

# ANALIZADOR SIMBÓLICO DE REDES ELÉCTRICAS PARA ESTABILIDAD Y PASIVIDAD DE CUADRIPOLOS

## SYMBOLIC ELECTRIC NETWORKS ANALYZER FOR STABILITY AND PASSIVITY OF TWO PORT NETWORKS

**Francisco J. Viloría M.<sup>1</sup>, Francisco J. Araujo R.<sup>2</sup>, Adán G. Amórtegui G.<sup>3</sup>**  
Universidad de Los Andes (ULA); Facultad de Ingeniería Mérida-5101- Venezuela.  
email: fviloria@ula.ve

**Recibido:** 30-01-2023  
**Aceptado:** 16-05-2023

### Resumen

El desarrollo del presente instrumento educativo se basa en la construcción de una serie de rutinas capaces de diferenciar los casos que se presentan en el estudio de estabilidad y pasividad de cuadripolos, el instrumento permite obtener respuestas y generar conclusiones, todo esto a través de algoritmos y funciones que permiten realizar las operaciones simbólicas y numéricas necesarias para obtener la solución del problema planteado. Lo señalado constituye parte esencial del software desarrollado como una ampliación de las capacidades de cálculo de AnSiRE (Analizador Simbólico de Redes Eléctricas). La ampliación de esta capacidad incluye el análisis de estabilidad absoluta que se realiza mediante el criterio de Routh-Hurwitz y el teorema de Sturm, mientras, el análisis de pasividad se realiza por medio de las condiciones de las Funciones Reales Positivas y el análisis de la matriz hermitiana fundamentándose en el Teorema de Raisbeck. Las salidas del programa incluyen un análisis del comportamiento del circuito y la generación de conclusiones para la comprensión de los resultados por parte del educando. El proyecto se desarrolló en lenguaje de programación C y se usó el entorno de desarrollo Qt Creator y como herramienta de cálculo simbólico se utiliza Mathomatic.

**Palabras clave:** AnSiRE, estabilidad, Routh-Hurwitz, pasividad, función real positiva, cuadripolos

### Abstract

The development of this educational instrument is based on the construction of a series of routines capable of differentiating the cases that are presented in the study of stability and passivity of two port networks, the instrument allows obtaining answers and generating conclusions, all this through algorithms and functions that allow performing the symbolic and numerical operations necessary to obtain the solution of the problem posed. The above constitutes an essential part of the software developed as an extension of the calculation capabilities of AnSiRE (Symbolic Analyzer of Electrical Networks). The extension of this capacity includes the analysis of absolute stability that is carried out by means of the Routh-Hurwitz criterion and the Sturm theorem, while the passivity analysis is carried out by means of the conditions of the Positive Real Functions and the analysis of the Hermitian matrix based on Raisbeck's theorem. The outputs of the program include an analysis of the behavior of the circuit and the generation of conclusions for the understanding of the results by the student. The project was developed in the C programming language and the Qt Creator development environment was used and Mathomatic was used as a symbolic calculation tool.

**Keywords:** AnSiRE, stability, Routh-Hurwitz, passivity, Positive Real Functions, two port networks.

**Francisco J. Viloría M.:** Ingeniero Electricista, Universidad de Los Andes (ULA), Maestría en Automatización e Instrumentación, ULA. Profesor de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. email: fviloria@ula.ve, viloriaf@gmail.com; **Francisco J. Araujo R.:** Ingeniero Electricista, Universidad de Los Andes (ULA), Profesor de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida-Venezuela. email: araujoru@ula.ve;

**Adán G. Amórtegui G.:** Ingeniero Electricista, Universidad de Los Andes (ULA), Mérida, Venezuela; email: gaago3@gmail.com

## Introducción

En el presente artículo, se presenta un instrumento educativo que permite el análisis de pasividad y estabilidad de cuadripolos a partir de la matriz que lo caracteriza. Se desarrolla como una ampliación del programa simbólico AnSiRE,<sup>1</sup> y como complemento al módulo ya desarrollado de Cálculo de estabilidad y pasividad de los circuitos,<sup>2</sup> el cual sólo se orienta a dipolos.

Se estudian los cuadripolos y los parámetros que los caracterizan porque la mayoría de los circuitos o sistemas en general están conformados por al menos dos puertos. Los parámetros de un cuadripolo describen totalmente su comportamiento en términos del voltaje y la corriente en cada puerto.

Conocer los parámetros de un cuadripolo permite describir su funcionamiento cuando está conectado a una red más grande. Los cuadripolos son útiles en el modelado de dispositivos electrónicos y de componentes de sistemas de potencia y sistemas de comunicaciones. Porejemplo, en electrónica, las redes de dos puertos se emplean para modelar transistores y amplificadores operacionales, en sistemas de potencia para el modelado de transformadores y líneas de transmisión y en comunicaciones para representar atenuadores, adaptadores y filtros.

Un cuadripolo puede ser definido como un circuito eléctrico con dos puertos diferentes para la entrada y para la salida, y ser representado como una caja que simboliza la interconexión de  $n$  elementos con cuatro terminales dos para el puerto de entrada

y dos para el puerto de salida tal como se muestra en la Figura 1. Una red de cuatro terminales se denominará cuadripolo cuando la corriente que entra a una terminal de un par sale por la otra terminal del par. Por ejemplo,  $I_1$  entra por la terminal  $a$  y sale por la terminal  $b$  del par de terminales de entrada  $a$ - $b$ .

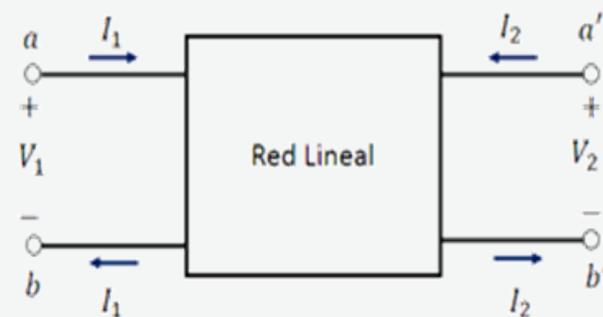


Figura 1 Red de dos puertos o Cuadripolo.

La caracterización de una cuadripolo se realiza encontrando las relaciones existentes entre las variables  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  mostradas en la figura 1, del conjunto de variables presentadas, dos son independientes y dos son dependientes. Los términos que relacionan las tensiones y corrientes reciben el nombre de parámetros y en función de ellos se definen las matrices de parámetro de impedancia, parámetros de admitancia, de parámetros híbridos  $g$  o  $h$  y de parámetros de transmisión directa o inversa.

Las opciones que se tienen para las variables de entrada independientes y las variables dependientes asociadas se muestran en la Tabla 1.<sup>3</sup> La selección del tipo de variables determina los parámetros buscados.

Definidas las variables dependientes e independientes de acuerdo a la Tabla 1. Se

**Tabla 1. Modelos de seis parámetros de circuitos**

Variables independientes	Variables dependientes	Parámetros de circuito
$I_1, I_2$	$V_1, V_2$	Impedancia Z
$V_1, V_2$	$I_1, I_2$	Admitancia Y
$V_1, I_2$	$I_1, V_2$	Híbrida g
$I_1, V_2$	$V_1, I_2$	Híbrida h
$V_2, I_2$	$V_1, I_1$	Transmisión Directa a
$V_1, I_1$	$V_2, I_2$	Transmisión Inversa b

**Tabla 2. Ecuaciones para los seis conjuntos de parámetros de dos puertos**

Parámetros de circuito	Ecuaciones
<b>Impedancia Z</b>	$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$ $V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$
<b>Admitancia Y</b>	$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$ $I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$
<b>Híbrida g</b>	$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$ $V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$
<b>Híbrida h</b>	$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$ $I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$
<b>Transmisión Directa a</b>	$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2$ $I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2$
<b>Transmisión Inversa b</b>	$V_2 = b_{11}V_1 - b_{12}I_1$ $I_2 = b_{21}V_1 - b_{22}I_1$

pueden establecer un juego de ecuaciones para los seis conjuntos de parámetros de dos puertos, los cuales se resumen en la Tabla 2.<sup>3</sup>

La matriz que caracteriza al cuadripolo se obtiene del conjunto de ecuaciones presentadas en la Tabla 2. Como ejemplo, consideremos la obtención de la matriz de parámetros Z, que viene representada por:

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

Analíticamente, se pueden obtener los parámetros Z a partir del conjunto de ecuaciones para la impedancia Z.<sup>4</sup>

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

La obtención de los parámetros a nivel circuital, se realiza considerando dos subcircuitos, en el primero se alimenta el puerto de entrada y se deja la salida en circuito abierto para así obtener los parámetros  $z_{11}$  y  $z_{21}$ , mediante la medición de los voltajes en el puerto de entrada y salida y a corriente en el puerto de entrada, en el segundo subcircuito se alimenta el puerto de salida y se deja la entrada en circuito

abierto para así obtener los parámetros  $z_{12}$  y  $z_{22}$  mediante la medición de los voltajes en el puerto de entrada y salida y a corriente en el puerto de salida.

Cuando se analizan circuitos eléctricos de forma numérica, se pueden obtener conclusiones sobre los resultados obtenidos, por ejemplo la magnitud de la corriente en cierta rama del circuito, el voltaje en un nodo en particular, entre otros, pero este tipo de análisis es útil para circuitos que ya se encuentran diseñados e implementados, no así para la síntesis de los mismos, por otro lado el análisis de manera simbólica aporta respuestas que no permiten conocer las magnitudes numéricas de las diferentes variables presentes en las redes eléctricas, pero sí permiten analizar cómo se comportan cada una de esas variables en función de la topología que presente el circuito eléctrico y que influencia tienen cada uno de los elementos de la red en el resultado final de la variable, este tipo de estudio permite desarrollar la síntesis de circuitos eléctricos.

La mayoría de los simuladores computacionales existentes generan resultados rápidos y con gran precisión,

pero en la mayoría de los casos arrojan resultados numéricos, y estos son fácilmente interpretados por quienes ya están tienen un dominio en la materia, pero son poco amigables con quienes se inician en el estudio de redes eléctricas, y en muchos de los casos no abarcan el procedimiento tradicional que resulta didáctico para el aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos aplicados en Ingeniería Eléctrica.

En la escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Los Andes, actualmente se encuentra en desarrollo un programa denominado AnSiRE (Analizador Simbólico de Redes) que cuenta con un algoritmo capaz de analizar y resolver configuraciones circuitales que ya realizan otros programas, pero tiene un enfoque de desarrollo diferente, dirigido a ser más didáctico donde el estudiante puede observar los teoremas utilizados para obtener los resultados en el estudio de las redes eléctricas. El programa está formado por distintas funciones que realizan las operaciones simbólicas y numéricas basándose en el análisis simbólico de circuitos, mediante el cual se pueden obtener las expresiones simbólicas de voltaje, corriente y funciones de red.

En este sentido, se presenta a continuación una expansión de las funciones de cálculo del programa AnSiRE, mediante el desarrollo de un algoritmo que permite analizar la estabilidad y pasividad de cuadripolos, utilizando los métodos tradicionales y mostrando los arreglos y conclusiones pertinentes para los diferentes casos.

## **MARCO TEÓRICO**

### **Análisis Simbólico de Circuitos**

El análisis simbólico es un proceso mediante el cual se pueden obtener las expresiones simbólicas de voltaje y corriente, esto permite de manera sencilla la obtención de las funciones de red, diagrama de polos y ceros, análisis en el dominio de la frecuencia y del tiempo (Transitorios), expresiones de ganancia de tensión y/o corriente. Actualmente existe una gran variedad de programas de simulación

simbólica como SAPWIN, SSPICE, SCAM, TYNA entre otros, utilizados para el diseño de circuitos; estos simuladores simbólicos de circuitos son programas o herramientas capaces de recibir la información de un circuito, procesar su topología mediante un archivo de texto conocido como la netlist del circuito o por medio de una interfaz gráfica, para así determinar la respectiva expresión simbólica que se desee del circuito.

### **AnSiRE**

AnSiRE (Analizador Simbólico de Redes Eléctricas), es un programa que cuenta con un algoritmo capaz de analizar y resolver configuraciones circuitales. El programa está formado por distintas funciones que realizan las operaciones simbólicas y numéricas basándose en la idea del análisis simbólico de circuito mediante el cual se puede obtener las expresiones simbólicas de voltaje, corriente y funciones de red. El método usado para desarrollar AnSiRE y su algoritmo es el de Análisis Nodal Modificado (ANM), que establece un sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento de un circuito eléctrico, método ampliamente usado por un buen número de programas. Aplica para elementos pasivos RLC, fuentes de corriente y/o tensión, independientes y controladas, amplificadores operacionales, transformador ideal y por acoplamiento<sup>1</sup>.

### **Operatividad general de AnSiRE**

AnSiRE, es un programa en desarrollo, razón por la cual aún no maneja una interfaz gráfica, por lo tanto, los circuitos son representados por ficheros de texto (netlist), archivo que está formado por una serie de sentencias que enumeran las características de todos y cada uno de los componentes del circuito, el programa realiza una lectura del archivo netlist, verificando la presencia de errores en el formato o escritura del archivo, lo que conlleva a la finalización del programa. En caso de que el archivo netlist esté libre de errores, el programa ejecuta los algoritmos desarrollados para realizar los cálculos y obtener una solución al problema planteado, generando las respuestas que se imprimen por pantalla con sus respectivas conclusiones y se almacenan en un archivo

de salida.

## METODOLOGÍA

### Ampliación de las capacidades de cálculo de AnSiRE.

La ampliación de las capacidades de cálculo del AnSiRE se realiza, sobre la determinación de la estabilidad y la pasividad de cuadripolos, operaciones que no son realizadas por los programas de simulación simbólica existentes hoy día a nivel comercial.

Los algoritmos desarrollados para el análisis de los cuadripolos o redes de dos puertos incorporados al programa AnSiRE, se basan en desarrollos teóricos y matemáticos presentados por Routh-Hurwitz, Raisbeck, y Llewellyn.

### Diseño e implementación del cálculo de estabilidad para cuadripolos

Se dice que una red eléctrica o sistema, lineal e invariante en el tiempo, es estable si su respuesta transitoria desaparece, mientras la respuesta permanente tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, por lo tanto, ante señal de entrada o perturbación acotada, la salida o respuesta también es acotada.<sup>5</sup>

Por consiguiente, la red eléctrica es estable si la función de transferencia que relaciona la salida con la entrada de la red tiene polos confinados en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , será marginalmente estable si tiene polos conjugados simples en el eje imaginario e inestable si presenta polos en el semiplano derecho del plano  $s$ .

Para realizar el análisis de estabilidad de una red eléctrica, se utiliza el criterio de Routh-Hurwitz el cual establece que el número de raíces del polinomio de la función de red con parte real positivo o ubicado en el semiplano derecho del plano  $s$  es igual al número de cambios de signo de la primera columna del arreglo o matriz de Routh-Hurwitz.<sup>6</sup>

Para realizar el cálculo de estabilidad en AnSiRE, la entrada necesaria es la matriz que define al cuadripolo, puede ser

introducida como matriz de impedancia, matriz de admitancia o matriz de parámetros híbridos; estar expresada en el dominio  $s$  o caracterizada por números complejos, y el algoritmo desarrollado la convertirá en una matriz híbrida general para los análisis posteriores.

Si la matriz está expresada en el dominio  $s$ , el análisis de estabilidad se realiza por aplicación directa del criterio de Routh-Hurwitz y si está caracterizada por números complejos se realiza un análisis de estabilidad absoluta aplicando el criterio de estabilidad absoluta de Llewellyn.<sup>7</sup>

Si los componentes de la matriz suministrada son funciones racionales en el dominio de Laplace o dominio  $s$ , entonces debe ingresarse el netlist con el acrónimo CN seguido por los coeficientes del polinomio del numerador comenzando desde el coeficiente que acompaña al operador con mayor potencia hasta el término independiente y separados por un espacio, en la siguiente línea se introduce el acrónimo para el polinomio del denominador CD y los coeficientes del polinomio comenzando desde el exponente de la mayor potencia hasta el término independiente y separados por un espacio. También, se introduce el nombre del coeficiente de la matriz precedido por la expresión FUN, aunque, no es necesario que se mantenga el orden de la introducción de los datos, es decir, los datos CN, CD y fun pueden ser suministrados en cualquier orden, pero cada uno en una línea de texto independiente, finalmente se establece el análisis que se quiere realizar con la expresión EST para estabilidad.

A continuación, se muestra un ejemplo para un cuadripolo con matriz de impedancia dada por:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{s^4 - s^3 + 3s^2 - 8s - 4}{s^3 - s^2 - 4} & \frac{s^3 + 2s^2 - 4s - 8}{s^3 - s^2 - 4} \\ \frac{-s^3 + 4s^2 - 4s}{s^3 - s^2 - 4} & \frac{3s^2 - 4s - 4}{s^3 - s^2 - 4} \end{bmatrix}$$

La entrada es entonces:

**FUN Z11**  
**CN 1 -1 3 -8 -4**  
**CD 1 -1 0 -4**

**FUN Z12**  
**CN 1 2 -4 -8**  
**CD 1 -1 0 -4**  
**FUN Z21**  
**CN -1 4 -4 0**  
**CD 1 -1 0 -4**  
**FUN Z22**  
**CN 3 -4 -4**  
**CD 1 -1 0 -4**  
**\*Análisis**  
**. EST**

En el caso de que la matriz suministrada posea coeficientes caracterizados por números complejos, cada uno de los coeficientes debe ser ingresado con el acrónimo CN seguido de la expresión del número complejo seguido en la siguiente línea por el nombre del coeficiente de la matriz precedido por la expresión FUN, la expresión del número complejo y el nombre del coeficiente pueden alternarse siempre y cuando cada uno tenga el acrónimo o la expresión que le corresponde, finalmente se establece el análisis que se quiere realizar con las expresión . EST para estabilidad.

A continuación, se muestra un ejemplo para un cuadripolo con matriz de impedancia dada por:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 0.075 + (-0.060 + 100000000C)i & 0.001 + (0.001 - 100000000C)i \\ 0.01 + (0.1 + 100000000C)i & 0.002 + (0.001 + 100000000C)i \end{bmatrix}$$

La entrada es entonces:

**CN (0.075+i\*(-0.060+100000000\*C))**  
**FUN Z11**  
**FUN Z12**  
**CN (0.001+i\*(0.001-100000000\*C))**  
**FUN Z21**  
**CN (0.1-i\*(0.1+100000000\*C))**  
**FUN Z22**  
**CN (0.002+i\*(0.001+100000000\*C))**  
**\*Análisis**  
**. EST**

### **Diseño e implementación del cálculo de pasividad para cuadripolos**

En circuitos eléctricos, se conocen como elementos activos a aquellos que son capaces de generar o controlar tensiones o corrientes dentro de la red, por otra parte, los elementos pasivos son aquellos elementos

que no aportan energía a la red y que por el contrario la mayor parte de las veces son disipadores de energía, pero cumplen funciones importantes en el funcionamiento de los circuitos. Podría pensarse que una red compuesta únicamente de elementos pasivos es una red pasiva y que una red compuesta por al menos un elemento activo es una red activa, pero esto no siempre es así, sino que se deben cumplir ciertos criterios que denoten esta característica.

Se puede hablar de pasividad y actividad en función del tiempo y energía para una red de n puertos. Para que una red de n puertos e invariante en el tiempo sea pasiva es necesario y suficiente que su matriz híbrida general sea real y positiva.<sup>8</sup>

Estos resultados pueden ser extendidos si se introducen los conceptos de frecuencia discreta de pasividad y actividad en una única frecuencia compleja, una red de n puertos dada puede dividir el semiplano derecho del plano complejo s en regiones de pasividad y actividad. En la región pasiva, la red de n puertos puede ser reemplazada por una red equivalente pasiva de n puertos. En la región activa, la red de n puertos puede ser dispuesta para alcanzar ganancia de potencia o para oscilar por medios de una red incrustada apropiada. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, el interés está principalmente orientado al análisis del comportamiento de las redes de dos puertos en el eje real de frecuencia.

Para realizar el cálculo de pasividad en AnSiRE, los algoritmos desarrollados se fundamentan en el Teorema de Raisbeck<sup>7</sup>. La entrada necesaria es la matriz que define al cuadripolo, puede ser introducida como matriz de impedancia, matriz de admitancia o matriz de parámetros híbridos; estar expresada en el dominio s o caracterizada por números complejos, y el algoritmo desarrollado la convertirá en una matriz híbrida general para los análisis posteriores mediante el empleo de criterio para funciones reales positivas, análisis de la matriz hermitiana, y el teorema de Sturm.

Previo al análisis de pasividad, debe verificarse la estabilidad de la red, ya que

para que una red sea pasiva debe ser estable, por lo tanto el netlist para realizar el análisis de pasividad es idéntico al realizado con el análisis de estabilidad, solo que se le agrega una línea de comando identificada como .PAS. A continuación, se muestra un ejemplo de declaración del netlist usando la matriz declarada para el análisis de estabilidad.

La entrada es entonces:

```

CN (0.075+i*(-0.060+100000000*C))
FUN Z11
FUN Z12
CN (0.001+i*(0.001-100000000*C))
FUN Z21
CN (0.1-i*(0.1+100000000*C))
FUN Z22
CN (0.002+i*(0.001+100000000*C))
*Análisis
. EST
.PAS

```

## RESULTADOS

### Análisis de estabilidad de cuadripolos en AnSiRE

Para validar los resultados que se obtienen cuando se realiza análisis de estabilidad, mediante el algoritmo desarrollado en AnSiRE, se presentan a continuación cuatro ejemplos, para diferentes casos.

**Ejemplo N°1:** En el capítulo 7 del libro Linear Active Networks de Robert Spence,<sup>9</sup> se plantea un ejemplo que hace referencia a la figura 7.17 del mismo libro, el cual indica los parámetros de la matriz de admitancia, de valores: ( $y_{11}=75-i60$ ,  $y_{12}=1-i1$ ,  $y_{21}=100-i100$ ,  $y_{22}=2-i1$ ) todas las unidades en miliohm, con una frecuencia dada de 100 MHz, se solicita determinar los valores que pueda tener el capacitor, que conectado en paralelo no produzca que la red sea inestable. ingresando la matriz pertinente al ejemplo, el programa lee la matriz y la muestra en pantalla de la forma:

Datos de entrada:

```

CN (0.075+i*(-0.060+100000000*C))
fun Z11

```

```

fun Z12
CN (0.001+i*(0.001-100000000*C))

```

```

fun Z21
CN (0.1-i*(0.1+100000000*C))

```

```

fun Z22
CN (0.002+i*(0.001+100000000*C))
. EST

```

Al correr el programa se obtiene el siguiente análisis:

### MATRIZ HIBRIDA GENERAL

```

Z11 = (0.075+i*(-0.060+100000000*C))
Z12 = (0.001+i*(0.001-100000000*C))
Z21 = (0.1-i*(0.1+100000000*C))
Z22 = (0.002+i*(0.001+100000000*C))

```

Después de esto el programa ha analizado el dominio en el que se encuentra la matriz ingresada y procede a realizar el estudio de los elementos pertinentes al caso en que se encuentra.

En este ejemplo, donde los elementos están dados en forma de números complejos se procede al análisis de los elementos de la matriz de impedancia y las expresiones resultantes de las condiciones de estabilidad absoluta.

### ESTUDIO DE ESTABILIDAD ABSOLUTA PARA COEFICIENTES COMPLEJOS

#### ANALISIS DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIA

**ReZ11 = 3/40**

El elemento **ReZ11** cumple con la primera condición de estabilidad absoluta

**(ReZ11 >= 0)** por lo queda por comprobar la última condición de estabilidad absoluta para concluir si el cuadripolo es estable.

**ReZ22 = 1/500**

El elemento **ReZ22** cumple con la segunda condición de estabilidad absoluta

**(ReZ22 >= 0)** por lo queda por comprobar la

última condición de estabilidad absoluta para concluir si el cuadripolo es estable.

$$2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}| = (5940 * C) - (96010000000000 * C^2) - 3e-008$$

Los valores de C para los cuales la tercera condición de estabilidad absoluta  $(2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}| >= 0)$ , se encuentran en los rangos de:

**5.54802e-012 y 5.63205e-011**

Como se puede observar, se muestran los elementos que han sido estudiados y se explica cómo cada uno cumple la condición de estabilidad absoluta que le corresponde. Finalmente se muestran las conclusiones obtenidas del análisis realizado.

Los rangos solución para los valores de C, resultantes de la intercepción de la solución de **ReZ<sub>11</sub>, ReZ<sub>22</sub> y (2ReZ<sub>11</sub>ReZ<sub>22</sub> - Re(Z<sub>12</sub>Z<sub>21</sub>) - |Z<sub>12</sub>Z<sub>21</sub>|)** para estabilidad absoluta se encuentran entre:

**5.54802e-012 y 5.63205e-011**

**Ejemplo N°2:** Tomado de los apuntes del profesor de la Escuela de Ingeniería Eléctrica Pablo Pérez Gamboa,<sup>10</sup> donde las funciones racionales pertenecientes a la matriz de impedancia están expresadas en la transformada de Laplace.

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{5s}{s^2+9} & \frac{s-9}{s^2+9} \\ \frac{s+9}{s^2+9} & \frac{2s}{s^2+9} \end{bmatrix}$$

Datos de entrada:

**CN 5 0  
CD 1 0 9  
fun z11  
fun Z12  
CN 1 -9  
CD 1 0 9**

**fun Z21  
CN 1 9  
CD 1 0 9**

**fun Z22**

**CN 2 0  
CD 1 0 9  
Análisis  
.EST**

Al correr el programa se obtiene el siguiente análisis:

### MATRIZ HIBRIDA GENERAL

$$\begin{aligned} Z_{11} &= (5 * S) / (1 * S^2 + 9) \\ Z_{12} &= (S - 9) / (1 * S^2 + 9) \\ Z_{21} &= (S + 9) / (1 * S^2 + 9) \\ Z_{22} &= (2 * S) / (1 * S^2 + 9) \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz ingresada son impresos en pantalla en todos los casos para que el usuario pueda apreciar los datos que ha suministrado y para los casos donde la matriz está dada en el dominio de la frecuencia se muestra el polinomio característico al cual se le aplicara el análisis de Routh-Hurwitz y se imprime este mismo análisis, como se puede apreciar a continuación.

El polinomio característico ingresado es:

$$1.000000 * S^2 + 0.000000 * S^1 + 9.000000$$

Arreglo de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{cc} 1.000000 & 9.000000 \\ 0.000000 & \end{array}$$

En este caso una fila completa tiene valor cero, por lo tanto, se debe formar un polinomio auxiliar p<sub>2</sub>(s) derivando el polinomio anterior, se sustituye la fila de ceros por:

$$\begin{array}{c} 2 \\ 9 \end{array}$$

Conclusiones

No hay cambios de signos en la primera columna del arreglo de Routh-Hurwitz, lo que indica que no existen raíces ubicadas en el semiplano derecho del plano s. por lo tanto, el sistema es estable.

Inicialmente el arreglo de Routh-Hurwitz nos sirve para determinar y apreciar de manera visual si existen raíces ubicadas en el semiplano izquierdo del plano  $s$  la cual es una condición necesaria para determinar estabilidad.

En la matriz de impedancia estudiada en este ejemplo, se presenta un caso en particular donde una fila entera del arreglo de Routh-Hurwitz tiene valor cero y se puede apreciar el análisis presentado y la solución al mismo descrita en palabras y de manera numérica, esto pasa tanto para este como para los demás casos particulares que se pueden presentar. Finalmente se realiza el análisis de estabilidad total y se presentan las conclusiones. La figura 2 muestra el resultado de estabilidad.

Ahora, para que un cuadripolo sea determinado como absolutamente estable deben estudiarse los elementos de la matriz de impedancia y cumplirse ciertas condiciones

### ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIA

$\text{Re}Z_{11} = 0$   
 $\text{Re}Z_{11} \succ 0$ , por lo tanto, se cumple la primera condición de estabilidad absoluta de los elementos de la matriz de impedancia.

$\text{Re}Z_{22} = 0$   
 $\text{Re}Z_{22} \succ 0$ , por lo tanto, se cumple la segunda condición de estabilidad absoluta de los elementos de la matriz de impedancia.

$$2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}| = (W^6 + (62*W^4) - (1539*W^2))/((W^2 - 9)^4)$$

Los valores de Omega para los cuales la tercera condición de estabilidad absoluta ( $2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}| \succ 0$ ), se encuentran en los rangos de:

**4.3588989435 y 1000000.0000000000**

Dado que  $\text{Re}Z_{11}$  y  $\text{Re}Z_{22}$  no poseen intervalos solución, los intervalos de la tercera condición ( $2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21})$

-  $|Z_{12}Z_{21}| \succ 0$ ), serán los intervalos de estabilidad absoluta solución del sistema.

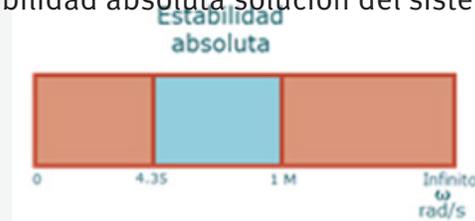


Figura 2. Ejemplo 2, rango de frecuencia para estabilidad absoluta (azul)

**Ejemplo N°3:** Tomado de la literatura,<sup>10</sup> donde la matriz híbrida general, es presentada en el dominio de la frecuencia ( $i\omega$ ), por lo cual no se aplica el análisis de Routh-Hurwitz y se procede directamente al análisis de estabilidad absoluta.

Datos de entrada:

**CN 1 1 5 2**  
**CD 1 1 2**  
**fun Z11**

**fun Z12**  
**CN 1 4 4**  
**CD 1 1 2**

**fun Z21**  
**CN -1 2 0**  
**CD 1 1 2**

**fun Z22**  
**CN 3 2**  
**CD 1 1 2**

**.EST**

Al correr el programa se obtienen los siguientes resultados.

### MATRIZ HIBRIDA GENERAL

$$Z_{11} = (1*(i*w)^3 + 1*(i*w)^2 + 5*(i*w) + 2) / (1*(i*w)^2 + 1*(i*w) + 2)$$

$$Z_{12} = (1*(i*w)^2 + 4*(i*w) + 4) / (1*(i*w)^2 + 1*(i*w) + 2)$$

$$Z_{21} = (-1*(i*w)^2 + 2*(i*w)) / (1*(i*w)^2 + 1*(i*w) + 2)$$

$Z_{22} = (3*(i*w)+2)/(1*(i*w)^2+1*(i*w)+2)$   
 Nuevamente se presenta una matriz, que esta vez se encuentra en el dominio de la frecuencia con la diferencia de que el valor multiplicador  $s$  fue sustituido por su equivalente  $i\omega$ , y esto implica que no es desarrollado el criterio de Routh-Hurwitz y se procede con análisis de estabilidad absoluta, en este caso las tres condiciones presentan en sus expresiones la variable involucrada y por lo tanto para cada una se presenta los intervalos solución y por último la intercepción de las tres soluciones (Figura 3) con la región de estabilidad en color azul.

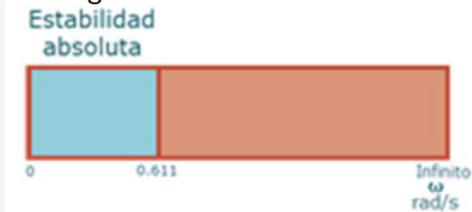


Figura 3 Ejemplo 3, rango de frecuencia para estabilidad absoluta (azul)

### ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIA

$ReZ_{11} = (\omega^2 + 4)/(4 + \omega^4 - (3*\omega^2))$   
 Los valores de Omega para los cuales  $ReZ_{11}$  cumple las condiciones de estabilidad absoluta ( $ReZ_{11} > 0$ ), se encuentran en los rangos de:

**0.0000000000 y 1000000.0000000000**

$ReZ_{22} = (\omega^2 + 4)/(4 + \omega^4 - (3*\omega^2))$   
 Los valores de Omega para los cuales  $ReZ_{22}$  cumple las condiciones de estabilidad absoluta ( $ReZ_{22} > 0$ ), se encuentran en los rangos de:

**0.0000000000 y 1000000.0000000000**

$$2ReZ_{11}ReZ_{22} - Re(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}| = (32 - (9*\omega^6) - (54*\omega^4) - (64*\omega^2))/((4 + \omega^4 - (3*\omega^2))^2)$$

Los valores de Omega para los cuales la tercera condición de estabilidad absoluta ( $2ReZ_{11}ReZ_{22} - Re(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}| > 0$ ), se encuentran en los rangos de:

**0.0000000000 y 0.6118566351**

Los rangos solución para los valores de Omega, resultantes de la intercepción de la solución de  $ReZ_{11}$ ,  $ReZ_{22}$  y  $(2ReZ_{11}ReZ_{22} - Re(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}|)$  para estabilidad absoluta se encuentran entre:

**0.0000000000 y 0.611856635064582**

**Ejemplo N°4:** Tomado del libro Steven Haykin, Active Network Theory,<sup>11</sup> ejercicio propuesto 5.4 parte a, y este presenta la matriz h. presenta un transistor en paralelo con un cuadripolo compuesto por una inductancia y una resistencia en serie, por lo que a través de las transformaciones entre parámetros se obtiene la matriz de admitancia.

Datos de entrada:

```

CN 20e-6 1.02
CD 0.01 10
fun Z11
fun Z12
CN -2e-9 -1.000002
CD 0.01 10
fun Z21
CN 2e-3 1
CD 0.01 10
fun Z22
CN 1
CD 0.01 10
.EST
  
```

Al correr el programa se obtiene el análisis que sigue:

### MATRIZ HIBRIDA GENERAL

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= (1.02+20e-6*i*w)/(10+0.01*i*w) \\
 H_{12} &= (-1.000002-2e-9*i*w)/(10+0.01*i*w) \\
 H_{21} &= (1+2e-3*i*w)/(10+0.01*i*w) \\
 H_{22} &= (1/(10+0.01*i*w))
 \end{aligned}$$

$$ReZ_{11} = 0.002 + (100000/(1000000 + \omega^2))$$

La parte real de  $Z_{11}$  ( $ReZ_{11}$ ) es positiva para todo Omega por lo que se cumple la primera condición de estabilidad absoluta.

$$ReZ_{22} = 100000/(1000000 + \omega^2)$$

La parte real de  $Z_{22}$  ( $ReZ_{22}$ ) es positiva

para todo Omega por lo que se cumple la segunda condición de estabilidad absoluta.

$$\frac{2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}|}{((51000000 + w^2)^2)} = (515100510000 - (24999948.000025 * w^2))$$

Los valores de Omega para los cuales la tercera condición de estabilidad absoluta

$$(2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}|) \geq 0,$$

se encuentran en los rangos de:

Los rangos solución para los valores de Omega, resultantes de la intercepción de la solución de  $\text{Re}Z_{11}$ ,  $\text{Re}Z_{22}$  y  $(2\text{Re}Z_{11}\text{Re}Z_{22} - \text{Re}(Z_{12}Z_{21}) - |Z_{12}Z_{21}|)$  para estabilidad absoluta se encuentran entre:

0 y 1435.41

Finalmente se muestra el rango de estabilidad absoluta en la fFigura 4.

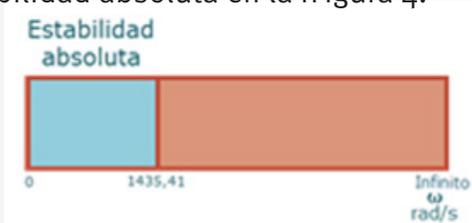


Figura 4 Ejemplo 4. rango de frecuencia para estabilidad absoluta (azul).

### Análisis de pasividad de cuadripolos en AnSiRE

Para validar los resultados que se obtienen cuando se realiza análisis de pasividad, mediante el algoritmo desarrollado en AnSiRE, se presentan a continuación tres ejemplos, para diferentes casos.

**Ejemplo N°5:** Tomado de la figura 7.19 del libro Linear Active Networks de Robert Spence.<sup>9</sup>

Datos de entrada.

$$\text{CN}(0.075 + i * (-0.060 + 100000000 * C))$$

$$\text{fun } Z_{11}$$

$$\text{fun } Z_{12}$$

$$\text{CN}(0.001 + i * (0.001 - 100000000 * C))$$

$$\text{fun } Z_{21}$$

$$\text{CN}(0.1 - i * (0.1 + 100000000 * C))$$

$$\text{fun } Z_{22}$$

$$\text{CN}(0.002 + i * (0.001 + 100000000 * C))$$

$$. \text{EST}$$

$$. \text{PAS}$$

Al correr el programa se obtiene el siguiente análisis que sigue al análisis de estabilidad:

### MATRIZ DE IMPEDANCIA

$$Z_{11} = (0.075 + i * (-0.060 + 100000000 * C))$$

$$Z_{12} = (0.001 + i * (0.001 - 100000000 * C))$$

$$Z_{21} = (0.1 - i * (0.1 + 100000000 * C))$$

$$Z_{22} = (0.002 + i * (0.001 + 100000000 * C))$$

ANALISIS DE PASIVIDAD PARA COEFICIENTES COMPLEJOS

ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ HERMITIANA.

$$K_{11} = 3/40$$

$K_{11} \geq 0$ , por lo tanto, del primer elemento de la matriz hermitiana cumple la condición.

$$K_{22} = 1/500$$

$K_{22} \geq 0$ , por lo tanto, la segunda condición de pasividad en cuanto a la matriz hermitiana se refiere, se satisface.

$$\text{Determinante} = -0.0049505$$

El determinante no cumple la condición que debe satisfacerse, lo que indica que el cuadripolo NO es pasivo.

Aunque se satisfacen las dos primeras condiciones de pasividad, las cuales toman en consideración, los elementos  $K_{11}$  y  $K_{22}$  de la matriz hermitiana, el determinante de la matriz hermitiana no cumple con la condición necesaria, por lo que se concluye que el cuadripolo NO es pasivo.

Como se pueda notar, el ejemplo estudia la pasividad de la matriz que viene dada en forma de números complejos.

**Ejemplo N°6:** Tomando la información

suministrada en la literatura 10, la cual describe las funciones racionales pertenecientes a la matriz de impedancia están expresadas en la transformada de Laplace.

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{5s}{s^2+9} & \frac{s-9}{s^2+9} \\ \frac{s+9}{s^2+9} & \frac{2s}{s^2+9} \end{bmatrix}$$

Datos de entrada:

**CN 5 0**  
**CD 1 0 9**  
**fun z11**  
**fun Z12**  
**CN 1 -9**  
**CD 1 0 9**

**fun Z21**  
**CN 1 9**  
**CD 1 0 9**

**fun Z22**  
**CN 2 0**  
**CD 1 0 9**

**Análisis**  
**.EST**  
**.PAS**

Al correr el programa se obtiene el siguiente análisis que sigue al análisis de estabilidad:

### **MATRIZ DE IMPEDANCIA**

$$\begin{aligned} Z_{11} &= (5*S)/(1*S^2+9) \\ Z_{12} &= (S-9)/(1*S^2+9) \\ Z_{21} &= (S+9)/(1*S^2+9) \\ Z_{22} &= (2*S)/(1*S^2+9) \end{aligned}$$

ANALISIS DE PASIVIDAD.

Elementos de la matriz hermitiana

$$K_{11} = 0$$

$K_{11} \succ= 0$ , por lo tanto, del primer elemento de la matriz hermitiana cumple la condición.

$$K_{22} = 0$$

$K_{22} \succ= 0$ , por lo tanto, la segunda condición de pasividad en cuanto a la matriz hermitiana

se refiere, se satisface.  
 Determinante = 0

El determinante  $\succ= 0$ , por lo tanto, la tercera condición de pasividad en cuanto a la matriz hermitiana se refiere, se satisface.

Los tres elementos de la matriz hermitiana ( $K_{11}$ ,  $K_{22}$ , Determinante) cumplen las condiciones de pasividad, por lo que se concluye que el cuadripolo es PASIVO.

**Ejemplo N°7:** Tomando la información suministrada en la literatura,<sup>11</sup> ejercicio propuesto 5.4 parte a, y este presenta la matriz h. presenta un transistor en paralelo con un cuadripolo compuesto por una inductancia y una resistencia en serie, por lo que a través de las transformaciones entre parámetros se obtiene la matriz de admitancia.

Datos de entrada:

**CN 20e-6 1.02**  
**CD 0.01 10**  
**fun Z11**

**fun Z12**  
**CN -2e-9 -1.000002**  
**CD 0.01 10**

**fun Z21**  
**CN 2e-3 1**  
**CD 0.01 10**

**fun Z22**  
**CN 1**  
**CD 0.01 10**

**.EST**  
**.PAS**

Al correr al programa se obtiene inicialmente el análisis de estabilidad y luego continúa el siguiente análisis, el rango de pasividad puede observarse en la figura 5.

### **MATRIZ DE IMPEDANCIA**

$$\begin{aligned} Z_{11} &= (1.02+20e-6*i*w)/(10+0.01*i*w) \\ Z_{12} &= (-1.000002-2e-9*i*w)/(10+0.01*i*w) \\ Z_{21} &= (1+2e-3*i*w)/(10+0.01*i*w) \\ Z_{22} &= (1/(10+0.01*i*w)) \end{aligned}$$

## ANÁLISIS DE PASIVIDAD.

Elementos de la matriz hermitiana

$$K_{11} = (102000 + (0.002 * \omega^2)) / (1000000 + \omega^2)$$

Los valores de Omega para los cuales  $K_{11}$  cumple las condiciones de pasividad ( $K_{11} \geq 0$ ), se encuentran en los rangos de:

$$0.0000000000 \text{ y } 1000000.0000000000$$

$$K_{22} = 100000 / (1000000 + \omega^2)$$

Los valores de Omega para los cuales  $K_{22}$  cumple las condiciones de pasividad ( $K_{22} \geq 0$ ), se encuentran en los rangos de:

$$0.0000000000 \text{ y } 1000000.0000000000$$

$$\text{Determinante} = (10199.99999999 - (0.00999998000001 * \omega^2)) / (1000000 + \omega^2)$$

Los valores de Omega para los cuales el determinante cumple las condiciones de pasividad (Determinante  $\geq 0$ ), se encuentran

## Conclusiones

Se ha desarrollado un software que realiza análisis simbólico y numérico de estabilidad y pasividad de cuadripolos, con la ventaja que permite al usuario visualizar el análisis y las conclusiones durante y después de realizado el estudio.

El programa desarrollado abarca el análisis para redes de dos puertos (cuadripolos), tanto para estabilidad como para pasividad, por lo que se persigue con estas particularidades una experiencia didáctica enriquecedora, ya que el usuario podrá tener explicaciones instantáneas para cada uno de los casos estudiados, lo que abarca desde el estudio del polinomio característico, análisis de los elementos de la matriz suministrada y análisis de los elementos de la matriz hermitiana.

El usuario tendrá la oportunidad de apreciar las conclusiones de cada uno de los casos que se puedan presentar, pues el programa cuenta con el análisis para los casos que pudiesen presentarse, lo que guiará al usuario que se encuentre estudiando los tópicos mencionados a un entendimiento rápido de los conceptos a partir del análisis brindado.

Tomando en consideración que generalmente los libros de referencia en el área de las Ciencias e Ingeniería presentan problemas propuestos cuyas respuestas no son siempre presentadas, el algoritmo desarrollado en AnSiRE se convierte en una herramienta para revisar resultados en el momento que el usuario esté resolviendo ejercicios manualmente y quiera comprobar los resultados obtenidos

en los rangos de:

$$0.0000000000 \text{ y } 1009.9515037872$$

$K_{11}$  es positivo para todo Omega, por lo tanto, cumple la primera condición de pasividad.

$K_{22}$  es positivo para todo Omega, lo que satisface la segunda condición de pasividad.

Los rangos solución para los valores de  $\omega$ , resultantes de la intercepción de la solución de  $K_{11}$ ,  $K_{22}$  y el determinante para pasividad se encuentran entre:

$$0.0000000000 \text{ y } 1009.9515037872$$



Figura 5. Ejemplo 7, rango de pasividad y actividad

## Referencias

- 1.- J. R. Sotelo, Análisis Simbólico de Circuitos. Parte 1: Motor de Cálculo., Mérida: Universidad de Los Andes, 2017.
- 2- Araujo, F., Vilorio, F. y Bustamante, J. (2021). Ampliación de las capacidades de cálculo del analizador simbólico AnSiRE: Cálculo de estabilidad y pasividad de los circuitos. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 42, No. 1, 23-30.
- 3- Svoboda, J., Dorf, R. Introduction to Electric Circuits. 9th Edition. United States of America. John Wiley & Sons, Inc. 2014. 841-845.
- 4- Sudhakar, A., Palli, S. Circuits and Networks Analysis and Synthesis. Fifth Edition. New Delhi. McGraw Hill Education. 2015. 707-715.
- 5- Van Vankelburg, M. Análisis de Redes, Tercera Edición. México D.F. LIMUSA, S.A., 1980. 353-364.
- 6- Bhattacharya, S.K. Control Systems Engineering. Singapore. New Delhi. Pearson. 2014. 261-282.
- 7- G. Raisbeck. (1954). A Definition of Passive Linear Networks in Terms of Time and Energy. Journal of Applied Physics 25, pp1510.
- 8- Chen, W. Active Network Analysis Feedback Amplifier Theory, Second Edition, Singapore. World Scientific. 2017. 157-165.
- 9- Spence, R. Linear Active Networks. Great Britain: John Wiley & Sons. 1970. 232-236.
- 10- Gamboa, P. Función de Red - Tema 3. USTED-FI. Mérida. 1982. 42-48.
- 11- Haykin S. Active Network Theory, Great Britain: Addison-Wesley Publishing Company, 1970. 256.