los resultados que aquí se presentan a la obtención de invariantes de órdenes superiores se encuentran aun bajo estudio.

Este trabajo fue financiado por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico **PG 03-00-6039-2005** [*Invariantes de Nudo en Teoras Topolgicas*], UCV.

Witten E, (1988), *Commun. Math. Phys. 121, 351*.

Leal L, (2002*), Phys. Rev. D* 66, 125007 [arXiv:hep-th/0204139].

Rozansky L, (1994), *J. Math. Phys.* 35, 5219.

Rolfsen D, (1976), *Knots and Links*, Wilmington, Publish or Perish.

Monastyrsky M I y Retakh V S, (1986), *Commun. Math. Phys.* 103, 445.

Labastida M F, (1998), Spektrum Wiss. 1998N10, 66.

Díaz R, Fuenmayor E y Leal L, (2006), *Phys. Rev. D* 73, 065012.

Wong S K, (1970), *Nuovo Cimento. A* 65, 689.

Balachandran A P, Borchardt M, y Stern A, (1978), *Phys. Rev. D* 17, 3247.

Milnor J, (1954), *Ann. of Math.* 59, 177.

Di Bartolo C, R. Gambini, y J. Griego, *Commun. Math. Phys.* 158, 217 (1993).

Fuenmayor E, (2005), *Tesis Doctoral-Biblioteca-UCV*, Caracas.