

Sobre la Estabilidad Asintótica de un Modelo de Leishmaniasis Cutánea.

Teodoro Lara

Universidad de los Andes, Núcleo Universitario Rafael Rangel
Departamento de Física y Matemáticas, Venezuela

e-mail: teodorolara@cantv.net

Resumen

En el presente trabajo estudiamos la estabilidad asintótica de un modelo de leishmaniasis cutánea americana (LCA). Este es una generalización de uno introducido previamente donde aparecen ecuaciones en diferencias suponiendo diferentes especies de reservorios y hospedadores incidentales. Lo que acá usamos son ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la dinámica de infección en humanos, burros, perros y vectores.

Palabras clave: Leishmaniasis Cutánea Americana, ecuaciones diferenciales ordinarias, Estabilidad Asintótica, Jacobiano.

0 Introducción

La leishmaniasis cutánea americana (LCA) es una enfermedad resurgente ([3,6]). Es causada por parásitos del género *Leishmania* (Kinetoplastida: Trypanosomatidae), que son transmitidos por Flebotominos (Diptera: Psychodidae: Phlebotominae). Adicionalmente la LCA es una parasitosis que se caracteriza por poseer hospedadores reservorios, que en principio son fundamentales para el establecimiento de la enfermedad. El modelaje matemático de la dinámica de transmisión de las leishmaniasis ha sido pobremente desarrollado si se compara, por ejemplo, con el de malaria ([2, 4, 8]).

Los modelos matemáticos han sido usados a lo largo del tiempo para describir fenómenos particulares, su comportamiento en general y sobre todo su comportamiento en el futuro. Permiten obtener información sobre la situación modelada que de otra manera no sería obvio o evidente. La introducción de las ecuaciones diferenciales con retardo ha permitido estudiar el pasado de algunas situaciones modeladas por estas ecuaciones.

En este trabajo consideramos el modelo estudiado numericamente en [4], el cual describe la dinámica de transmisión de la Leishmaniasis Cutánea Americana, suponiendo diferentes especies de reservorios y hospedadores incidentales. En ese artículo las ecuaciones considera-

das son ecuaciones en diferencias, lo que acá hacemos es considerar ecuaciones diferenciales ordinarias donde la parte derecha del sistema que resulta tiene la misma estructura que el considerado en el trabajo ántes mencionado. El sistema en cuestión es uno no lineal de cuatro ecuaciones ya que se consideran humanos, perros, burros y vectores infectados.

En [3] se trata de estudiar la estabilidad (en realidad lo que se estudia es la estabilidad asintótica) de un modelo similar al que estudiamos acá, pero allá se considera un sistema donde intervienen solo tres especies y las ecuaciones que se consideran son mucho mas sencillas que las que consideramos en el presente trabajo.

El artículo está estructurado de la siguiente manera; en la Sección 1 formalmente establecemos el problema a estudiar, en la Sección 2 establecemos los principales resultados del trabajo y finalmente en la última Sección dejamos algunas interrogantes y problemas abiertos.

1 Establecimiento del Problema

Se considera un ecosistema cerrado donde se dispone de una población fija de A humanos, B burros, C vectores y D perros, y $H = H(t) = H_t$, $R = R(t) = R_t$, $P = P(t) = P_t$, $V = V(t) = V_t$ el número de humanos, burros, perros y vectores infectados respectivamente, en el tiempo t , $t \geq 0$, el modelo

estudiado en [4] es dado como

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= H_t + \beta_H V_t (A - H_t) - \gamma_H H_t \\ R_{t+1} &= R_t + \beta_R V_t (B - R_t) - \gamma_R R_t \\ P_{t+1} &= P_t + \beta_P V_t (D - P_t) - \gamma_P P_t \\ V_{t+1} &= V_t + \beta_I I_t (C - V_t) - \mu V_t \end{aligned} \quad (1)$$

La variable I puede ser igual a P o R o H según se considere a perros, burros o humanos, respectivamente, como únicos reservorios de la infección.

Y en el caso de considerar perros y burros simultáneamente como reservorios el correspondiente sistema viene dado como

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= H_t + \beta_H V_t (A - H_t) - \gamma_H H_t \\ R_{t+1} &= R_t + \beta_R V_t (B - R_t) - \gamma_R R_t \\ P_{t+1} &= P_t + \beta_P V_t (D - P_t) - \gamma_P P_t \\ V_{t+1} &= V_t + \beta_P P_t (C - V_t) + \beta_R R_t (C - V_t) - \mu V_t \end{aligned} \quad (2)$$

Los otros valores envueltos en estas ecuaciones son ([1, 4])

μ = tasa de mortalidad del Vector (1/unidad de tiempo),

β_R = tasa de infección, per capita, en encuentros entre Vectores y Burros (1/individuo. unidad de tiempo),

β_H = tasa de infección, per capita, en encuentros entre Vectores y Humanos (1/ Individuo.unidad de tiempo),

β_P = tasa de infección, per capita, en encuentros entre Vectores y Perros (1/ Individuo.unidad de tiempo),

γ_R = tasa de recuperación de la infección de los Burros (1/unidad de tiempo),

γ_H = tasa de recuperación de la infección de los Humanos (1/unidad de tiempo)

y

γ_P = tasa de recuperación de la infección de los Perros (1/unidad de tiempo).

El modelo que proponemos y estudiamos en este trabajo consiste en escribir las ecuaciones (1) y (2) como ecuaciones diferenciales que lucirían, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= H + \beta_H V (A - H) - \gamma_H H \\ \frac{dR}{dt} &= R + \beta_R V (B - R) - \gamma_R R \\ \frac{dP}{dt} &= P + \beta_P V (D - P) - \gamma_P P \\ \frac{dV}{dt} &= V + \beta_I I (C - V) - \mu V, \end{aligned} \quad (3)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= H + \beta_H V (A - H) - \gamma_H H \\ \frac{dR}{dt} &= R + \beta_R V (B - R) - \gamma_R R \\ \frac{dP}{dt} &= P + \beta_P V (D - P) - \gamma_P P \\ \frac{dV}{dt} &= V + \beta_P P (C - V) + \beta_R R (C - V) - \mu V. \end{aligned} \quad (4)$$

En cada caso deben existir condiciones iniciales, es decir, el número de perros, burros, humanos y vectores infectados en el tiempo $t = 0$, que es cuando se comienza el experimento, dichas condiciones iniciales las denotamos como P_0 , R_0 , H_0 y V_0 respectivamente.

El sistema (3), después de algunas simplificaciones luce ahora, dependiendo si tenemos en la última ecuación $I = P$, $I = R$, o $I = H$, como

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= (1 - \gamma_H)H + \beta_H AV - \beta_H HV \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - \gamma_R)R + \beta_R BV - \beta_R RV \\ \frac{dP}{dt} &= (1 - \gamma_P)P + \beta_P DV - \beta_P PV \\ \frac{dV}{dt} &= (1 - \mu)V + \beta_P CP - \beta_P PV, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= (1 - \gamma_H)H + \beta_H AV - \beta_H HV \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - \gamma_R)R + \beta_R BV - \beta_R RV \\ \frac{dP}{dt} &= (1 - \gamma_P)P + \beta_P DV - \beta_P PV \\ \frac{dV}{dt} &= (1 - \mu)V + \beta_R CR - \beta_R RV, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= (1 - \gamma_H)H + \beta_H AV - \beta_H HV \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - \gamma_R)R + \beta_R BV - \beta_R RV \\ \frac{dP}{dt} &= (1 - \gamma_P)P + \beta_P DV - \beta_P PV \\ \frac{dV}{dt} &= (1 - \mu)V + \beta_H CH - \beta_H HV \end{aligned} \quad (7)$$

respectivamente. De manera similar, para el sistema (4)

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= (1 - \gamma_H)H + \beta_H AV - \beta_H HV \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - \gamma_R)R + \beta_R BV - \beta_R RV \\ \frac{dP}{dt} &= (1 - \gamma_P)P + \beta_R DV - \beta_P PV \\ \frac{dV}{dt} &= (1 - \mu)V + (\beta_P P - \beta_R R)(C - V). \end{aligned} \quad (8)$$

2 Dinámica y Estabilidad Asintótica

Vamos ahora a determinar puntos críticos en cada uno de los sistemas (5)–(7). En cada caso es claro que $H = R = P = V = 0$ es uno de ellos, el llamado origen de coordenadas. Los otros puntos críticos, no triviales, son los siguientes. Para el sistema (5), el único punto crítico, además del origen es dado como

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{\beta_H A [\beta_P^2 CD + (\mu - 1)(1 - \gamma_P)]}{\beta_P^2 D (\gamma_H - 1 + \beta_H C) + \beta_P (1 - \mu)(1 - \gamma_H) - \beta_H (1 - \mu)(1 - \gamma_P)} \\ R^* &= \frac{\beta_R B [\beta_P^2 CD + (\mu - 1)(1 - \gamma_P)]}{\beta_P^2 D (\gamma_R - 1 + \beta_R C) + \beta_P (1 - \mu)(1 - \gamma_R) - \beta_R (1 - \mu)(1 - \gamma_P)} \\ P^* &= \frac{\beta_P^2 CD + (\mu - 1)(1 - \gamma_P)}{\beta_P (\beta_P C + \gamma_P - 1)} \\ V^* &= \frac{\beta_P^2 CD + (\mu - 1)(1 - \gamma_P)}{\beta_P (\beta_P D + \mu - 1)}. \end{aligned}$$

Para el sistema (6) éste es

$$\begin{aligned} H^* &= -\frac{\beta_H A [(1 - \mu)(1 - \gamma_R) - \beta_R^2 BC]}{\beta_R^2 B (\gamma_H - 1 + \beta_H C) + \beta_R (1 - \mu)(1 - \gamma_H) + \beta_H (\mu - 1)(1 - \gamma_R)} \\ R^* &= -\frac{(1 - \mu)(1 - \gamma_R) - \beta_R^2 BC}{\beta_R (\beta_R C + \gamma_R - 1)} \\ P^* &= \frac{\beta_P D [(1 - \mu)(1 - \gamma_R) - \beta_R^2 BC]}{\beta_R^2 B (1 - \gamma_P - \beta_P C) + \beta_R (1 - \mu)(1 - \gamma_P) - \beta_P (1 - \mu)(1 - \gamma_R)} \\ V^* &= -\frac{(1 - \mu)(1 - \gamma_R) - \beta_R^2 BC}{\beta_R (\beta_R B + \mu - 1)}, \end{aligned}$$

y finalmente para el sistema (7),

$$\begin{aligned} H^* &= -\frac{(1 - \mu)(\gamma_H - 1) - \beta_H^2 AC}{\beta_H (\beta_H C + \gamma_H - 1)} \\ R^* &= \frac{B [(1 - \mu)(\gamma_H - 1) - \beta_H^2 AC]}{\beta_H^2 A (1 - \gamma_R - \beta_R C) + \beta_H (1 - \mu)(\gamma_R - 1) + \beta_R (1 - \mu)(1 - \gamma_H)} \\ P^* &= \frac{D [(1 - \mu)(\gamma_H - 1) - \beta_H^2 AC]}{\beta_H^2 A (1 - \gamma_P - \beta_P C) + \beta_H (1 - \mu)(\gamma_P - 1) + \beta_P (1 - \mu)(1 - \gamma_H)} \\ V^* &= -\frac{(1 - \mu)(\gamma_H - 1) - \beta_H^2 AC}{\beta_H (\beta_H A + \mu - 1)}. \end{aligned}$$

Mirando el sistema (8) notamos inmediatamente que el origen es una solución, sin embargo otras soluciones no triviales existen pero necesitamos muchas más condiciones sobre los signos de las constantes envueltas a fin de determinarlas. Definitivamente no es una tarea fácil, Maple es útil en estas circunstancias y es lo que hemos usado en los cálculos previos.

Sea (H^*, R^*, P^*, V^*) un punto crítico de los sistemas (5), (6), (7) (cada uno de estos puntos será determinado mas adelante), y $F: D \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación dada por $F(H, R, P, V) = (F_1(H, R, P, V), F_2(H, R, P, V), F_3(H, R, P, V), F_4(H, R, P, V))$ donde

$$\begin{aligned} F_1(H, R, P, V) &= (1 - \gamma_H)H + \beta_H AV - \beta_H HV, \\ F_2(H, R, P, V) &= (1 - \gamma_R)R + \beta_R BV - \beta_R RV \\ F_3(H, R, P, V) &= (1 - \gamma_P)P + \beta_P DV - \beta_P PV \end{aligned}$$

y F_4 que, dependiendo de si $l = P$, $l = R$ o $l = H$ en (3) es dada, respectivamente, como

$$\begin{aligned} F_4(H, R, P, V) &= (1 - \mu)V + \beta_P CP - \beta_P PV, \\ F_4(H, R, P, V) &= (1 - \mu)V + \beta_R CR - \beta_R RV, \\ F_4(H, R, P, V) &= (1 - \mu)V + \beta_H CH - \beta_H HV. \end{aligned}$$

Denotemos por $J_P F$, $J_R F$, $J_H F$ la matriz Jacobiana de F en el punto crítico (H^*, R^*, P^*, V^*) donde tomamos como F_4 el caso $l = P$, $l = R$ o $l = H$ cuando corresponda. Notemos que la matriz Jacobiana de F es la matriz variacional de los sistemas (5), (6) y (7) según sea el caso, la idea en todo caso es estudiar condiciones para estabilidad asintótica dependiendo del espectro de la matriz en cuestión. La matriz variacional en cada caso es

$$\begin{aligned} J_P F &= \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H - \beta_H V^* & 0 & 0 & \beta_H (A - H^*) \\ 0 & 1 - \gamma_R - \beta_R V^* & 0 & \beta_R (B - R^*) \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P - \beta_P V^* & \beta_P (D - P^*) \\ 0 & 0 & \beta_P (C - V^*) & 1 - \mu - \beta_P P^* \end{pmatrix} \\ J_R F &= \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H - \beta_H V^* & 0 & 0 & \beta_H (A - H^*) \\ 0 & 1 - \gamma_R - \beta_R V^* & 0 & \beta_R (B - R^*) \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P - \beta_P V^* & \beta_P (D - P^*) \\ 0 & \beta_R (C - V^*) & 0 & 1 - \mu - \beta_R R^* \end{pmatrix} \\ J_H F &= \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H - \beta_H V^* & 0 & 0 & \beta_H (A - H^*) \\ 0 & 1 - \gamma_R - \beta_R V^* & 0 & \beta_R (B - R^*) \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P - \beta_P V^* & \beta_P (D - P^*) \\ \beta_H (C - V^*) & 0 & 0 & 1 - \mu - \beta_H H^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En el caso de sistema (8) F_1, F_2, F_3 son como antes, mientras que F_4 es dada por $F_4 = (1 - \mu)V + (\beta_P P - \beta_R R)(C - V)$, y la matriz variacional luce como

$$JF = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H - \beta_H V^* & 0 & 0 & \beta_H (A - H^*) \\ 0 & 1 - \gamma_R - \beta_R V^* & 0 & \beta_R (B - R^*) \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P - \beta_P V^* & \beta_P (D - P^*) \\ 0 & \beta_R (C - V^*) & \beta_P (C - V^*) & 1 - \mu - \beta_P P^* + \beta_R R^* \end{pmatrix}$$

Definición 2.1 ([7], [9]) *El punto de equilibrio x_0 del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ en \mathbb{R}^n es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal forma que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x - x_0\| < \delta$ implica que la correspondiente solución $x(t; x, t_0)$ de dicho sistema satisface $\|\varphi(t; x, t_0) - x_0\| < \epsilon$. El punto de equilibrio x_0 es inestable si no es estable.*

Definición 2.2 ([5], [7], [9]) *El punto de equilibrio x_0 del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ en \mathbb{R}^n es asintóticamente estable si es estable y además $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; x, t_0) = x_0$.*

Vamos ahora a estudiar la estabilidad o inestabilidad de los puntos críticos encontrados en la

sección anterior mediante el signo de los autovalores de las correspondientes matrices variacionales. Sabemos por ejemplo que el origen ($H^* = R^* = P^* = V^* = 0$) es un punto crítico para cada sistema, las correspondientes matrices variacionales son

$$J_{PF} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H & 0 & 0 & \beta_H A \\ 0 & 1 - \gamma_R & 0 & \beta_R B \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P & \beta_P D \\ 0 & 0 & \beta_P C & 1 - \mu \end{pmatrix},$$

$$J_{RF} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H & 0 & 0 & \beta_H A \\ 0 & 1 - \gamma_R & 0 & \beta_R B \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P & \beta_P D \\ 0 & \beta_R C & 0 & 1 - \mu \end{pmatrix},$$

$$J_{HF} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H & 0 & 0 & \beta_H A \\ 0 & 1 - \gamma_R & 0 & \beta_R B \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P & \beta_P D \\ \beta_H C & 0 & 0 & 1 - \mu \end{pmatrix},$$

$$JF = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_H & 0 & 0 & \beta_H A \\ 0 & 1 - \gamma_R & 0 & \beta_R B \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_P & \beta_P D \\ 0 & \beta_R C & \beta_P C & 1 - \mu \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3 El origen es inestable para los sistemas (5)–(7).

Prueba. Lo que hacemos es calcular los espectros de las matrices dadas arriba, estos son,

$$\sigma(J_{PF}) = \left\{ 1 - \gamma_H, 1 - \gamma_R, \frac{1}{2} \left[2 - (\gamma_P + \mu) \pm \sqrt{(\gamma_P - \mu)^2 + 4\beta_P^2 DC} \right] \right\},$$

$$\sigma(J_{RF}) = \left\{ 1 - \gamma_H, 1 - \gamma_P, \frac{1}{2} \left[2 - (\gamma_R + \mu) \pm \sqrt{(\gamma_R - \mu)^2 + 4\beta_R^2 BC} \right] \right\},$$

$$\sigma(J_{HF}) = \left\{ 1 - \gamma_P, 1 - \gamma_R, \frac{1}{2} \left[2 - (\gamma_H + \mu) \pm \sqrt{(\gamma_H - \mu)^2 + 4\gamma_H^2 AC} \right] \right\}.$$

De acuerdo con la definición anterior, y con el Teorema de la Variedad Estable ([9]) la condición necesaria y suficiente para garantizar la estabilidad asintótica es que todos los autovalores tengan parte real negativa. Observando los espectros de las matrices de arriba notamos que una condición necesaria para tener autovalores con parte real negativa es que $1 - \gamma_H < 0$, $1 - \gamma_R < 0$, y $1 - \gamma_P < 0$ o, equivalentemente, $\gamma_H > 1$, $\gamma_R > 1$, y $\gamma_P > 1$. Por otro lado, de acuerdo con [4] los valores de las constantes en cuestión tienen la propiedad $\gamma_H < 1$, $\gamma_R < 1$, y $\gamma_P < 1$. En otras palabras, no hay forma de garantizar estabilidad asintótica del origen para esta ecuaciones. En otras palabras el origen es inestable.

Observación 2.4 El caso en que el punto crítico

nulo (el origen) no sea asintóticamente estable lo que significa es que la enfermedad no desaparece por sí sola. La forma de hacerla disminuir y eventualmente desaparecer es introduciendo nuevos elementos como fumigaciones o vacunaciones en los individuos, lo cual correspondería a introducir perturbaciones en el ecosistema y por tanto en el modelo, pero que en nuestro sistema en cuestión no se contempla.

Observación 2.5 La estabilidad de los otros puntos críticos diferentes del origen serán estudiados en un trabajo actualmente en preparación, consideramos de vital importancia el dar información sobre el origen pues es en este punto (ausencia de individuos infectados) donde se desea que converjan de manera asintótica las soluciones del sistema correspondiente, cosa que ya hemos visto no ocurre a menos que se introduzcan perturbaciones.

El caso de JF es mucho más complicado, en todo caso el polinomio característico asociado a esta matriz es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4,$$

donde

$$a_1 = -4 + \gamma_H + \gamma_R + \gamma_P + \mu,$$

$$a_2 = -(\gamma_R + \mu) + \gamma_P(\gamma_R + \mu) + \gamma_R \gamma_P - \beta_P^2 DC - \beta_R^2 BC,$$

$$a_3 = -1 + \gamma_R + \gamma_P + \mu + \beta_P^2 DC(1 - \gamma_R) - \gamma_R(\gamma_P + \mu) + \beta_R^2 BC(1 - \gamma_P) + \gamma_P \mu(-1 + \gamma_R) + (\gamma_H - 1) \left\{ 3 - 2[\gamma_R + \gamma_P + \mu] + \mu(\gamma_R - \gamma_P) + \gamma_R \gamma_P \right. \\ \left. - C(\beta_P^2 D + \beta_R^2 B) \right\},$$

$$a_4 = (\gamma_H - 1) \left[-1 + \gamma_R(1 - \gamma_P - \mu) + (\beta_P^2 DC + \gamma_P)(1 - \gamma_R) \right. \\ \left. + (\beta_R^2 BC + \mu)(1 - \gamma_P) \right].$$

Teorema 2.6 El origen es inestable para el sistema (8).

Prueba. Usamos el criterio de Routh-Hurwitz ([5]) y damos condiciones para la estabilidad asintótica del origen. Para eso calculamos los distintos menores de JF, es decir

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \text{ donde } \Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} \text{ y } \Delta_4 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

Recordamos que $a_i, i = 1, \dots, 4$ son los distintos valores calculados anteriormente. La estabilidad asintótica se garantiza si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$.

O equivalentemente, $\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0,$

$$0, \Delta_3 = (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0, \Delta_4 =$$

$$a_4 [(a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4] > 0.$$

En el caso de $\Delta_1 = a_1 > 0$, esto es equivalente a, $-4 + \gamma_H + \gamma_R + \gamma_P + \mu > 0$ o bien $\gamma_H + \gamma_R + \gamma_P + \mu > 4$ y de nuevo nos encontramos con una situación similar al caso de las ecuaciones (5)–(7) donde no se puede garantizar estabilidad debido a que por razones experimentales los valores envueltos en la relación de arriba son todos menores que 1, no hay entonces manera que su suma sea mas de 4.

3 Comentarios Finales

Hemos presentado un modelo que describe la dinámica de transmisión de la Leishmaniasis Cutánea Americana, hemos mostrado que no hay estabilidad asintótica del origen. Creemos que es la puerta de entrada para estudiar mas propiedades de este modelo, como conjuntos estables, inestable y centrales por ejemplo.

Es pertinente e importante el implementar simulaciones numéricas para este modelo, esto permitiría observar el comportamiento de las soluciones en puntos cercanos a los puntos críticos y para distintos valores iniciales.

El modelo como está planteado es restrictivo en el sentido que considera un ecosistema cerrado donde los números de individuos, A, B, C, D son fijos a lo largo de todo el proceso, es posible, mediante experimentación, dar expresiones en términos del tiempo t para estos valores y se convertirían en funciones del tiempo, es decir, $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$, $D = D(t)$; lo cual es plausible pensando que el número de individuos cambia con el tiempo. Nos atrevemos a conjeturar que estas expresiones deben ser polinomios con coeficientes a determinar.

Referencias

1. C. M. Aguilar, E. Fernandez, R. Fernandez, and

L. M. Deane. Study of an outbreak of cutaneous leishmaniasis in Venezuela. *Mem. Inst. Oswaldo Cruz*, 79:181–195, 1984.

2. T. Awerbuch. Evolution of mathematical models of epidemics. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 740:232–241, 1994.

3. L. F. Chaves and M. J. Hernandez. Mathematical modelling of american cutaneous leishmaniasis: Incidental hosts and threshold conditions for infection persistence. *Acta Tropica*, 5:1–8, august 2004.

4. L. F. Chaves, M. J. Hernandez, and S. Ramos. Simulación de modelos matemáticos como herramienta para el estudio de los reservorios de la leishmaniasis cutánea americana, 2004.

5. Miguel de Guzman. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Alhambra, Madrid, reimpression edition, 1980.

6. N. G. Gratz. Emerging and resurging vector-borne diseases. *Ann. Rev. Entomol*, 44:51–75, 1999.

7. Jack Hale. *Ordinary Differential Equations*. Malabar, Malabar, 1989.

8. R. Killick-Kendrick and R. D. Ward. Ecology of leishmania. *Parasitology*, 82:143–152, 1982.

9. Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Number 7 in Text in Applied Mathematics. Springer, New York, 2000.

Abstract:

About the asymptotic stability of a model of Cutaneous Leishmaniasis.

In this paper we study the asymptotic stability of a model of Leishmaniasis, this is a generalization of a previously introduced where they consider finite difference equations assuming different species of reservoirs and hosts. What we use ordinary differential equations that describe the dynamic of infection in humans, donkeys, dogs and vectors.