

Demostración geométrica del Teorema de Chasles.

Geometric demonstration of the Chasles's Theorem.

Otto Rendón y Timothy Sandoval

RESUMEN

En los cursos de Mecánica Clásica Avanzada, que se dictan en la licenciatura de Física ofertada por nuestras Universidades Venezolanas, se estudia de manera rigurosa la cinemática del cuerpo rígido. El estudio de la cinemática del cuerpo rígido comienza con la demostración del número de grados de libertad necesario para describir el movimiento en un espacio D -dimensional. Sin embargo, la posibilidad de representar cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido como una translación más una rotación, Teorema de Chasles, es aceptada con demostraciones incompleta en los textos bibliográficos de la asignatura de Mecánica Clásica (Goldstein, 1980; Goldstein et al, 2002). Se presenta en este trabajo una demostración geométrica del Teorema de Chasles, tanto para movimientos de un cuerpo rígido en espacio de 2 ó 3 dimensiones, resaltando la independencia de la rotación con respecto al punto de translación referencial.

SUMMARY

The courses in Advanced Classical Mechanics that are dictated in the degree of Physics offered by our Venezuelan Universities, it is studied in a rigorous way the kinematics of the rigid body. The study of the kinematics of the D -dimensional rigid body motion begins with the demonstration of the number of degrees of freedom. However, the possibility to represent any displacement of a rigid body as a **pure translation** plus a rotation, Theorem of Chasles, it is accepted

with incomplete demonstrations in the standard texts of the subject of Classical Mechanics (Goldstein, 1980; Goldstein et al, 2002). It is shown in this paper a geometric demonstration of the Theorem of Chasles, for 2 or 3D rigid body motion, standing out the independence of the rotation with respect to the point of translation.

PALABRAS CLAVE / Mecánica Clásica / Cinemática / Cuerpo Rígido / Teorema de Euler / Teorema de Chasles /

Otto Rendón. Licenciado en Física, Universidad Simón Bolívar (USB), Venezuela. Magíster en Física, Universidad Simón Bolívar (USB), Venezuela. Doctorando en Física, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Venezuela. Profesor, Universidad de Carabobo (UC), Venezuela. Dirección: Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Sector Bárbula, Naguanagua 2005, Edo. Carabobo, Venezuela. E-mail: orendon@uc.edu.ve.

Timothy Sandoval. Bachiller de la República Bolivariana de Venezuela. Licenciando en Física, Universidad de Carabobo (UC), Venezuela. E-mail: timothysandovalp@hotmail.com.

La cinemática de un cuerpo rígido es uno de los temas más complejo de la mecánica clásica; tanto así, que en los libros de textos usados en nuestras universidades (Goldstein, 1980; Goldstein et al, 2002; Landau y Lifshitz, 1976) se presenta como el último ejemplo para resaltar el alcance de la mecánica Lagrangiana, a excepción del movimiento oscilatorio.

La manera de entender un movimiento general del cuerpo rígido es reconocer que cada punto del rígido realiza una traslación más una rotación con respecto a un eje, al desplazarse. Lo interesante de la descripción anterior para

el movimiento de un cuerpo rígido es que todos los puntos sobre el eje de rotación realiza una traslación pura y la localización del eje de rotación tiene la posibilidad de anclarse sobre cualquier punto del cuerpo, siendo la velocidad angular también invariante al anclaje. La conclusión anterior es establecida en la mecánica clásica por el teorema de Chasles (Goldstein et al, 2002):

“Todo desplazamiento de un cuerpo rígido puede ser logrado de manera equivalente por una traslación en cierta dirección seguida de una rotación en torno de un eje”

una variación más fuerte exige que siempre se puede escoger la dirección de la traslación paralela al eje de la rotación.

La demostración del teorema de Chasles en los libros de textos (Goldstein, 1980; Goldstein et al, 2002; Landau y Lifshitz, 1976) se da de manera incompleta o se supone cierto.

Según el conocimiento de los autores de este trabajo, una revisión completa, de carácter pedagógico, sobre la cinemática del movimiento del cuerpo rígido fue realizado por Beatty (1966) y cortamente revisada en (1977). En la revisión de 1966, Beatty menciona la existencia de argumentos geométricos complicados en los teoremas sobre desplazamientos finitos de cuerpos rígidos. Como consecuencia de esta circunstancia, los autores de este artículo observan en la literatura especializada reciente (Page et al, 2007), otra técnica pedagógica para mostrar los resultados del teorema de Chasles y consiste en usar ejemplos concretos de sistemas mecánicos para ilustrar y resaltar los principios que se usan en la descripción del movimiento de un cuerpo rígido.

En este trabajo, se muestra geoméricamente el teorema de Chasles para movimiento de un cuerpo rígrado en un espacio de 2 ó 3 dimensiones. En la Figura 1 se muestra un desplazamiento finito general de un cuerpo rígrado en un espacio de dimensión 2. En la Figura 2, se muestra el mismo desplazamiento anterior, pero se resalta dos maneras de llegar a la posición final del rígrado. Observe en la Figura 2 la descomposición de una traslación del punto P1 más una rotación de α alrededor de un eje perpendicular que pasa por P1. De igual manera se puede ver la descomposición del desplazamiento según el punto P2. Como los ángulos de rotación son idénticos las siguientes ecuaciones vectoriales son válidas: $\vec{v}_{P1} = \vec{v}_{P2} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{21}$ y $\vec{v}_{P2} = \vec{v}_{P1} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{12}$; de esta forma se muestra la invariancia de la velocidad angular con respecto al anclaje del eje, sin embargo las velocidades de traslación por lo general son diferentes.

Para demostrar en 3D el teorema de Chasles, en la Figura 3 se dibuja la posición final del desplazamiento del cuerpo rígrado, y como en 2D el eje de rotación se puede anclar en P1 como en P2. Sin embargo, no se puede aún concluir que las velocidades angulares en los dos ejes son idénticas. Para demostrar la independencia de la velocidad angular ω del anclaje. Primero se muestra que siempre se puede escoger un punto P_1' sobre el eje de rotación anclado en P1, para asegurar que $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ no es paralela a \vec{r}_{21} . Como en 2D las siguientes ecuaciones vectoriales son válidas: $\vec{v}_{P1} = \vec{v}_{P2} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{21}$ y $\vec{v}_{P2} = \vec{v}_{P1} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{12}$. Sumando las dos ecuaciones anteriores se obtiene: $(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_{21} = 0$. Por construcción esos vectores no son paralelos y en conclusión: $(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) = 0$.

Conclusiones

Se muestra el teorema de Chasles de una manera geométrica, facilitando así la visualización de cómo se descompone un movimiento general de cuerpo

rígido. De la demostración se observa que no es necesario tomar el centro de masa del cuerpo rígido para poder descomponer un desplazamiento general como una traslación más una rotación.

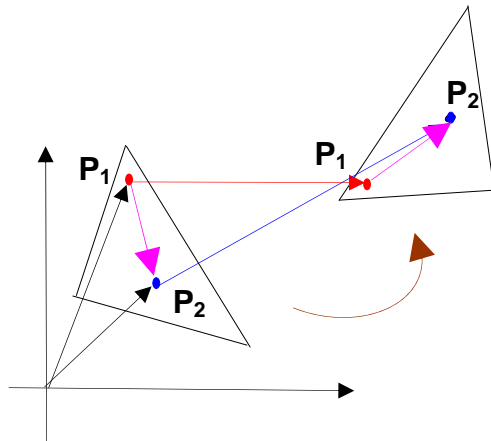


Figura 1. El desplazamiento finito de un cuerpo rígido es mostrado. Se resalta la posiciones de los puntos P1 y P2.

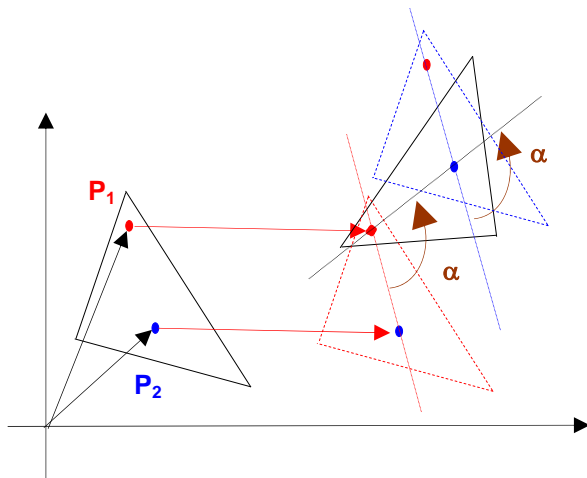


Figura 2. Desplazamiento finito igual a la figura anterior. Traslación del punto P1 es resaltado, la traslación de P2 llega al triángulo superior derecho.

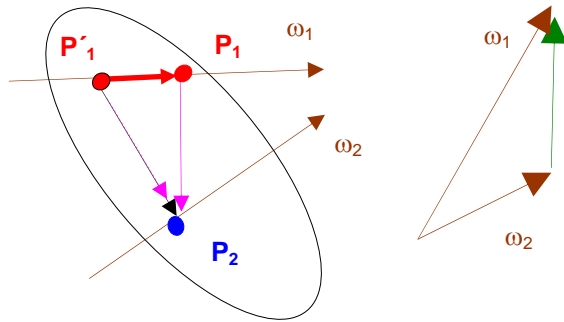


Figura 3. Como en el caso 2D, en 3D el eje de rotación pueden anclarse en puntos diferentes.

Referencias

- Beatty MF (1966) Kinematics of Finite, Rigid –Body Displacements. Am . J. Phys. 34: 949-954.
- Beatty MF (1966) Kinematics of finite rigid-body rotations-revisited. Am. J. Phys. 45: 1006-1006.
- Goldstein H (1980) Classical Mechanics. Reading, MA: Addison Wesley. San Fransisco.
- Goldstein H (2002), Poole Ch, Safko J (2002) Classical Mechanics, Addison Wesley. San Fransisco. pp. 134-183.
- Landau LD, Lifshitz EM (1976) Mechanics Vol.1. Pergamon Press. New York. pp. 96-186.
- Page A, Candelas P, Belmar F, De Rosario H (2007) Analysis of 3D rigid body motion using photogrammetry. A simple model based on a mechanical analogy. Am. J. Phys. 75:56-61.